目　　录

再版序言

绪论 ······························1

§1. 基本概念，具体例子，判别极限环存在
　　与不存在的若干准则 ······················5

§2. 极限环的重次与稳定性 ······················24

§3. 旋转向量场中的极限环 ······················38

§4. 极限环随参数而变化的一般情况 ······················73

§5. 极限环的存在性 ······················89

§6. 极限环的唯一性 ······················116

§7. 多个极限环的存在性 ······················154

§8. 微分系统的结构稳定性 ······················176

§9. M. Frommer 和 H. H. Баутин 的工作 ······················192

§10. 一些没有极限环的二次系统的全局结构分析 ············221

§11. 二次微分系统的极限环的一般性质与相对位置 ·········247

§12. 二次微分系统的分类，I 类方程的极限环 ··················263

§13. 第 II 类方程无极限环时轨线的全局结构 ··················285

§14. 第 II 类方程的极限环的相对位置以及唯一性，
　　唯二性 ······················310

§15. III 类方程的各种局部性质和全局性质 ······················346

§16. 二次系统定性研究中的 Dulac 函数法 ······················375

§17. 有界二次系统的极限环 ······················388

§18. 补遗 ······················419

参考文献 ······················433

绪　论

在微分方程定性理论中，关于极限环的研究是一个既有趣而又困难的部分．自从 H. Poincaré 在他的论文«微分方程所定义的积分曲线»(1881—1886) [1] 中发现极限环以后，它立刻就受到这位著名数学家的特别重视．为了决定一个已给的方程是否存在极限环，以及研究极限环的性质，他首先提出了地形系法，后继函数法，小参数法(最先见于«天体力学中的新方法»一书)和环域定理等重要的理论，并且人为地造出许多例子来检验这些方法的效果．与此同时他也已经注意到研究极限环与解决微分方程积分曲线族的全局结构问题之间的密切关系了．1901 年瑞典数学家 I. Bendixson 亦以与前同样的题目发表了一篇重要的论文[2]，在这篇文章里他把环域定理的证明严格化，并且加以推广，成为大家所熟知的、关于平面有界区域中动力系统的轨线的极限集的 Poincaré-Bendixson 理论．此外，他又首先应用 Green 公式，在平面向量场的闭轨线与发散量之间建立了联系，得到一个确定闭轨线不存在的定理．这种联系后来被人们不断地发展和加深，得到发散量沿闭轨线积分一周的数值与其稳定性之间的关系，发散量在鞍点的值与过鞍点的奇闭轨线的内侧稳定性之间的关系，等等．

与 Bendixson 论文发表的同一年，著名数学家 D. Hilbert 在国际数学会上提出了一系列的数学难题[3]，其中第十六个问题的后面一半是：方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q_n(x,\ y)}{P_n(x,\ y)} \tag{1}$$

(P_n 与 Q_n 是次数不高于 n 的实系数多项式，x, y 是实变量）最多

有几个极限环？它们的相对位置如何？说也奇怪，数学家们对 Hilbert 的其他问题兴趣都很大，钻研的人很多，但是对这个问题问津的人却不多[1]. 据我们所知，在二十世纪的前三十年中，研究此问题较有成绩的只有法国数学家 H. Dulac. 他在 1923 年发表了一篇长达 140 页的论文[4]，证明方程(1)的极限环的个数是有限的．此外，他还研究了当 $n=2$ 时方程(1)存在中心点的充要条件([5])，看来他已感到这两个问题之间是有密切联系的了．Dulac 在极限环理论方面还有一些其他的基本结果，读者在 § 1 就可看到．稍后，德国数学家 M. Frommer 于 1934 年亦以方程(1)的中心点的充要条件($n=2$)为题发表了一篇论文[6]，并画出有中心点时方程的轨线全图；同时他还指出，方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+(1+\varepsilon)x^2+2xy-y^2}{-y+2xy-y^2} \tag{2}$$

当 $\varepsilon>0$ 足够小时存在极限环．实际上，以后读者可以看到，对于非线性方程而言，极限环不但是它所特有的，并且也是极为常见的一种轨线．

数学理论的发展方向常是以生产实际中的问题为引导的，对于微分方程这个学科来说，情况尤其是如此．实际问题给予研究极限环理论的推动力远远胜过大数学家的号召．事情是这样：自从二十世纪以来，应用无线电子学有了迅速的发展；物理学家发明了可以产生稳定的自激等幅振荡的三极电子管，从而使声音与图象的无线电传播有了可能．但是要描写这种振荡现象却不是线性微分方程所能办到的．1926 年 van der Pol[7] 首先得到了以他的名字命名的、描写三极电子管中等幅振荡的方程：

$$\ddot{x}+\mu(x^2-1)\dot{x}+x=0 \quad (\mu\neq 0). \tag{3}$$

在化为相平面上的等价方程组以后，他用图解法证明了孤立闭轨线的存在性，并且又用当时在理论上还没有严格数学基础的平均

1) 五十年代以后情况有所改变，近年来有兴趣的人更多了。

法(van der Pol 方法)得到当$|\mu|$很小时闭轨线的近似方程. 显然,他是不熟悉 Poincaré 与 Dulac 等关于极限环的工作的. 三年以后, 苏联理论物理学家 A. A. Андронов 发表了一篇简短的论文[8],阐明 van der Pol 方程的孤立闭轨线就是 Poincaré 所早已研究过的极限环. 这样一来, 他就把纯粹数学理论和无线电技术密切联系起来了. 自此以后, 苏联的莫斯科学派和高尔基城学派就开始对无线电技术与极限环理论开展了大量的研究工作. 就数学理论方面来说,他们主要是研究极限环的存在性, 唯一性, 稳定性以及如何产生, 如何消失的问题. 他们大部分较重要而基本的工作可以在 A. A. Андронов, A. A. Витт 和 C. Э. Хайкин 合著的《振动理论》一书中找到. 尽管非线性振动方程除了不显含时间变数的定常系统(或自治系统)以外,还有含时间变数的非定常系统,但是 Андронов 等的著作所研究的方程则全部属于定常系统. 因此我们可以说, 这是一本专门研究极限环的数学理论及其在物理学上的应用的书,自然,它的重点是在应用方面.

至于其他国家, 在 van der Pol 以后对于极限环理论的研究,除了法国工程师 A. Liénard, 几何学家 É. Cartan 与 H. Cartan 的少数工作出现得较早以外[9,10], 一般都在 1940 年以后. 其中工作较有成绩的如 N. Levinson, G. F. D. Duff, S. P. Diliberto, G. Sansone, R. Canti, M. Urabe, 等等.

就我国来说, 我们自 1957 年开始(见 [11, 12], [13], [14], [15], [16], [17], [18]) 已对于右方为二次多项式的方程的极限环问题进行了深入而有系统的研究(在这以前的数年里,国内学者对于极限环的存在性,稳定性,唯一性等方面已有了一些工作). 研究的主要问题大致有三个:

1. 方程(1)当 $n=2$ 时的极限环的相对位置.

2. 方程(1)当 $n=2, 3$ 时的二次代数曲线环.

3. 研究已给的方程(1) ($n=2$) 的极限环的个数与轨线的全局

结构.

前两个问题原来认为已经彻底解决，但由于Петровский与Ландис的猜想已被证明是错误的[19,20]，从而第一个问题距离彻底解决还相差很远. 后一问题尚在继续进行中. 至于在国外，除了Н. Н. Баутин 1952年的著名的工作[21]以外，我们发现自从1960年以后苏联白俄罗斯国立大学有一个讨论班也在对上述第三个问题进行研究，迄今已发表论文数十篇.

纵观国际上现有一切关于极限环的研究成果和学术动向，我们的看法是：虽然在微分方程定性理论中极限环问题具有头等的重要性，但微分方程工作者对它的重视程度还是不够的. 这表现在：迄今为止还未有过一本关于极限环的纯数学理论的专著，甚至以此为主题的综合性报告在国外文献中也未见到过，在国内也只有作者1962年写过一篇[22]. 另一方面，工程学界和物理学界对此问题虽然仍颇感兴趣，但却未得到数学家的大力支持(近年的情况有所改善). 已有的结果也嫌零碎而少系统.

本书的目的就是要想总结过去数十年来国内外有关极限环理论的重要成果，把它介绍给初学的人，同时亦兼顾这一理论与定性理论其他方面的联系.

本书除在正文中详细讲述较重要而基本的东西以外，还在每一节最后附带简要地介绍一些较次要或较深入的结果；并且配备适量的习题，以便初学者能更好地掌握该节的内容和方法.

§1. 基本概念, 具体例子, 判别极限环存在与不存在的若干准则

已给微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=P(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=Q(x, y), \tag{1·1}$$

其中 x, y, t 为实变量, P, Q 为 x, y 的连续单值实函数, 且能保证解的唯一性.

定义 1·1 若方程(1·1)的解 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 是 t 的非常数的周期函数, 则称此解在 (x, y) 相平面上的轨迹为(1·1)的闭轨线. 由若干奇点以及两端进入奇点的轨线所构成的单闭曲线称为方程(1·1)的奇闭轨线.

定义 1·2 如果在方程(1·1)的闭轨线 Γ 的任意小的外(内)邻域中都存在非闭轨线, 则称 Γ 为外侧(内侧)极限环.

定义 1·3 如果 Γ 是(1·1)的闭轨线, 且存在 Γ 的一个外(内)邻域, 它全部由闭轨线所充满, 则称 Γ 为外(内)侧周期环.

注意: 奇闭轨线也可能满足定义 1·2 或定义 1·3 的要求, 但不称为极限环或周期环. 在§3 中将要遇到的分界线环就是一种奇闭轨线, 它的内侧可以满足定义 1·2 或定义 1·3 的要求.

根据 Poincaré-Beudixson 理论知道成立下面几条定理(定理 1·1～1·6), 证明从略.

定理 1·1 若 Γ 是(1·1)的闭轨线, 则存在 Γ 的足够小的邻域 U, 使得

1° U 中不含奇点;

2° 过 Γ 上任何一点 P 的法线段, 其位于 U 内部且包含点 P

的那一部分是截线，就是说，一切与它相遇的轨线都不和它相切，而且当 t 增加时都从同一个方向穿过它；

3° U 中任一闭轨线与 Γ 上任一点 P 的截线 l 必相交且只相交于一点，U 中任一非闭轨线 γ 与 l 交于无数个点，它们都在 Γ 的同一侧，且在 l 上的排列次序与其在 γ 上的排列次序是一样的．

由此定理可以看出，当闭轨线 Γ 是内(外)侧极限环或周期环时，位于 Γ 内(外)邻域中的非闭轨线只可能是一端无限盘近 Γ 的螺线，位于 Γ 内(外)邻域中的闭轨线只能是整个包含在 Γ 内部(或是 Γ 整个包含在它内部)的闭轨线．

定理 1·2　闭轨线 Γ 或为外(内)侧极限环，或为外(内)侧周期环．

在前一情况又可分为三种不同的情况：

1．存在 Γ 的足够小的外(内)邻域，使其中一切轨线皆为非闭，且以 Γ 为 ω 极限集，这时称 Γ 为外(内)稳定环；

2．存在 Γ 的足够小的外(内)邻域，使其中一切轨线皆为非闭，且以 Γ 为 α 极限集，这时称 Γ 为外(内)不稳定环；

3．在 Γ 的任意小的外(内)邻域中，既存在闭轨线亦存在非闭轨线，这时称 Γ 为外(内)复合极限环．

定义 1·4　称 Γ 为稳定极限环，不稳定极限环或周期环，如果在它的内外两侧同时满足定理 1·2 所指出的相应的条件；称 Γ 为半稳定极限环，如果它是外(内)侧稳定而内(外)侧不稳定的；称 Γ 为复合极限环，如果它不属于上述四类之中．

由轨道稳定性的定义易见成立：

定理 1·3　外(内)侧复合极限环与周期环是轨道外(内)稳定的，外(内)侧稳定极限环是外(内)侧轨道渐近稳定的，外(内)侧不稳定极限环是外(内)侧负向轨道渐近稳定的．

其次，下面两个定理也是熟知的：

定理 1·4　如果闭轨线 Γ_1 与 Γ_2 一起围成一个环域 G，G 中

无奇点亦无其他闭轨线，则 G 中一切轨线都以 Γ_1 为 ω 极限集，以 Γ_2 为 α 极限集，或是反之. 换言之，两条相邻的闭轨线（在上述条件之下）在其相邻的两侧必具不同的稳定性.

定理 1·5 若方程(1·1)中的 P, Q 是 x, y 的解析函数，则闭轨线 Γ 不可能是复合极限环. 由此可知这时由周期环所充满的区域的内外境界上必含奇点(可能是无限远奇点).

定义 1·5 闭轨线 Γ 称为正(负)定向的，如果当 t 增加时 Γ 上的动点沿着 Γ 以逆时针(顺时针)方向运动.

显而易见，位于一系周期环中的闭轨线都有相同的定向. 但应注意，相邻两极限环却可能有不同的定向.

例 1 考虑方程组

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{dr}{dt}=(r-1)(r-3), & \\ \dfrac{d\varphi}{dt}=(r-1)(r-2)(r-3)\sec|r-2|\dfrac{\pi}{2}, & \text{当}\quad 1<r<3; \\ \dfrac{dr}{dt}=0,\quad \dfrac{d\varphi}{dt}=-\dfrac{4}{\pi},\quad \text{当}\quad r\geqslant 3; & \\ \dfrac{dr}{dt}=0,\quad \dfrac{d\varphi}{dt}=\dfrac{4}{\pi},\quad \text{当}\quad r\leqslant 1. & \end{array}\right\} \tag{1·2}$$

易见此方程组的轨线是：1) 半径大于或等于 3 的圆，负定向；2)半径小于或等于 1 的圆，正定向；3)在环域 $1<r<3$ 中充满着非闭轨线，沿着每一条非闭轨线，当 $r>2$ 时有 $\dfrac{d\varphi}{dt}<0$，当 $r=2$ 时有 $\dfrac{d\varphi}{dt}=0$，当 $r<2$ 时有 $\dfrac{d\varphi}{dt}>0$.

由此可见 $r=1$ 与 $r=3$ 是相邻单侧极限环，前者是正定向外稳定环，后者是负定向内不稳定环.

现在让我们转到判别极限环存在与不存在的准则以及两个重要的具体例子.

定理 1·6 若有界闭区域 Ω 中最多含有限个奇点，且包含一

条正半轨线 γ, 则 γ 的 ω 极限集只可能是: 1)唯一的奇点; 2)唯一的闭轨线; 3) 可数无限多条或有限条两端进入奇点的轨线以及这些奇点.

推论(Poincaré 的环域定理)　若 Ω 为一环域, 其中不含奇点, 凡与 Ω 的境界线相交的轨线都从它的外(内)部进入(跑出)它的内(外)部, 则 Ω 中至少存在一条包含内境界线在其内部的外稳定(不稳定)极限环和一条内稳定(不稳定)极限环. 这两条单侧极限环可能都是双侧环, 也可能重合成为一条稳定(不稳定)极限环[1].

注意: 若 Ω 的内境界缩为一个负向(正向)渐近稳定奇点, 或是内外境界线有一部分成为方程(1·1)的轨线弧, 其上可能有一些鞍点和负向(正向)渐近稳定奇点, 则上述推论仍能成立.

例 2　与绪论中所说的 van der Pol 方程等价的方程组

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-x+\mu(1-x^2)y, \tag{1·3}$$

对于一切 $\mu>0(<0)$ 有稳定(不稳定)极限环[2].

【证】　显见当 $\mu>0$ 时(1·3)的唯一奇点(0, 0)是负向渐近稳定奇点, 因此要证明存在极限环, 只要作出一条包含原点在其内部的单闭曲线 L, 使当(1·3)的轨线与 L 相交时都从外部进入内部.

首先画出等倾线

$$Q(x,\ y)=-x+\mu(1-x^2)y=0 \tag{1·4}$$

的图形, 它有三个分支和三条渐近线:

$$y=0,\quad x=\pm1.$$

今在负 y 轴上取一点 $A(0,\ -y_0)$, 过 A 作方程

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=\mu(1-x^2)y \tag{1·5}$$

---

1) 以后在大多数情况下往往都只得到唯一的稳定环, 并且往往是单重环(定义见§2), 而不是由两个极限环靠近、重合而得的多重环.

2) $\mu<0$ 的情况可借改变 x, t 的符号而变为 $\mu>0$ 的情况, 以下只就 $\mu>0$ 来论证.

的轨线，与直线 $x=-1$ 交于 $B(-1,\ -y_1)$，易见 $y_1=\frac{2}{3}\mu+y_0$. 注意沿着 $\widehat{AB}$ 有

$$\frac{-x+\mu(1-x^2)y}{y}-\frac{\mu(1-x^2)y}{y}=-\frac{x}{y}<0,$$

所以(1·3)的轨线与 $\widehat{AB}$ 相交时都是从右向左地穿过它（如图1·1中的小箭头所示）.

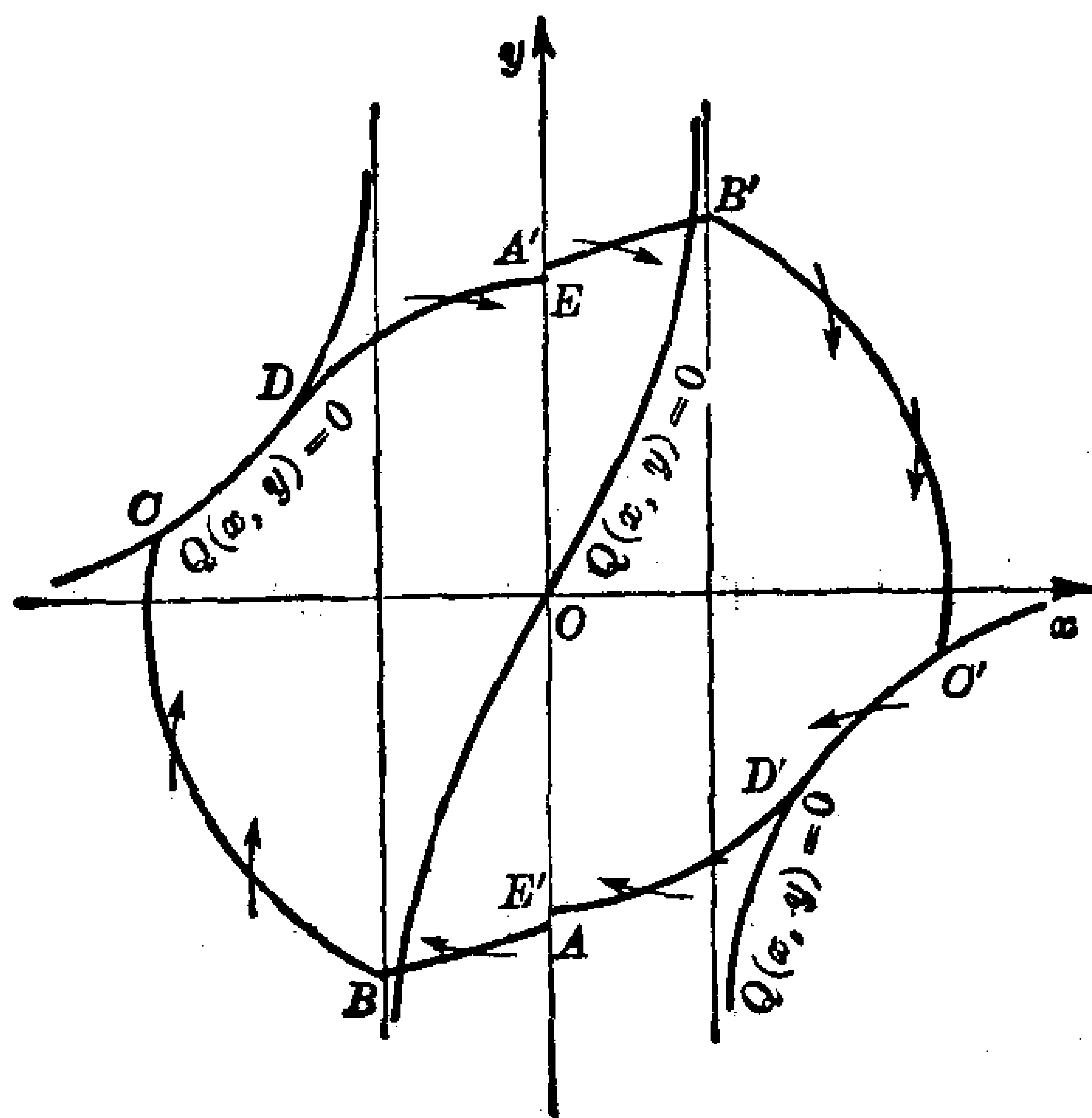


图 1·1

其次，过 B 作以原点为中心的圆弧，设它交负 x 轴以后再交曲线(1·4)的位于第二象限的那一支于 C（只要圆弧的半径足够大，交点总是存在的）. 注意，沿着 $\widehat{BC}$ 有

$$\frac{-x+\mu(1-x^2)y}{y}+\frac{x}{y}=\mu(1-x^2)<0,$$

可知(1·3)的轨线与 $\widehat{BC}$ 相交时都是从它的左方穿到右方去.

现在研究方程

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-x+\mu y \tag{1·6}$$

的轨线与曲线(1·4)的切点 $D(x_2, y_2)$，可以容易地证明 x_2 应满足方程

$$1+(1-\mu^2)x^2+2\mu^2x^4-\mu^2x^6=0,$$

当 $|x|=1$ 时上式左边为正，而当 $|x|$ 足够大时上式左边为负，因此曲线(1·4)的位于第二(及第四)象限的那一分支上必定存在唯一的切点 D. 当 y_0 足够大时可使 C 位于 D 的左边.

现在过 D 作方程(1·6)的轨线，与正 y 轴(一定)交于一点 E. 注意

$$\frac{-x+\mu(1-x^2)y}{y}-\frac{-x+\mu y}{y}=-\mu x^2<0,$$

可知(1·3)的轨线与 $\overset{\frown}{DE}$ 相交时(两者都有正的斜率)都是从左到右地穿过它. 此外，(1·3)的轨线与(1·4)的 $\overset{\frown}{CD}$ 弧相交时都是从左到右穿过它.

由于 $\overset{\frown}{DE}$ 是固定的，而 y_0 可以取得任意大，故可设 A 关于 O 的对称点 A' 位于 E 的上方. 这时，(1·3)的轨线与直线段 $\overline{EA'}$ 相交时都是从左穿到右. 由于方程(1·3)，(1·5)，(1·6)所确定的向量场以及曲线(1·4)都对称于原点 O，所以曲线 $\overset{\frown}{ABCDEA'}$ 关于原点的对称线 $\overset{\frown}{A'B'C'D'E'A}$ 也有和它类似的性质. 这样，把这两曲线弧合在一起就构成我们所需要的环域的外境界线. 由于(1·3)是解析系统，可知由定理 1·6 的推论所肯定的两条单侧极限环如果不重合的话，则其中至少有一条应是稳定极限环. 事实上，第 6 节中将要证明(1·3)有唯一的稳定极限环.

注意：当 $\mu\geqslant 2$ 时原点是(1·3)的不稳定结点，可知位于极限环内部的奇点不一定是焦点. 此外，当 μ 更大时，例如 $\mu>10$，极限环也可以不是凸闭曲线.

定理 1·7(对称原理) 设在方程(1·1)中有

$$P(x, y)=P(-x, y),\ Q(-x, y)=-Q(x, y), \qquad (1·7)$$

又原点是 y 轴上的唯一奇点. 若轨线 Γ 从正 y 轴出发后又回到负 y 轴，则 Γ 是闭轨线. 如果原点附近的一切轨线都具有此性质，则原点是中心点.

【证】 因为这时方程(1·1)所确定的向量场对称于 y 轴，所以 Γ 和它关于 y 轴的对称线(也是轨线)一起构成一条单闭曲线. 又此单闭曲线与 y 轴的两个交点是常点，因此它是闭轨线.

注意：若将条件(1·7)改为

$$P(x,\ -y)=-P(x,\ y),\quad Q(x,\ -y)=Q(x,\ y) \qquad (1\cdot 8)$$

并改设原点是 x 轴上的唯一奇点，则有和定理 1·7 类似的结论. 但应注意条件

$$P(-x,\ y)=-P(x,\ y),\quad Q(-x,\ y)=Q(x,\ y)$$

将导致 $P(0,\ y)=-P(0,\ y)=0$，即 y 轴是轨线，因而这时即使 Γ 从正 y 轴出发后又能回到负 y 轴，它也只能是奇闭轨线. 同样，条件

$$P(x,\ -y)=P(x,\ y),\quad Q(x,\ -y)=-Q(x,\ y)$$

也是不适用的.

定理 1·8 设原点是 y 轴上的唯一奇点，一切从正 y 轴出发的轨线绕原点一周后重又回到正 y 轴，则由轨线确定的正 y 轴到它自己的拓扑映象的不动点位于闭轨线上(显而易见).

推论 若轨线所确定的映象把正 y 轴上某一不含原点的闭区间映到它自己里面去，则方程必存在闭轨线.

【证】 由拓扑学中的 Brouwer 不动点定理可知此映象必有不动点存在，且此不动点不是原点.

定理 1·8 及其推论对于研究非线性振动理论中常常出现的分区线性方程的极限环很有用处，因为这时定理中所说的拓扑映象是可以用分析式子表示出来的(见 §6). 此定理对于研究右方为不连续的系统的极限环也是有用处的，因为它只要求通过正 y 轴上

的每一点有唯一的轨线就够了[1]．

例 3 考虑钟摆的摆动[2]．为了简化，假设钟摆的质量集中于摆锤的重心，并且只考虑支点处的干摩擦所产生的常数阻尼而忽略空气阻力(线性阻尼)．那末摆动方程是

$$\ddot{x}+x=-f_0 \text{ 当 } \dot{x}>0; \quad \ddot{x}+x=f_0 \text{ 当 } \dot{x}<0, \tag{1·9}$$

这里 x 表示角位移，并算作 $\frac{g}{l}=1$．化(1·9)为等价的方程组，易见在 $(x,\ y=\dot{x})$ 上半平面中的轨线是以 $O''(-f_0,\ 0)$ 为中心的圆弧，而在下半平面中的轨线是以 $O'(f_0,\ 0)$ 为中心的圆弧；轨线上顺时针的方向是 t 增加的方向．x 轴上的线段 $(-f_0,\ f_0)$ 中的每一点都是奇点，即对应于平衡位置；因为这时恢复力小于摩擦力，并且 $\dot{x}=0$，故运动应停止．由此可见如果没有发条供给钟摆以能量，则摆动有限次以后就归于静止，其轨线图如图 1·2 所示．

发条供给能量的方式是：当摆锤到达最低点 $(x=0)$ 时，发条就

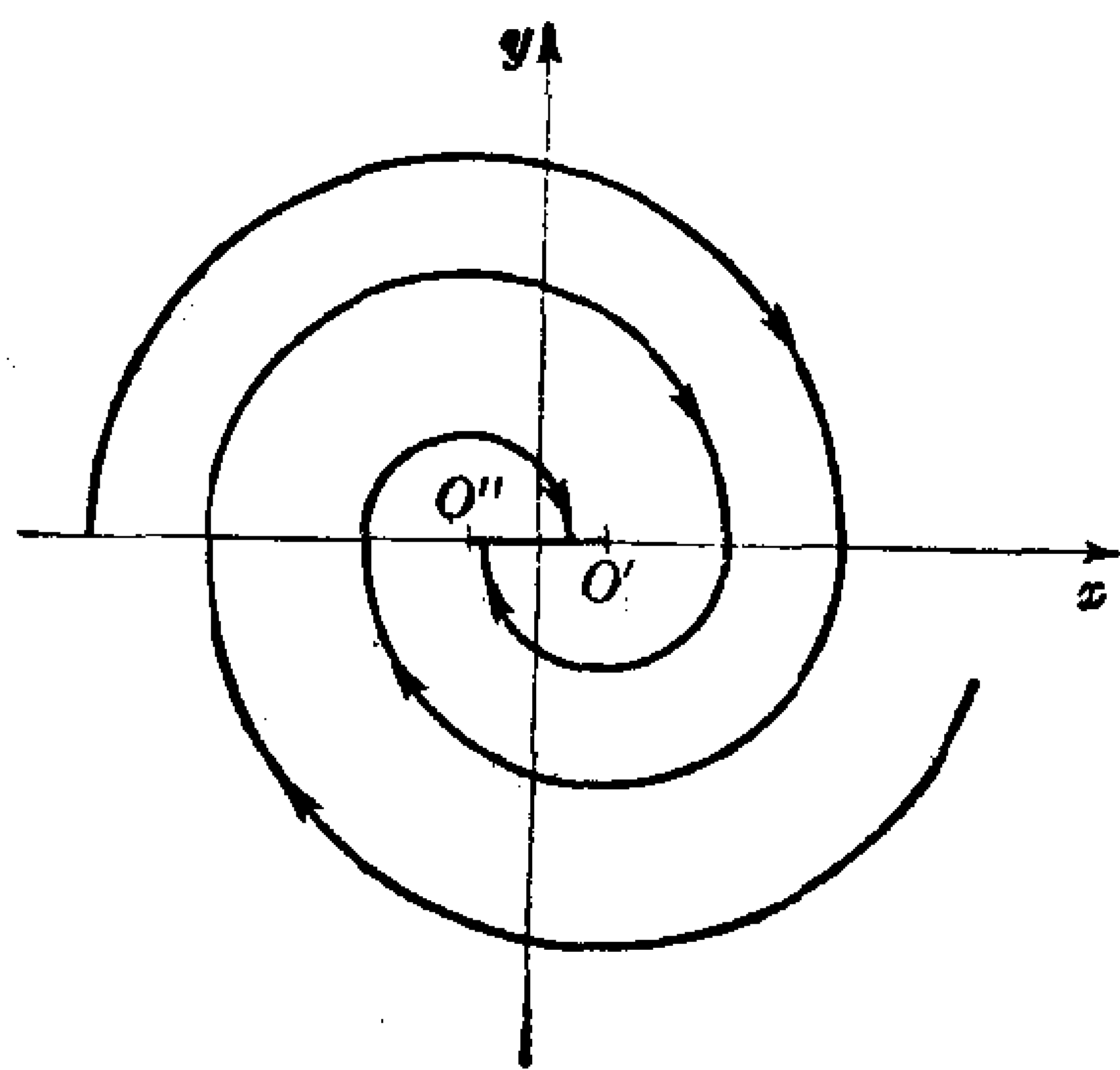


图 1·2

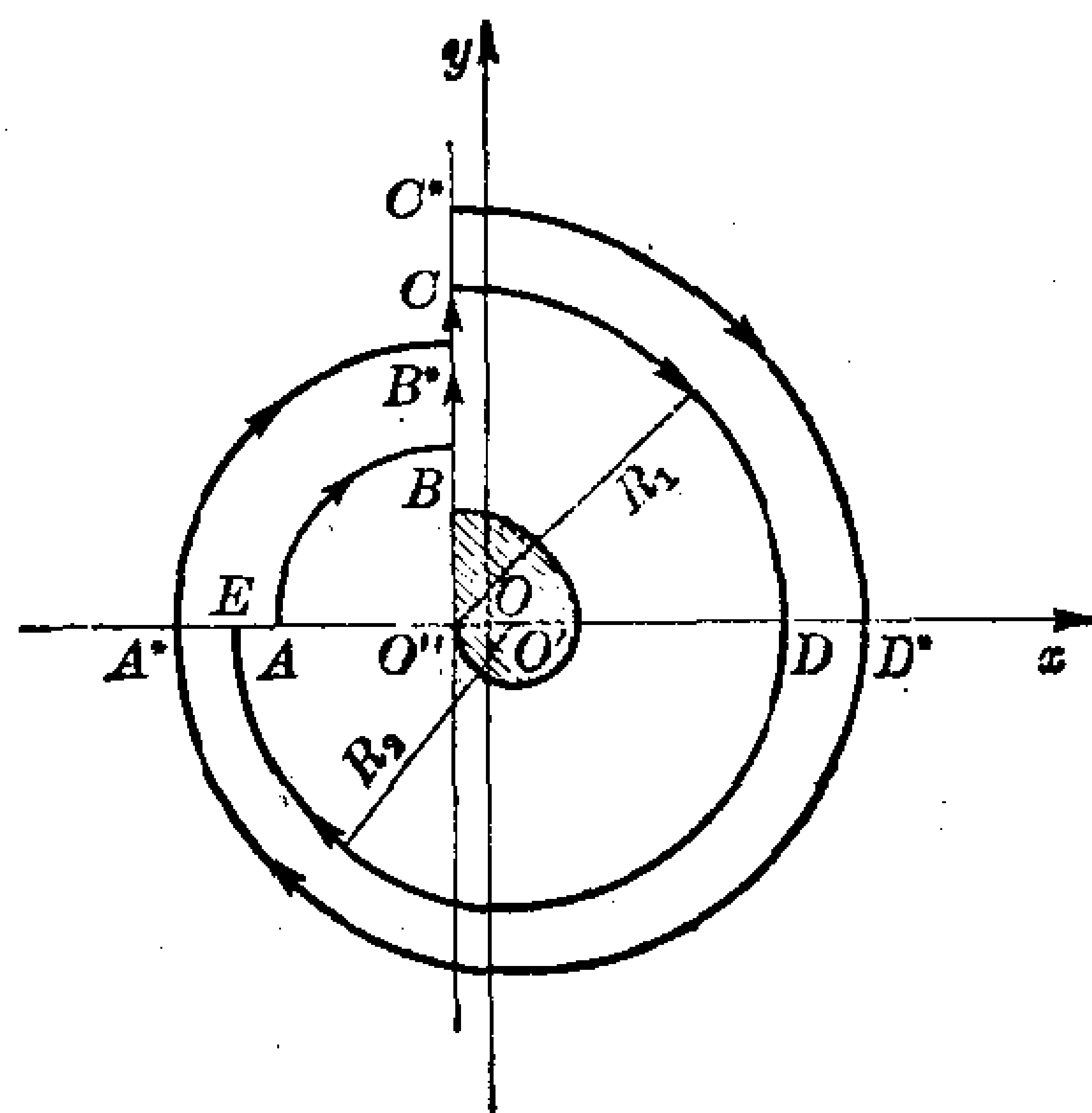


图 1·3

1) 不连续系统的极限环 Γ 可以这样定义：闭轨线 Γ 称为稳定极限环，如果存在 Γ 的一个邻域，使从其中任一点出发的轨线(可能与 Γ 相交)当 t 无限增大时能进入并永远保持在 Γ 的任何小邻域之中．

2) 本例采自绪论中所说的《振动理论》第三章 §5．

通过擒纵机构推它一下，使之获得定值的能量．为了计算简单起见，下面假设推动是在 $x=-f_0$, $y>0$ 时发生的．这样，在相平面上就有如图 1·3 中 $\widehat{ABCDE}$ 所示的运动路线，其中 $\widehat{AB}$ 是以 $O''(-f_0, 0)$ 为中心而半径等于 R_0 的圆弧，$\overline{BC}=R_1-R_0$，而 $R_1^2-R_0^2=h^2=$ 常数．$\widehat{CD}$ 是以 O'' 为中心、半径等于 R_1 的圆弧，$\widehat{DE}$ 是以 $O'(f_0, 0)$ 为中心、半径等于 $R_2=R_1-2f_0$ 的圆弧．设 A, E 的坐标分别为 $(-x_0, 0)$ 与 $(-x_1, 0)$，那末容易算出 x_0 与 x_1 之间的关系式：

$$(x_1+3f_0)^2-(x_0-f_0)^2=h^2. \tag{1·10}$$

这就是运动的轨线所确定的，负 x 轴到它自己的拓扑映象．这映象的不动点 $x_1^*=x_0^*$ 由方程

$$(x_0^*+3f_0)^2-(x_0^*-f_0)^2=h^2 \tag{1·11}$$

来确定，亦即

$$x_0^*=\frac{h^2}{8f_0}-f_0. \tag{1·12}$$

我们当然应该假设 $x_0^*>f_0$，它相当于条件

$$h>4f_0. \tag{1·13}$$

当(1·13)满足时，不但闭轨线的唯一存在得以保证，而且也不难证明它是稳定极限环．事实上，由(1·11)可得

$$x_0^*=\sqrt{h^2+(x_0^*-f_0)^2}-3f_0, \tag{1·14}$$

故当 $f_0<x_0<x_0^*$ 时便有

$$x_0^*>x_1=\sqrt{h^2+(x_0-f_0)^2}-3f_0>x_0, \tag{1·15}$$

其中前一不等式由 (1·10) 与 (1·14) 立刻看出，后一不等式由 (1·11) 容易推出．同样，当 $x_0>x_0^*$ 时有

$$x_0^*<x_1<x_0. \tag{1·16}$$

不等式(1·15)与(1·16)表示：当 $A\neq A^*$ 时 E 应介于 A 与 A^* 之间，但 x_0^* 的值由(1·12)唯一确定，故当 t 无限增大时一切运动都应趋向于过 A^* 的闭轨线．

最后介绍几个判别闭轨线不存在的法则.

定理 1·9(Poincaré 切性曲线法) 设 $F(x, y)=C$ 为一曲线族,其中 $F(x, y)$ 为一次连续可微. 如果在区域 G 中有

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}=P\frac{\partial F}{\partial x}+Q\frac{\partial F}{\partial y}$$

(表示函数 F 沿着方程(1·1)的轨线关于 t 的变化率)保持常号,且曲线

$$P\frac{\partial F}{\partial x}+Q\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

(表示族中的曲线与(1·1)的轨线相切之点的轨迹,称为切性曲线)不含方程(1·1)的整条轨线或不含闭分支,则方程(1·1)不存在全部位于 G 中的闭轨线与只含一个奇点的奇闭轨线.

【证】 设定理不成立,则方程(1·1)有全部位于 G 中的闭轨线或只含一个奇点的奇闭轨线 Γ. 今将 $P\frac{\partial F}{\partial x}+Q\frac{\partial F}{\partial y}$ 沿着 Γ 按 t 增加的方向积分一周,得到

$$\oint_\Gamma\left(P\frac{\partial F}{\partial x}+Q\frac{\partial F}{\partial y}\right)dt=\oint_\Gamma\frac{dF}{dt}dt.$$

由函数 F 的单值性可知上式右边应等于零,但另一方面,等式左边的被积函数在 Γ 上保持常号且不恒等于零,又沿着 Γ, t 单调增加,故其值应异于零,矛盾.

定理 1·10(Bendixson) 若在单连通域 G 中方程(1·1)的发散量 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$ 保持常号,且不在 G 的任何子区域中恒等于零,则方程(1·1)不存在全部位于 G 中的闭轨线与奇闭轨线(这里假设 P, Q 有连续偏微商).

【证】 设定理不成立,方程(1·1)有闭轨线 Γ, Γ 连同它的内部区域 S 一起全部位于 G 中,因为 G 是单连通的. 于是由 Green 公式有

$$\oint_{\Gamma} P\,dy - Q\,dx = \iint_{S} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{1·17}$$

但是沿着 Γ 处处成立 $P\,dy = Q\,dx$, 故上式左边等于零; 而右边的被积函数在 S 中保持常号且不恒等于零,故二重积分不等于零,矛盾.

当 Γ 为奇闭轨线时,由于在奇点处 $\frac{dy}{dx}$ 没有确定的数值, 从而 Γ 的切线方向可能在此点不连续, 上述论证就不够严密. 但只须略加修改, 仍可证明定理成立. 为此, 不妨设 Γ 上只有一个奇点 O, 如图1·4. 以光滑弧 $\gamma = \widehat{AB}$ (虚线)代替 Γ 上包含 O 的一小段弧 $\widehat{AOB}$, 得到一条闭曲线 Γ'. 对 Γ' 及其内部 S' 应用 Green 公式, 得到

$$\oint_{\Gamma'} P\,dy - Q\,dx = \int_{\gamma} V^{*} \cdot ds$$
$$= \iint_{S'} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy, \tag{1·18}$$

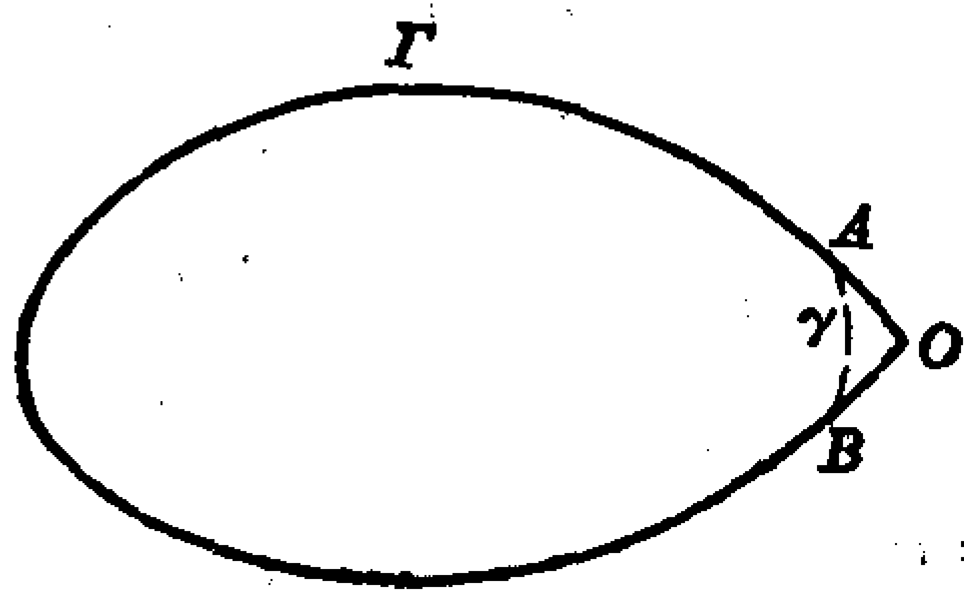


图 1·4

其中 V^{*} 表向量 $(-Q, P)$, ds 表 γ 的弧单元. 已知在点 O 有 $P = Q = 0$, 根据 P, Q 的连续性, 只要 γ 位于 O 的足够小的邻域内, 就可以使上式左边的绝对值小于任一小正数 ε. 至于右边的二重积分,则它的数值应与(1·17)右边的数值无限接近,因而其绝对值不可能小于 ε, 矛盾.

注意: 定理1·10的证明主要依赖于下一事实:

命题 在方程(1·1)的闭轨线或奇闭轨线 Γ 的内部区域 S 上有

$$\iint_{S} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy = 0. \tag{1·19}$$

读者也容易看出(1·19)式有明显的物理意义, 因为被积函数代表(1·1)所确定的向量场的发散量,

定理 1·11(Dulac) 若在单连通域 G 中存在一次连续可微函数 $B(x, y)$，使 $\frac{\partial}{\partial x}(BP)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ)$ 保持常号，且不在任何子区域中恒等于零，则方程(1·1)不存在全部位于 G 中的闭轨线与奇闭轨线.

【证】 只要在定理 1·10 的证明中用 BP 与 BQ 分别代替 P 与 Q 即可. 以后我们称 $B(x, y)$ 为Dulac 函数，称用定理 1·11 来证明不存在闭或奇闭轨线的方法为Dulac 函数法.

定理 1·10 与定理 1·11 可以推广到多连通域而成为

定理 1·12(Dulac) 若在定理 1·10 或 1·11 中改区域 G 为 n 连通(即 G 有一或几条外境界线，$n-1$ 条内境界线)，则方程(1·1)最多只能有 $n-1$ 条全部位于 G 中的闭轨线.

【证】 由定理 1·10 的证明可知，这时如果在 G 中有方程(1·1)的闭轨线 Γ，则 Γ 应至少包含 G 的一条内境界线 C 在其内部. 同理可知，若 Γ 内部还有其他闭轨线 $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_k$，则在 Γ 内部而位于一切 $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_k$ 外部的区域中，亦至少含有一条 G 的内境界线 C. 令 C 与 Γ 对应，可以看出，与不同的 Γ 对应的 C 也不同. 故若 G 中的闭轨线多于 $n-1$ 条，则 G 的连通数应大于 n，定理证毕.

关于判别闭轨线不存在的准则除了上述这些古典的结果以外，近代的还有 В. Ф. Ткачев 与 Вл. Ф. Ткачев [23]，Ю. С. Богданов [24]，陈广卿[25]，陈翔炎[26]，杨宗培[27]等的工作，下面介绍[26]的定理，它的概括性较强，并且有明显的几何意义[1)]:

定理 1·13 对方程(1·1)假设存在单连通域 G 以及一次连续可微函数 $M(x, y)$ 与 $N(x, y)$，使在 G 中有

$$E(x, y)=M(x, y)P(x, y)+N(x, y)Q(x, y)\geqslant 0, \quad (1\cdot 20)$$

1) [23]中的条件与定理 1·13 中的条件类似，但较强，且有两组条件是错误的. 两文的证明方法也不一样.

$$F(x,\ y)=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\geqslant 0\quad(\leqslant 0). \tag{1·21}$$

在此前提下，我们有

1° 如果

$$F(x,\ y)\neq 0\quad 在\ G\ 的任何子区域中, \tag{1·22}$$

那末(i)若

$$E(x,\ y)\equiv 0\quad 在\ G\ 内, \tag{1·23}$$

则方程(1·1)在 G 中不存在任何闭轨线和奇闭轨线；

(ii) 若

$$E(x,\ y)\neq 0\quad 在\ G\ 内, \tag{1·24}$$

则(1·1)在 G 中不存在正(负)定向的闭轨线和奇闭轨线.

2° 如果

$$F(x,\ y)\equiv 0\quad 在\ G\ 内, \tag{1·25}$$

则(1·1)不存在任何闭轨线和奇闭轨线，除非它整个包含在使 $E(x,\ y)=0$ 的点集中.

【证】 假设(1·1)存在正(负)定向的闭轨线 Γ，由 Green 公式有

$$\oint_\Gamma M dx+N dy=-\iint\limits_{\text{int}.\Gamma} F(x,\ y)dx\,dy. \tag{1·26}$$

在情况 1°，上式右端 $<0(>0)$. 另一方面，上式左端等于

$$+(-)\int_0^T E(x,\ y)dt, \tag{1·27}$$

其中 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 表示沿 Γ 的(1·1)的解，$T>0$ 是它的最小周期. 于是可知：当(1·23)成立时(1·26)的左端为零，故(1·26)不成立，即 Γ 不存在. 又当(1·24)成立时，(1·27)式 $\geqslant 0(\leqslant 0)$，(1·26)仍不成立.

对于奇闭轨线只要改 $\int_0^T$ 为 $\int_{-\infty}^{\infty}$ 即可.

情况 2° 的证明是类似的.

现在来说明定理 1·13 的几何意义. 与向量场 $(M,\ N)$ 正交

的向量场是$(-N, M)$，其对应的微分方程是

$$\frac{dx}{dt}=-N(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=M(x, y). \tag{1·28}$$

条件(1·20)表示：从向量场(P, Q)逆时针方向转到向量场$(-N, M)$(向量的长度可伸缩)所经过的角度$\theta(x, y)$满足$0\leqslant\theta(x, y)\leqslant\pi$. 条件(1·21)与(1·22)说明，(1·28)无闭轨线与奇闭轨线，且发散量保持常号为正(负). 这样，定理1·13(1°)表示：在上述条件下由$(-N, M)$顺时针方向转动角度$\theta(x, y)$而得到的(P, Q)当$\theta\equiv\pi$时不存在闭或奇闭轨线(显然)，当$\theta\not\equiv\pi$时不存在正(负)定向的闭或奇闭轨线[1)]. 定理1·13(2°)表示：当(1·28)有首次积分，或$Mdx+Ndy=0$为全微分方程时，(1·1)无闭轨线与奇闭轨线，除非该闭轨(或奇闭轨)线同时也是(1·28)的闭轨(或奇闭轨)线. 以上所说的在读者熟悉了§3将要介绍的旋转向量场的理论以后就会理解得更深刻了.

易见若在定理1·13中取$M=\frac{\partial U}{\partial x}$, $N=\frac{\partial U}{\partial y}$，便可推出定理1·9(改其中的$F(x, y)$为$U(x, y)$)；又若取$M=BQ$, $N=-BP$，便可推出定理1·12. 除此以外，还可以有如下的推论：

推论[25] 如果存在非负的C^1类函数$M_0(x, y)$, $N_0(x, y)$，以及C^1类函数$B(x, y)$，使在单连通区域G内有

$$\frac{\partial}{\partial y}(M_0P)-\frac{\partial}{\partial x}(N_0Q)+\frac{\partial}{\partial x}(BP)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ)\geqslant 0 \quad (\leqslant 0), \tag{1·29}$$

且使等号成立的点不充满G的任何子域，则方程(1·1)在G内不存在正(负)定向的极限环.

1) 但这时负(正)定向的闭轨线是可能存在的，例如，若$(M, N)=(y, -x)$，$(P,Q)=(M,N)$，则$\theta\equiv\frac{\pi}{2}$，$(P, Q)$有闭轨线族(负定向)$x^2+y^2=C$，$\mathrm{div}(-N, M)\equiv 2>0$.

【证】 取定理 1·13 中的 $M=M_0P+BQ$, $N=N_0Q-BP$. 即可.

最后注意：如果在定理 1·13 中有 $E(x, y)\equiv 0$, $F(x, y)\equiv 0$, 那末我们得不到任何有用的结论. 这时可证成立：

定理 1·14 如果方程(1·1)中的 P, Q 在单连通区域 G 中属于 C^1 类，且 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\equiv 0$, 即方程

$$P\,dy-Q\,dx=0 \tag{1·30}$$

是全微分方程，则(1·1)无极限环，即使是单侧极限环也没有.

【证】 设(1·30)的通积分为 $\Phi(x, y)=C$, 它代表(1·1)的轨线族的方程，沿着每一条轨线 Φ 取常数值，而沿着不同的但互相邻近的轨线，Φ 不可能都取同一数值. 如果方程(1·1)存在极限环 Γ, 则 Γ 的足够小的邻域中的每一条轨线都以 Γ 为 ω 或 α 极限集，因此根据 $\Phi(x, y)$ 的连续性可知在此邻域中应有 $\Phi(x, y)\equiv C_\Gamma$, 这不可能. 又如 Γ 为复合极限环，则在 Γ 的任何小邻域中都有非闭轨线，它们遮盖了 Γ 附近的一些开环域，在其中 $\Phi(x, y)$ 应恒等于常数，不可能.

仿此可证：若方程(1·30)在某单连通区域中存在连续的积分因子 $\mu(x, y)$, 则方程(1·1)在此区域中不存在极限环，焦点和结点. 反过来，如果(1·1)存在极限环，焦点或结点，则(1·30)的积分因子必非连续.

例 4

$$\frac{dy}{dt}=y,\quad \frac{dx}{dt}=x$$

以(0, 0)为结点，此时方程 $xdy-ydx=0$ 以 $\frac{1}{x^2}$ 或 $\frac{1}{x^2+y^2}$ 为积分因子，它们在 $x=0$ 或 $x=y=0$ 不连续.

例 5

$$\frac{dx}{dt}=-y+x(x^2+y^2-1),\qquad \frac{dy}{dt}=x+y(x^2+y^2-1) \tag{1·31}$$

有极限环 $x^2+y^2=1$，此时方程

$$[-y+x(x^2+y^2-1)]dy-[x+y(x^2+y^2-1)]dx=0$$

有积分因子

$$\mu(x,\ y)=\frac{2}{(x^2+y^2)^2}\exp\left\{-2\tan^{-1}\frac{y}{x}\right\} \tag{1·32}$$

和通积分

$$U(x,\ y)=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2}\exp\left\{-2\tan^{-1}\frac{y}{x}\right\}=C, \tag{1·33}$$

μ 和 U 都在 $(0,\ 0)$ 不连续，亦即它们在任何包含 $x^2+y^2=1$ 的单连通域中必有不连续点.

从定理1·10开始，由于要应用 Green 公式，必须假设 $P(x,y)$，$Q(x,\ y)$ 在区域 G 中有连续偏导数、Н. П. Еругин[28]首先指出，如果把 Green 公式改写为

$$\oint_{\Gamma} P(x,\ y)dy-Q(x,\ y)dx=\iint_{S} d_xP(x,\ y)dy+d_yQ(x,\ y)dx, \tag{1·34}$$

其中右端的二重积分是 Stieltjes 积分，它被理解为

$$\sum[\Delta_xP(x,\ y)\Delta y+\Delta_yQ(x,\ y)\Delta x]$$

的极限，则对 P, Q 的要求就可以保持原状而不必加强. Н. Н. Красовский[29]曾利用上述改写后的 Green 公式研究某些非线性二阶方程的零解的全局稳定性，在该文中也把定理1·10推广到 P, Q 不一定有偏导数的情况去.

例 6 证明：如果在方程

$$\frac{dx}{dt}=f_1(x)+f_2(y),\quad \frac{dy}{dt}=ax+by \tag{1·35}$$

中 $f_1(0)=f_2(0)=0$，$f_1(x)$，$f_2(y)$ 为连续非线性函数，$a\neq 0$，又 $\varphi(x)=f_1(x)+bx$ 是 x 的单调函数，则此方程不存在闭轨线.

【证】 作变换 $x_1=-ax-by$，$y_1=y$，则原方程变为

$$\frac{dx_1}{dt}=-a[f_1(x)+f_2(y)]+bx_1,\ \frac{dy_1}{dt}=-x_1,$$

假设存在闭轨线 Γ. 对它应用公式(1·34)，得到

$$0=\oint_{\Gamma}[-a(f_1(x)+f_2(y))+b_1x_1]dy_1+x_1dx_1$$

$$=\iint_{S} d_{x_1}[-a(f_1(x)+f_2(y))+bx_1]dy_1-d_{y_1}x_1dx_1$$

$$= -a\iint_S d_{x_1}\varphi\left(-\frac{by_1+x_1}{a}\right)dy_1,$$

这是个矛盾，因为按假设上式最右边应不等于零.

此外，Н. Н. Красовский[30]还得到如下的定理:

定理1·15 设方程(1·1)中的P, Q有连续偏导数，原点是(1·1)的唯一奇点，λ的二次方程

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}-\lambda & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

的根$\lambda_1(x, y)$, $\lambda_2(x, y)$在原点有正实部，在圆$x^2+y^2=R^2$之外有负实部，且

$$\int^{\infty} m(r)dr=\infty, \quad 其中 \quad m(r)=\min_{x^2+y^2=r^2}\sqrt{P^2+Q^2},$$

则方程(1·1)至少存在一条外稳定环和一条内稳定环，它们可能重合为一条稳定环.

这个定理不但本身很有趣，而且作者在证明中还用到了方程(1·1)的正交轨线的方程，这在平面定性理论中还是少见的.

读者注意：如果要把Poincaré的环域定理推广到平面多连通区域去，就非得要考虑该区域中含有奇点的情况不可，因为按照熟知的指标理论，如果n连通域Γ的内外境界线满足上述定理的条件，则Γ内部奇点的指标总和为$1-n$，故当$n>1$时Γ中必定存在奇点. 叶彦谦，马知恩[31]推广了定义1·1中的奇闭轨线的概念以及通常的奇点概念，然后把环域定理推广到环域中含奇点以及一般的n连通域的情况去. 余澍祥[32]应用[31]的结果研究二维流形上有奇点的动力系统的闭轨线的存在性，推广并改良了R. J. Sacker与G. R. Sell[33]的结果. [32]中还给[31]的定理以新的证明. 此外，董镇喜[34]又推广[31]的定理到一般的二维流形上去.

考虑例1中的方程的极限环问题在环面上的推广是饶有兴趣的. 田景黄[35]证明环面上的van der Pol方程:

$$\frac{dx}{dt}=-\sin y+\mu\sin 3x, \quad \frac{dy}{dt}=\sin x$$
$$(0\leqslant x\leqslant 2\pi, \ 0\leqslant y\leqslant 2\pi),$$

当$0<|\mu|\ll 1$时此方程至少存在两个极限环，它们当$\mu\to 0$时趋于相应的方程的不同的非零周期解. 类似于此，田景黄、高隆昌[36]证明方程

$$\frac{dx}{dt}=-\sin y+\mu\sin 2x, \quad \frac{dy}{dt}=\sin x \quad (0\leqslant x\leqslant 2\pi, \ 0\leqslant y\leqslant 2\pi)$$

当 $0<|\mu|\ll 1$ 时至少存在一个极限环. 但在上述两文中唯二性和唯一性都未能证明.

习 题

1. 证明方程

$$\frac{dx}{dt}=xy,\quad \frac{dy}{dt}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3y^2$$

当 $a_0>0$, $a_2<0$ 时有两个中心.

2. 证明方程

$$\frac{dx}{dt}=x(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)-y(x^2+y^2-2x-8),$$

$$\frac{dy}{dt}=y(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)+x(x^2+y^2-2x-8)$$

有唯一的(稳定)极限环.

3. 计算方程(1·1)的正交轨线的曲率 $H(x, y)$, 并证明它等于

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}}\right).$$

由此证明: 若方程(1·1)有闭轨线 Γ, 则[37]:

$$\iint\limits_{int.\Gamma} H(x, y)dx\,dy=0.$$

4. 设 G 为单连通域, 若存在一次连续可微函数 $B_1(x, y)$ 与 $F(x, y)$, 使

$$\frac{\partial}{\partial x}(B_1P)+\frac{\partial}{\partial y}(B_1Q)+B_1\left[P\frac{\partial F}{\partial x}+Q\frac{\partial F}{\partial y}\right]$$

在 G 中保持常号, 且不在任何子区域中恒等于零, 则方程(1·1)不存在全部位于 G 中的闭轨线与奇闭轨线[23].

(提示: 在定理 1·11 中取 $B(x, y)=B_1(x,y)e^{F(x,y)}$.)

5. 设 G 为单连通域, 若存在一次连续可微函数 $M(x, y)$, $N(x, y)$, $F(x, y)$ 和 $B(x, y)$, 满足

$$M(x, y)\geqslant 0, N(x, y)\geqslant 0,\quad MP^2+2FPQ+NQ^2\geqslant 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(MP)-\frac{\partial}{\partial x}(NQ)+\frac{\partial}{\partial x}[P(B+F)]+\frac{\partial}{\partial y}[Q(B-F)]\geqslant 0\quad(\leqslant 0),$$

且使上式成立等号的点不充满 G 内任何子域, 则(1·1)不存在正(负)定向的闭或奇闭轨线[27].

6. 证明 van der Pol 方程等价于方程组

$$\frac{dz}{dt}=x,\quad \frac{dx}{dt}=-z+\mu\left(x-\frac{x^3}{3}\right),$$

并就此方程组仿例2的办法作出满足定理1·6的推论的环域.

7. 假设已证例2中的极限环 Γ 唯一存在，试证从平面上任一异于 $O(0, 0)$ 的点出发的轨线当 $t\to+\infty$ 时都将以 Γ 为 ω 极限集.

8. 设在区域 G 中处处成立 $|R|<\frac{h}{2}$，其中 $R(x, y)$ 是方程(1·1)的轨线在 (x, y) 点的曲率半径，h 是 G 中某一有界集 V 的直径，则在 G 中没有包含 V 在其内部的闭轨线[24].

9. 试用定理1·11以及形如 $B(x, y)=x^k y^h$ 的 Dulac 函数证明当

$$\sigma=b_1c(a_1-a)+ac_1(b-b_1)\neq 0$$

时方程组

$$\frac{dx}{dt}=x(ax+by+c),\qquad \frac{dy}{dt}=y(a_1x+b_1y+c_1)$$

没有闭轨线，而当 $\sigma=0$ 时方程存在首次积分而无极限环.

10. 设在方程组 $\frac{dx}{dt}=y-F(x)$，$\frac{dy}{dt}=-g(x)$ 中 $F(x)$ 是偶函数，$F(0)=0$，$g(x)$ 是奇函数，$xg(x)>0\ (x\neq 0)$，$g'(0)>0$，且 $F(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x=0$ 附近有连续二阶微商，则 $O(0, 0)$ 是中心点[38].

§2. 极限环的重次与稳定性

在§1中已经给方程

$$\frac{dx}{dt}=P(x,\ y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,\ y) \tag{2·1}$$

的极限环的稳定性下过定义．由于在应用上只有稳定极限环才有现实意义，因为它的足够近的每一螺线都可近似地代表不依赖于初始条件的等幅振荡；而不稳定极限环则象力学上的不稳定平衡位置那样，事实上是不存在的；因此如何判别极限环的稳定性就成为一个非常重要的问题了．

首先，如果极限环的存在是借点变换的不动点来肯定的，那末不论(2·1)右方的 P, Q 是否为连续，只要点变换本身是连续的，就可以在适当的条件下判别极限环是否为稳定，这就是在非线性振动理论中常用到的 Königs 定理．

定义 2·1 设 $\bar{s}=f(s)$ 表示某一线段 l 到它自己的一个连续点变换，s^* 是这个变换的一个不动点，即 $s^*=f(s^*)$．如果存在 s^* (在 l 上)的一个小邻域，使对其中任一点 s，点列

$$s_1=f(s),\ s_2=f(s_1),\ \cdots,\ s_{n+1}=f(s_n),\ \cdots$$

常收敛于 s^*，则称 s^* 在此点变换之下为稳定．反之，如果在 s^* 的任何小邻域中常可找到点 s，使上述点列不收敛于 s^*，则称 s^* 为不稳定[1]．

定理 2·1(Königs) 设 $\bar{s}=f(s)$ 是线段 l 到它自己的一个连续点变换，$s=0$ 是这变换的不动点．如果 $(s,\ \bar{s})$ 平面上的曲线 $\bar{s}=$

1) 注意，在此定义之下，当(2·1)右方为连续且保证解的唯一性时，不稳定的不动点，有可能对应于单侧复合极限环．

$f(s)$在原点附近的弧段位于角域

$$\left|\frac{\bar{s}}{s}\right|\leqslant 1-\varepsilon \quad (\geqslant 1+\varepsilon),\ \varepsilon>0 \tag{2·2}$$

中，则不动点 $s=0$ 是稳定(不稳定)的.

【证】 设 $$\left|\frac{\bar{s}}{s}\right|\leqslant 1-\varepsilon=\delta<1$$

在原点附近，即存在 $s=0$ 的一个小邻域 $|s|\leqslant\eta$，对其中一切的 $s\neq 0$ 都有 $|\bar{s}|\leqslant\delta|s|<|s|$，那末只要 $|s|\leqslant\eta$，数列 $|s|$，$|s_1|$，$|s_2|$，…，$|s_n|$，…将满足不等式 $|s_n|\leqslant|s|\delta^n$；所以当 $n\to\infty$ 时有 $|s_n|\to 0$，即 $s=0$ 是稳定的.

反之，如果对一切 $|s|\leqslant\eta$ 有

$$\left|\frac{\bar{s}}{s}\right|\geqslant 1+\varepsilon=\xi>1,$$

亦即 $|\bar{s}|\geqslant\xi|s|>|s|$，则显见任一点列 s，s_1，s_2，… 不可能收敛于零，故 $s=0$ 为不稳定.

推论 若函数 $\bar{s}=f(s)$ 在 $s=0$ 存在导数，则当

$$\left|\frac{d\bar{s}}{ds}\right|_{s=0}<1 \quad (>1) \tag{2·3}$$

时 $s=0$ 是稳定(不稳定)的.

由此可见，对于右方可能为不连续的系统，只要在闭轨线 Γ 的某一截线上存在满足条件(2·2)或(2·3)的点变换，并且在 Γ 的小邻域中方程的解随初始值连续变化，那末 Γ 便是稳定或不稳定的极限环.

例 1 考虑§1 例 3 中在负 x 轴上所得到的点变换

$$x_1=\sqrt{h^2+(x_0-f_0)^2}-3f_0,$$

它有不动点 $x_0^*=\dfrac{h^2}{8f_0}-f_0$，且已知 $x_0^*>f_0$. 现在来验证条件(2·3)：

$$0<\left(\frac{dx_1}{dx_0}\right)_{x_0=x_0^*}=\frac{x_0^*-f_0}{\sqrt{h^2+(x_0^*-f_0)^2}}<1.$$

外此，虽然在闭轨线 Γ 邻近的每一轨线都和 Γ 在直线 $x=-f_0$ 上

有重迭部分，但显然解是随着初始值而连续变化的. 这样，由定理2·1的推论我们就证明了 Γ 是稳定极限环.

如果条件(2·2)或(2·3)不满足，例如，若点变换 $\bar{s}=f(s)$ 在其不动点 $s=0$ 满足

$$\left|\frac{d\bar{s}}{ds}\right|_{s=0}=1,$$

那末就无法判别相应的极限环的稳定性.

为了进一步研究这个问题，以下假设方程(2·1)右方的 P, Q 有我们所需要的任何阶的连续偏导数. 设方程(2·1)有闭轨线 Γ，负定向，方程为

$$x=f(t), \quad y=g(t), \tag{2·4}$$

f, g 是 t 的周期为 T 的周期函数. 今在 Γ 的足够小的邻域中引进曲线坐标 (s, n)，其中 s 表示 Γ 的弧长，从 Γ 上某一点量起，顺时针方向为正，亦即 s 的增加方向与 t 的增加方向一致. n 表示 Γ 的法线长，向外为正. 设以弧长为参数时 Γ 的方程是

$$x=\varphi(s), \quad y=\psi(s). \tag{2·5}$$

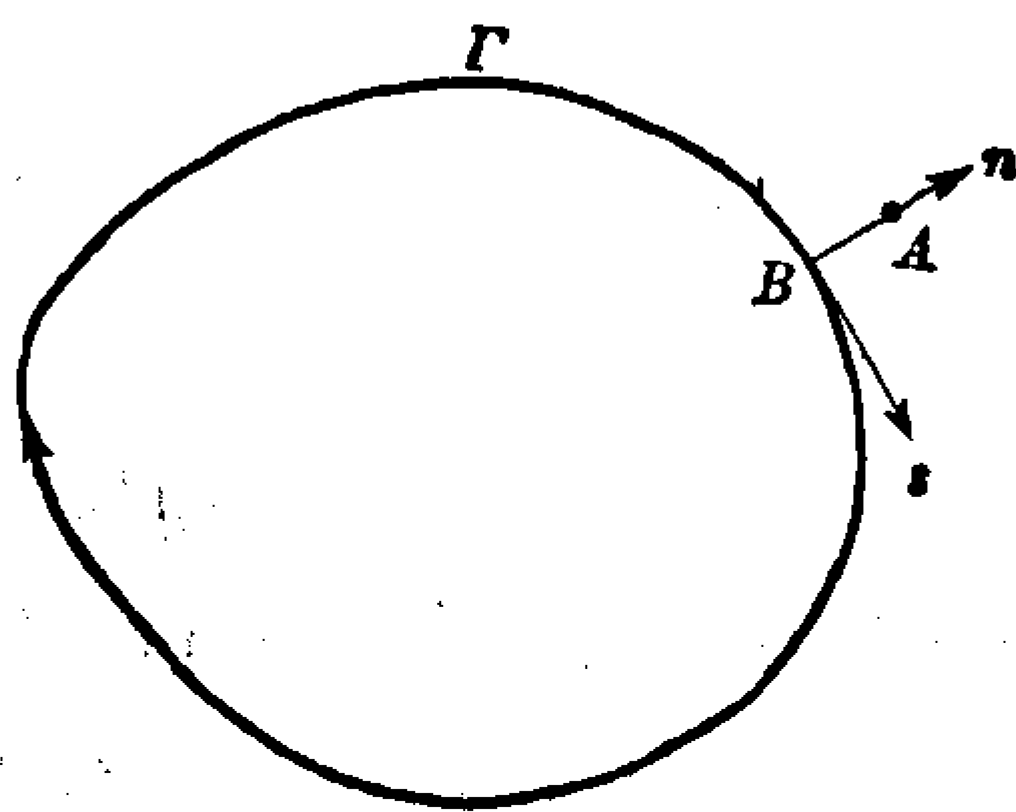


图 2·1

对于 Γ 邻近的一点 A，假设它位于 Γ 在点 B 的法线上，(图2·1). 设点 B 的直角坐标是 $(\varphi(s), \psi(s))$，于是 A 的直角坐标 (x, y) 与曲线坐标 (s, n) 之间的关系式是[1]：

---

1) 由 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(s, n)}=\begin{vmatrix}\varphi'-n\psi'' & -\psi' \\ \psi'+n\varphi'' & \varphi'\end{vmatrix}=\varphi'^2+\psi'^2+n(\psi'\varphi''-\varphi'\psi'')$ 可以看出，只要 P，Q 有连续一阶偏导数，$\varphi', \psi', \varphi'', \psi''$ 便连续，因而只要 $|n|$ 足够小就有 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(s, n)}>0$，即在 Γ 的足够小的邻域中(2·6)表示一个保持定向的坐标变换. 如果改取 n 为(2·1)的正交轨线的弧长，从 Γ 上的点量起，那末坐标变换甚至可以是大范围的，但我们这里不需要用它.

$$x=\varphi(s)-n\psi'(s), \quad y=\psi(s)+n\varphi'(s) \tag{2·6}$$

其中

$$\varphi'(s)=\frac{dx}{ds}\bigg|_B=\frac{P_0}{\sqrt{P_0^2+Q_0^2}}, \quad \psi'(s)=\frac{dy}{ds}\bigg|_B=\frac{Q_0}{\sqrt{P_0^2+Q_0^2}}, \tag{2·7}$$

P_0, Q_0 表示 P, Q 在点 B 的值，即

$$P_0=P(\varphi(s), \psi(s)), \quad Q_0=Q(\varphi(s), \psi(s)).$$

以(2·6)代入(2·1)，得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(s)+\varphi'(s)\dfrac{dn}{ds}+n\varphi''(s)}{\varphi'(s)-\psi'(s)\dfrac{dn}{ds}-n\psi''(s)}$$

$$=\frac{Q(\varphi(s)-n\psi'(s), \psi(s)+n\varphi'(s))}{P(\varphi(s)-n\psi'(s), \psi(s)+n\varphi'(s))},$$

由此可以解出：

$$\frac{dn}{ds}=\frac{Q\varphi'-P\psi'-n(P\varphi''+Q\psi'')}{P\varphi'+Q\psi'}=F(s, n). \tag{2·8}$$

现在我们利用方程(2·8)来研究 Γ 的稳定性. 由于 φ, ψ 是 s 的周期函数，可知(2·8)是以 n 为未知函数，s 为自变数的周期系数非线性方程. 由(2·7)式看出(2·8)有零解 $n=0$，它对应于(2·1)的周期轨线 Γ 或(2·5). 当 P, Q 有连续一阶偏导数时，$F(s, n)$ 有关于 n 的一阶连续偏导数，故(2·8)可改写为

$$\frac{dn}{ds}=F'_n(s, n)\big|_{n=0}\cdot n+o(n). \tag{2·9}$$

为了计算 $F'_n(s, n)\big|_{n=0}$，注意

$$\left.\begin{aligned}\varphi''(s)&=-\frac{Q_0}{(P_0^2+Q_0^2)^2}[P_0^2Q_{x0}+P_0Q_0(Q_{y0}-P_{x0})-Q_0^2P_{y0}],\\ \psi''(s)&=\frac{P_0}{(P_0^2+Q_0^2)^2}[P_0^2Q_{x0}+P_0Q_0(Q_{y0}-P_{x0})-Q_0^2P_{y0}]\end{aligned}\right\} \tag{2·10}$$



(其中 $P_{y0}, P_{x0}, Q_{y0}, Q_{x0}$ 表示 P, Q 的偏导数在 $n=0$ 的值)，可知 $P_0\varphi''+Q_0\psi''=0$. 再注意当 $n=0$ 时有 $P=P_0, Q=Q_0$, 利用上述关系式便可容易地算出

$$F'_n(s,n)\big|_{n=0}=\frac{P_0^2Q_{y0}-P_0Q_0(P_{y0}+Q_{x0})+Q_0^2P_{x0}}{(P_0^2+Q_0^2)^{3/2}}=H(s), \tag{2·11}$$

这里 $H(s)$表示方程(2·1)的正交轨线在点 B 的曲率. 因此(2·9)的一次近似方程为

$$\frac{dn}{ds}=H(s)n, \tag{2·12}$$

其解为

$$n=n_0e^{\int_0^s H(s')ds'} \quad (n_0=n(0)). \tag{2·13}$$

由此可得

定理 2·2 设方程(2·1)的闭轨线 Γ 的弧长为 l, 则当

$$\int_0^l H(s)ds<0 \quad (>0) \tag{2·14}$$

时 Γ 为稳定(不稳定)极限环.

【证】 当(2·14)成立时，由(2·13)有

$$|n(l)|<|n_0| \quad (>|n_0|).$$

这表示(2·12)的零解为渐近稳定(负向渐近稳定)，于是根据熟知的 Ляпунов 定理知道(2·9)的零解亦为渐近稳定(负向渐近稳定)，而这显然表示 Γ 为稳定(不稳定)极限环.

推论(Diliberto) 如果沿着闭轨线 Γ 处处成立

$$H(s)<0 \quad (>0),$$

则 Γ 是稳定(不稳定)极限环[39].

现在要把(2·14)改写为常见的形式. 以 $ds=\sqrt{P_0^2+Q_0^2}\,dt$ 代入(2·14)，得到

$$\int_0^l H(s)ds=\int_0^T \frac{1}{P_0^2+Q_0^2}[P_0^2Q_{y0}-P_0Q_0(P_{y0}+Q_{x0})+Q_0^2P_{x0}]dt$$

$$=\int_0^T\left[P_{x0}+Q_{y0}-\frac{P_0^2P_{x0}+P_0Q_0(P_{y0}+Q_{x0})+Q_0^2Q_{y0}}{P_0^2+Q_0^2}\right]dt$$

$$=\int_0^T(P_{x0}+Q_{y0})dt-\frac{1}{2}\oint_\Gamma\frac{d(P_0^2+Q_0^2)}{P_0^2+Q_0^2}=\int_0^T(P_{x0}+Q_{y0})dt.$$

这样，我们就得到熟知的

定理 2·3 若在方程(2·1)的闭轨线 Γ 上成立

$$\int_0^T\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dt<0 \quad (>0), \tag{2·15}$$

则 Γ 为稳定(不稳定)极限环.

由以上两定理可知，当 Γ 是周期环，半稳定环或复合极限环时，必定成立

$$\int_0^T\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dt=\int_0^l H(s)ds=0. \tag{2·16}$$

但是当 Γ 是普通的稳定或不稳定极限环时，(2·16) 亦可能成立，因为(2·14)与(2·15)只是充分条件而非必要条件.

定义 2·2 当条件(2·14)或(2·15)成立时称 Γ 为单重环或粗糙环，当条件(2·16)成立时称 Γ 为多重环或非粗糙环.

为了研究多重环的稳定性，我们把(2·8)从 $s=0$ 到 $s=l$ 积分，得到

$$\Psi(n_0)=n(l,n_0)-n_0=\int_0^l F(s,n(s,n_0))ds. \tag{2·17}$$

$\Psi(n_0)$称为后继函数，它表示从 Γ 的邻域中的点$(0,n_0)$沿 t(亦即 s)增加的方向走一周到达点

$$(l,n(l,n_0))=(0,n(l,n_0))$$

时，两点的 n 坐标之差. 由此显见，

$$\Psi(n_0)=0$$

是经过$(0,n_0)$的轨线为闭轨线的充要条件；

$$n_0\Psi(n_0)<0 \quad (>0)$$

对一切足够小的$|n_0|$是Γ为稳定(不稳定)的充要条件;

$$\Psi(n_0)<0 \quad (>0)$$

对一切足够小的$|n_0|$是Γ为外稳定而内不稳定(外不稳定而内稳定)的充要条件. 由于已知$\Psi(0)=0$,故得

定理 2·4 若

$$\Psi'(0)<0 \quad (>0), \tag{2·18}$$

则Γ为稳定(不稳定)极限环,若

$$\Psi'(0)=0 \quad 而 \quad \Psi''(0)\neq 0, \tag{2·19}$$

则Γ为半稳定极限环.

根据微分学中熟知的定理可知一般地成立

定理 2·5 若对闭轨线Γ有

$$\Psi'(0)=\Psi''(0)=\cdots=\Psi^{(k-1)}(0)=0, \quad 而 \quad \Psi^{(k)}(0)<0 \quad (>0), \tag{2·20}$$

其中k为奇数,则Γ为稳定(不稳定)极限环. 若

$$\Psi'(0)=\Psi''(0)=\cdots=\Psi^{(k-1)}(0)=0, \quad 而 \quad \Psi^{(k)}(0)\neq 0, \tag{2·21}$$

其中k为偶数,则Γ为半稳定极限环.

注意:若P,Q(从而$\Psi(n_0)$)为解析函数,则(2·20)或(2·21)亦为稳定(不稳定)或半稳定的必要条件.

定义 2·3 称满足条件(2·20)或(2·21)的Γ为k重极限环.

由此定义显见,当Γ为k重极限环时,$n_0=0$是方程$\Psi(n_0)=0$的k重根. 若在(n_0,n)平面上画出直线$n=n_0$与曲线$n=n(l,n_0)$,则此时原点是二者的k重交点. 特别,周期环所对应的$\Psi(n_0)\equiv 0$对一切足够小$|n_0|$.

下面要证明当$k=1$时定义2·3与定义2·2是一致的,亦即

$$\Psi'(0)<0 \quad (>0) \quad 和 \quad \int_0^l H(s)ds<0 \quad (>0)$$

是等价的. 为此,将(2·17)两边对n_0求导数,得到

$$\Psi'(n_0)=\int_0^l F'_n(s,n(s,n_0))n'_{n_0}(s,n_0)ds.$$

为了计算 $n'_{n_0}(s,n_0)$, 注意它满足变分方程

$$\frac{d}{ds}n'_{n_0}(s,n_0)=F'_n(s,n(s,n_0))\cdot n'_{n_0}(s,n_0)$$

和初值条件 $n'_{n_0}(0,n_0)=1$, 即得

$$n'_{n_0}(s,n_0)=e^{\int_0^s F'_n(s,n(s,n_0))ds},$$

从而

$$\Psi'(n_0)=\int_0^l F'_n(s,n(s,n_0))e^{\int_0^s F'_n(\tau,n(\tau,n_0))d\tau}ds$$

$$=\left[e^{\int_0^s F'_n(\tau,n(\tau,n_0))d\tau}\right]_0^l=e^{\int_0^l F'_n(s,n(s,n_0))ds}-1.$$

注意 $n(s,0)\equiv 0$, 可知

$$\Psi'(0)=e^{\int_0^l F'_n(s,n)\big|_{n=0}ds}-1=e^{\int_0^l H(s)ds}-1. \tag{2·22}$$

由此显见 $\Psi'(0)<0(>0)$ 是和

$$\int_0^l H(s)ds<0 \quad (>0)$$

等价的.

一般, $\Psi^{(k)}(0)$ 亦可仿上述方法求出, 但其表达式随 k 的增大而愈来愈繁(见[40]), 例如, 有

$$\left.\begin{aligned}
&\Psi''(0)=\int_0^l F''_{n^2}e^{\int_0^s F'_n(\tau,n)d\tau}ds\,\Big|_{n=0}, \text{当 } \Psi'(0)=0,\\
&\Psi'''(0)=\int_0^l F'''_{n^3}\,e^{2\int_0^s F'_n(\tau,n)d\tau}ds\Big|_{n=0}, \text{当 } \Psi'(0)=\Psi''(0)=0,\\
&\Psi^{(4)}(0)=\int_0^l F^{(4)}_{n^4}e^{3\int_0^s F'_n(\tau,n)d\tau}ds\Big|_{n=0}\\
&\qquad+2\int_0^l F'''_{n^3}e^{2\int_0^s F'_n(\tau,n)d\tau}\int_0^s F''_{n^2}e^{\int_0^t F'_n(\tau,n)d\tau}dt\,ds\,\Big|_{n=0},
\end{aligned}\right\} \tag{2·23}$$

当 $\Psi'(0)=\Psi''(0)=\Psi'''(0)=0$, 等等.

由以上各式可以看出, 要算 $\Psi''(0),\Psi'''(0),\cdots$, 首先须算出

$F''_{n^2}(s, 0)$, $F'''_{n^3}(s,0)$, ⋯, 也就是要算出 $F(s,n)$ 在 $n=0$ 的 Taylor 展开式的各项系数. 下面引进日本数学家占部实(M. Urabe)的方法[41], 用此方法同时还可得到当 Γ 为周期环时位于 Γ 邻近的闭轨线的周期的近似表达式, 如果已知 Γ 的周期为 T.

现在代替(2·6), 仍以时间 t 为 Γ 的参数方程的自变量, 以 τ(时间)表 Γ 邻近某一轨线的参数方程的自变量, 它满足条件 $\tau(t_0)=t_0$. 以 $x_1(\tau)$, $y_1(\tau)$ 表此轨线上的点坐标, 于是参照(2·4)与(2·6), 即见有

$$\tau(t_0)=t_0,\ \ x_1(\tau)=f(t)+\rho(t)l(t),\ \ y_1(\tau)=g(t)+\rho(t)m(t), \tag{2·24}$$

其中 $\rho(t)=n(s,n_0)$, $\rho(t_0)=n_0$, $l(t)=-\psi'(s)$, $m(t)=\varphi'(s)$, 且当 $t=t_0$ 时有 $s=0$. 把(2·24)中的 $x_1(\tau)$, $y_1(\tau)$ 对 t 求导, 得到

$$\begin{aligned} P_1\frac{d\tau}{dt}&=P_0+l\frac{d\rho}{dt}+\rho\frac{dl}{dt},\\ Q_1\frac{d\tau}{dt}&=Q_0+m\frac{d\rho}{dt}+\rho\frac{dm}{dt}, \end{aligned} \tag{2·25}$$

其中 $P_1=P(x_1(\tau),y_1(\tau))$, $Q_1=Q(x_1(\tau),y_1(\tau))$. 记

$$k=k(t)=\left(Q_0\frac{dP_0}{dt}-P_0\frac{dQ_0}{dt}\right)(P_0^2+Q_0^2)^{-3/2},$$

则由(2·10)容易推出

$$\frac{dl}{dt}=kP_0,\qquad \frac{dm}{dt}=kQ_0.$$

代入(2·25), 然后就 $\frac{d\rho}{dt}$ 与 $\frac{d\tau}{dt}$ 解出, 可得

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt}&=\sqrt{P_0^2+Q_0^2}\,(1+k\rho)(P_0Q_1-Q_0P_1)(P_0P_1+Q_0Q_1)^{-1},\\ \frac{d\tau}{dt}&=(P_0^2+Q_0^2)(1+k\rho)(P_0P_1+Q_0Q_1)^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{2·26}$$

若记
$$D=l\frac{\partial}{\partial x}+m\frac{\partial}{\partial y},$$

并且设 P, Q 为解析函数, 则当 ρ 足够小时就有

$$P_1=P_0+\rho DP_0+\frac{\rho^2}{2!}D^2P_0+\cdots+\frac{\rho^n}{n!}D^nP_0+\cdots,$$

$$Q_1=Q_0+\rho DQ_0+\cdots+\frac{\rho^n}{n!}D^nQ_0+\cdots.$$

代入(2·26),得到在 Γ 邻域中的轨线所满足的,以 t 为自变数,ρ, τ 为未知函数的方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt}=&\sqrt{P_0^2+Q_0^2}\,(1+k\rho)\Big[\rho(P_0DQ_0-Q_0DP_0)\\&+\frac{\rho^2}{2!}(P_0D^2Q_0-Q_0D^2P_0)+\cdots\Big]\\&\cdot\Big[P_0^2+Q_0^2+\rho(P_0DP_0+Q_0DQ_0)\\&+\frac{\rho^2}{2!}(P_0D^2P_0+Q_0D^2Q_0)+\cdots\Big]^{-1},\\\frac{d\tau}{dt}=&(1+k\rho)[P_0^2+Q_0^2]\cdot[P_0^2+Q_0^2\\&+\rho(P_0DP_0+Q_0DQ_0)+\cdots]^{-1}.\end{aligned}\right\}\qquad(2\cdot27)$$

由(2·27)的第一式立刻可得

$$\frac{dn}{ds}=\frac{d\rho}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}$$

$$=(1+k\rho)\frac{\rho(P_0DQ_0-Q_0DP_0)+\frac{\rho^2}{2!}(P_0D^2Q_0-Q_0D^2P_0)+\cdots}{P_0^2+Q_0^2+\rho(P_0DP_0+Q_0DQ_0)+\cdots}.\qquad(2\cdot28)$$

把上式右边展开为 ρ 的幂级数,与方程(2·8)的展开式

$$\frac{dn}{ds}=F'_n(s,\ 0)n+\frac{1}{2!}F''_{n^2}(s,\ 0)n^2+\cdots\qquad(2\cdot29)$$

相比较,就可容易地确定 $F'_n(s,\ 0)$, $F''_{n^2}(s,\ 0)$, $\cdots$. 特别,有

$$F'_n(s,\ 0)=\frac{P_0DQ_0-Q_0DP_0}{P_0^2+Q_0^2}=H(s)$$

与(2·10)一致. 又由(2·27)的第二式可得[1)]

1) (2·27)的两式右边不含未知函数 τ,因此,如果能由第一式求出 $\rho(t)$,那末代入第二式积分,就可求出 $\tau(t)$.

$$\frac{d\tau}{dt}=1+\left(k-\frac{P_0DP_0+Q_0DQ_0}{P_0^2+Q_0^2}\right)\rho+\cdots$$

$$=1+\frac{2P_0Q_0(P_{x0}-Q_{y0})+(Q_0^2-P_0^2)(P_{y0}+Q_{x0})}{(P_0^2+Q_0^2)^{3/2}}\rho+\cdots.$$

两边从 t_0 到 t_0+T 积分，得

$$\tau(t_0+T)-\tau(t_0)=T$$

$$+\int_{t_0}^{t_0+T}\frac{2P_0Q_0(P_{x0}-Q_{y0})+(Q_0^2-P_0^2)(P_{y0}+Q_{x0})}{(P_0^2+Q_0^2)^{3/2}}\rho(t)dt$$

$$+\cdots.$$

这便是 Γ 邻近的闭轨线 $(x_1(\tau),\ y_1(\tau))$ 的周期的近似表达式.

下面再研究一种特殊类型的极限环及其判别法.

定义 2·4 如果(2·8)中的 $F(s,\ n)$ 在 Γ 的外侧及内侧小邻域中都保持常号，则称 Γ 为单调接近环[42].

定理 2·6 解析系统(2·1)的极限环 Γ 为单调接近稳定(不稳定)环的充要条件是

$$\sigma_i=P_0D^iQ_0-Q_0D^iP_0=0\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1,$$

而
$$\sigma_k<0\quad(>0),$$

其中 k 为奇数; Γ 为单调接近半稳定环的充要条件是

$$\sigma_i=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,k-1,\quad 而\quad \sigma_k\neq 0,$$

其中 k 为偶数.

【证】 由 $F(s,n)$ 关于 n 的 Taylor 展开式可以看出，要它在 Γ 内外两侧小邻域中都保持常号，其充要条件是存在整数 k，使对一切 s 有

$$F_n'(s,\ 0)=F_{n^2}''(s,\ 0)=\cdots=F_{n^{k-1}}^{(k-1)}(s,\ 0)=0,\ F_{n^k}^{(k)}(s,\ 0)\neq 0. \tag{2·30}$$

但由(2·28)右边可以看出，上述条件实际上与

$$\sigma_1=\sigma_2=\cdots=\sigma_{k-1}=0,\quad 而\quad \sigma_k\neq 0$$

是等价的. 当条件(2·30)成立时，由(2·29)就可得到本定理中关于稳定性的结论.

推论 在单调接近的多重极限环上处处成立 $H(s)=0$. 换言之,单调接近的多重环是曲线 $H(s)=0$ 的一个分支.

但应注意, $H(s)=0$ 的实分支不一定是方程(2·1)的轨线; 即使它是轨线,也不一定是闭的.

例 2 研究方程

$$\frac{dx}{dt}=-y+x(x^2+y^2-1)^2,\quad \frac{dy}{dt}=x+y(x^2+y^2-1)^2.$$

化为极坐标方程易证它有唯一的极限环 Γ: $x^2+y^2=1$, 并且它是半稳定的. 计算正交轨线的曲率,可得

$$H(s)=\frac{(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)[(x^2+y^2-1)^5+5(x^2+y^2-1)+4]}{\{[-y+x(x^2+y^2-1)^2]^2+[x+y(x^2+y^2-1)^2]^2\}^{3/2}},$$

由此可见, $H(s)=0$ 的轨迹是: 原点,单位圆 Γ 和圆 $x^2+y^2=\delta<1$, 后一圆不是方程的轨线.

按照极限环的定义容易使人引起错觉, 以为单调接近环也许是比较常见的. 如果真是这样的话, 那末判别多重环的存在与否就变得比较容易了. 但事实上, 单调接近环不过是一种非常特殊的极限环, 在 §11 中将会看到, 当方程(2·1)中的 P, Q 是 x, y 的二次多项式时,它的极限环一般而论并不是单调接近的.

最后,我们要研究一下位于极限环上的周期解的 Ляпунов 稳定性. 如所熟知,这种周期解不可能是 Ляпунов 渐近稳定的,因此只能研究它是稳定还是不稳定.对于非线性守恒系统,由于它存在首次积分, 相平面上只能出现周期环. 一般而论周期总是随着振幅而改变的, 故位于此种周期环上的周期解经常是 Ляпунов 不稳定的. 但对于非守恒系统的极限环,却成立下面的定理:

定理 2·7 若 Γ 是方程(2·1)的单重稳定环, 则位于 Γ 上的任一周期解必为 Ляпунов 稳定.

【证】 由定理 2·2 看出方程(2·8)的零解为渐近稳定. 但(2·8)的零解 $n=0$ 就对应于位于 Γ 上的周期解, 且 $\frac{ds}{dt}=\sqrt{P_0^2+Q_0^2}$

与其倒数为有界，故对应的 ρ, t 的方程((2·27)第一式)的零解亦为渐近稳定. 再注意定常系统的周期解经过时间的平移以后仍是周期解，即知所论的周期解仅为稳定[1]).

关于多重环上的周期解的 Ляпунов 稳定性问题有 В. И. Зубов [44]的工作，结果也很有趣，读者请看原著，不再在此介绍. 最后，若含有限个鞍点的奇闭轨线为内侧极限环，则有更简单的方法来判别它的轨道稳定性，并且这一结果在研究某些多项式定常系统的极限环问题是非常有用的，这将在下一节中介绍.

习 题

1. 记 $f(s, n)=\dfrac{Q(\varphi(s)-n\psi'(s),\ \psi(s)+n\varphi'(s))}{P(\varphi(s)-n\psi'(s),\ \psi(s)+n\varphi'(s))}$，证明 $f'_n(s, 0)=0$ 与 $F''_n(s, 0)=0$ 等价，又 $F'_n(s, 0)=\left.\dfrac{\partial\theta}{\partial n}\right|_{n=0}$，其中 $\theta=\operatorname{arc\,tan}\dfrac{Q}{P}$.

2. 计算 $F''_n(s, 0)$ 及 $\Psi''(0)$.

3. 以 $\alpha(s, n)$ 表示 Γ 上任一点 B 的法线上的点 $A(s, n)$ 处的轨线的斜角与 Γ 在点 B 的斜角之差，证明 Γ 为单调接近半稳定环的充要条件是：对于一切 s，$\sin\alpha$ 在 $n=0$ 取到极值[45].

4. 证明

$$\frac{dx}{dt}=\frac{y}{\sqrt{2}}+x(2x^2+y^2-1)^2,$$

$$\frac{dy}{dt}=-\sqrt{2}x+y(2x^2+y^2-1)^2$$

有非单调接近的半稳定环. 但可经过仿射变换而使此半稳定环成为单调接近环.

5. 设 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 在单连通域 G 中有二阶连续偏导数，$P(x, y)=0$ 可表为 $y=f(x)$ 的形式，$Q(x, y)=0$ 可表为 $x=\varphi(y)$ 的形式. 设函数

$$A(x, y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial y}\right)$$

---

1) 如果没有本节前面的那些讨论，则可应用 А. А. Андронов 的定理(见[43])来证明定理 2·7.

与
$$B(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial x}\right)$$
在 G 中同号，不变号，且在任何子区域上，A，B 至少有一个不恒等于零．又在 $y=f(x)$ 的上方(下方)附近 B 与 $\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial x}$ 异号(同号)，在 $x=\varphi(y)$ 的右方(左方)附近 A 与 $\frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial y}$ 异号(同号)，则方程(2·1)在 G 中无多重环[23]．

6．应用上题证明 van der Pol 方程组有单重环．

§3. 旋转向量场中的极限环

在前二节中我们初步研究了极限环的存在性，不存在性和稳定性，本节以及下一节将进而研究含参数的微分方程，其极限环随参数而变化的情况. 当然，这两类问题是互相联系的，正好象含参数的二次方程的实根，如果这个根是单根，则当参数作微小变动时，根也只作微小变动，但不会消失；如果这个根是重根，那末参数作不论怎么小的变动，重根或是消失，或是分解为两个单根. 由于极限环的方程一般是写不出来的(除了那些人为地造出来的方程的极限环以外)，它的位置只能近似地加以确定，并且当方程中的参数变化时，极限环的产生、消失以至形状的变化也很难捉摸，因此人们自然希望先研究那种简单而又变化比较规则的情况，这就是本节所要讨论的旋转向量场的理论. 如果向量场随着参数的变化都向同一个方向旋转，不论平面上点的位置如何，那末可以证明这时极限环变动得最有规则，即单调地扩大或缩小. 这种情况类似于：如果光滑平面曲线 $y=f(x, \alpha)$ 随 α 的改变而沿着 y 轴平移，则它和 x 轴的交点(即 $f(x, \alpha)=0$ 的实根)是向左或向右平移的.

旋转向量场的理论于 1953 年由 G. F. D. Duff 所首创[46]，其后 G. Seifert[47] 与陈翔炎[48, 49, 50]相继减轻 Duff 的条件，而保证其主要结论仍能成立. 1978 年马知恩[51]又讨论了奇点可以移动的旋转向量场族中奇点与奇闭轨线的变动方式. 为了叙述简单起见，关于旋转向量场的基本理论我们仍按 Duff 的文章来介绍，但在最后摘要介绍[48]，[50]和[51]的工作.

考虑方程

$$\frac{dx}{dt}=P(x, y, \alpha), \quad \frac{dy}{dt}=Q(x, y, \alpha), \tag{3·1}$$

其中 P, Q 是 x, y 和参数 α 的连续函数，且满足下列条件：

1. P, Q 在任何有界区域中满足 Lipschitz 条件：

$$\begin{aligned}&|P(x_2, y_2, \alpha)-P(x_1, y_1, \alpha)|\\&\qquad\leqslant M(|x_2-x_1|+|y_2-y_1|),\\&|Q(x_2, y_2, \alpha)-Q(x_1, y_1, \alpha)|\\&\qquad\leqslant M(|x_2-x_1|+|y_2-y_1|);\end{aligned} \tag{3·2}$$

2. $\frac{\partial P}{\partial\alpha}, \frac{\partial Q}{\partial\alpha}$ 存在，且连续；

3. 由方程(3·1)所确定的平面向量场 $F(\alpha)$ 只有孤立奇点.

定义 3·1 若当 α 在 $[0, T]$ 中变动时 $F(\alpha)$ 的奇点保持不动，而在一切常点成立

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ \frac{\partial P}{\partial\alpha} & \frac{\partial Q}{\partial\alpha}\end{vmatrix}>0, \tag{3·3}$$

又存在正数 k，使对一切 (x, y)，$T>0$ 是使下式成立的最小正数：

$$\begin{aligned}P(x, y, \alpha+T)&=-kP(x, y, \alpha),\\Q(x, y, \alpha+T)&=-kQ(x, y, \alpha),\end{aligned} \tag{3·4}$$

则称 $F(\alpha)$（对一切 $0\leqslant\alpha<T$）构成一旋转向量场的完全族.

向量 (P, Q) 与 x 轴的交角记为 θ. 由(3·3)与(3·4)易见，对满足 $|\alpha_1-\alpha_2|<T$ 的任意两个 α_1 与 α_2 都成立不等式：

$$0<|\theta(x, y, \alpha_1)-\theta(x, y, \alpha_2)|<\pi. \tag{3·5}$$

现在来解释上述定义的几何意义. 首先，由(3·3)易见

$$\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\tan^{-1}\frac{Q}{P}=\frac{1}{P^2+Q^2}\begin{vmatrix} P & Q \\ \frac{\partial P}{\partial\alpha} & \frac{\partial Q}{\partial\alpha}\end{vmatrix}>0 \tag{3·6}$$

在一切常点成立，这表示由(3·1)所确定的平面向量场 $F(\alpha)$ 在任一常点处的向量当 α 增加时总是逆时针方向转动的. 由(3·4)和(3·5)可知 $\theta(x, y, \alpha+T)=\theta(x, y, \alpha)+\pi$，且当参数由 α 变到

$\alpha+T$ 时，对应的向量恰好转了半周，但不一定保持长度；而当 α 增加 $2T$ 时，向量恰好转动一周而回到原来的方向，这就是定义中所谓“完全族”的含义.

例1 对于任一方程

$$\frac{dx}{dt}=P(x,\ y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,\ y),\tag{3·7}$$

我们作一含参数 α 的方程

$$\frac{dx}{dt}=P\cos\alpha-Q\sin\alpha,\quad \frac{dy}{dt}=P\sin\alpha+Q\cos\alpha.\tag{3·8}$$

易见当 α 在 $[0,\ \pi)$ 中变动时，(3·8)构成一旋转向量场的完全族，并且由(3·7)到(3·8)旋转的角度恰好等于 α，向量的长度则永远保持不变，故称(3·8)为均匀旋转向量场族.

定理3·1 $F(\alpha)$的奇点的指标不随 α 而变.

【证】 在 $F(\alpha)$的奇点 O 的邻域内作一包含 O 的单闭曲线，使其上没有奇点，且内部仅含奇点 O. 由(3·5)以及闭曲线关于向量场的指标的熟知的性质即见此闭曲线关于两向量场有相同的指标，亦即闭曲线内部的奇点的指标不随 α 而变.

定理3·2 完全族中属于不同向量场的闭轨线互不相交.

【证】 设 $F(\alpha_1)$的闭轨线 Γ_{α_1} 与 $F(\alpha_2)$的闭轨线 Γ_{α_2} 交于一点 A，又当 t 增加时 Γ_{α_1} 在点 A 由 Γ_{α_2} 的外部进入它的内部，那末由条件(3·3)与(3·4)可知，在 Γ_{α_2} 上所有的点 $F(\alpha_1)$的轨线都从它的外部进入内部. 这样，Γ_{α_1} 在进入 Γ_{α_2} 之后就不可能再跑出来，因而不可能是闭轨线，与假设相矛盾.

定理3·3 外稳定环 Γ_{α_0} 若为正(负)定向，则对任意足够小的 $\varepsilon>0$，一定存在 $\alpha_1<\alpha_0(\alpha_1>\alpha_0)$，使对一切位于 α_1 与 α_0 之间的 α，在 Γ_{α_0} 的外 ε 邻域中至少存在 $F(\alpha)$的一个外稳定环 Γ_α 和一个内稳定环 Γ'_α（它们可能重合）；又存在 Γ_{α_0} 的外 $\delta(\leqslant\varepsilon)$ 邻域，使它被 $F(\alpha)$（α 介于 α_0 与 α_1 之间）的闭轨线所充满.

【证】 兹就 Γ_{α_0} 为正定向的情况来证明本定理. 如果应用环域定理的话, 证明比较简单, 但我们宁愿介绍 Duff 原来的证法, 因为其中用到较多的数学分析中的知识和技巧, 这对于从事微分方程定性理论研究的人来说是非常重要的.

如图 3·1, 假设 Γ_{α_0} 的外 $\sigma\varepsilon$ 邻域的境界与过 Γ_{α_0} 上一点 A 的法线 l 交于点 B, 这里 $\varepsilon>0$ 足够小, $0<\sigma<1$. 过 B 的 $F(\alpha_0)$ 的正半轨线 $\gamma^+(B, \alpha_0)$ 第一次再交 $\overline{AB}$ 于 B_1, 过 B 的 $F(\alpha)(\alpha<\alpha_0)$ 的正半轨线 $\gamma^+(B, \alpha)$ 第一次再交 $\overline{BB_1}$ 于 $B_2(\alpha)$. 现在证明: 当 α 自 α_0 减少, 且 σ 足够小时, 可以使某一 $B_2(\alpha)$ 重合于 B, 因而 $\gamma^+(B, \alpha)$ 就成为 $F(\alpha)$ 的闭轨线, 并且它全部位于 Γ_{α_0} 的 ε 邻域之中.

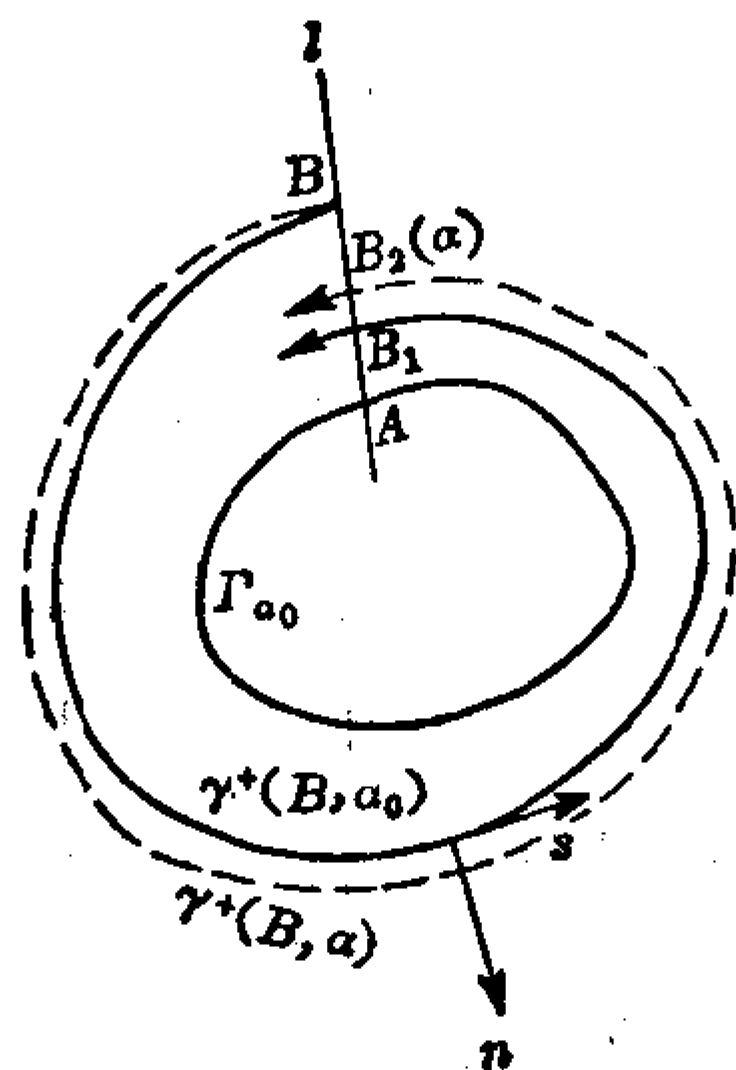


图 3·1

在本节关于方程(3·1)的假定之下, 轨线是可微分可求长的曲线. 设 s 是 $\gamma(B, \alpha_0)$ 的弧长, 从 B 向 t 增加的方向度量时为正; 以 n 记此轨线的外法线长. 设 $\gamma(B, \alpha_0)$ 的参数方程是

$$x=f(s), \quad y=g(s). \tag{3·9}$$

在 (s, n) 曲线坐标之下, 设 $\gamma^+(B, \alpha)$ $(\alpha<\alpha_0)$ 的方程为 $n=h(s, \alpha)$. 易见其上任一点的直角坐标与曲线坐标之间的关系是

$$x-f(s)=h(s)g'(s), \; y-g(s)=-h(s)f'(s). \tag{3·10}$$

因此
$$h(s)=\sqrt{(x-f(s))^2+(y-g(s))^2}.$$

求 $h'(s)$, 利用(3·10), 可得

$$h'(s)=g'(s)\frac{dx}{ds}-f'(s)\frac{dy}{ds}. \tag{3·11}$$

以 s_α 表 $\gamma^+(B, \alpha)$ 的弧长, P_α, Q_α 表 $P(x, y, \alpha)$, $Q(x, y, \alpha)$, 则

$$\frac{dx}{ds}=\frac{dx}{ds_\alpha}\frac{ds_\alpha}{ds}=\frac{P_\alpha}{\sqrt{P_\alpha^2+Q_\alpha^2}}\;\frac{(1+k^*h)\sqrt{P_\alpha^2+Q_\alpha^2}\sqrt{P_{\alpha_0}^2+Q_{\alpha_0}^2}}{P_\alpha P_{\alpha_0}+Q_\alpha Q_{\alpha_0}}$$

$$= \frac{P_\alpha(1+k^*h)\sqrt{P_{\alpha_0}^2+Q_{\alpha_0}^2}}{P_\alpha P_{\alpha_0}+Q_\alpha Q_{\alpha_0}},$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{Q_\alpha}{\sqrt{P_\alpha^2+Q_\alpha^2}} \frac{(1+k^*h)\sqrt{P_\alpha^2+Q_\alpha^2}\sqrt{P_{\alpha_0}^2+Q_{\alpha_0}^2}}{P_\alpha P_{\alpha_0}+Q_\alpha Q_{\alpha_0}}$$

$$= \frac{Q_\alpha(1+k^*h)\sqrt{P_{\alpha_0}^2 Q_{\alpha_0}^2}}{P_\alpha P_{\alpha_0}+Q_\alpha Q_{\alpha_0}},$$

其中 $$k^* = \left(P_{\alpha_0}\frac{dQ_{\alpha_0}}{ds} - Q_{\alpha_0}\frac{dP_{\alpha_0}}{ds}\right)\Big/(P_{\alpha_0}^2+Q_{\alpha_0}^2),$$

P_{α_0}, Q_{α_0} 表示 P, Q 在(x_0, y_0, α_0)的值，(x_0, y_0)的曲线坐标是$(s, 0)$．又注意 $g'^2+f'^2=1$，因此代入(3·11)，得到

$$\frac{dh}{ds} = \frac{(g'(s)P_\alpha - f'(s)Q_\alpha)(1+k^*h)\sqrt{P_{\alpha_0}^2+Q_{\alpha_0}^2}}{P_\alpha P_{\alpha_0}+Q_\alpha Q_{\alpha_0}}$$

$$= \frac{(1+k^*h)\sqrt{P_\alpha^2+Q_\alpha^2}\sqrt{P_{\alpha_0}^2+Q_{\alpha_0}^2}}{P_\alpha P_{\alpha_0}+Q_\alpha Q_{\alpha_0}}\sin\psi, \qquad (3\cdot12)$$

其中 ψ 表示 $\gamma^+(B, \alpha_0)$在弧长为 s 处的斜角与 $\gamma^+(B, \alpha)$ 在点 (s, n)处的斜角的夹角，即 $\theta(s, 0, \alpha_0)-\theta(s, n, \alpha)$．由于 P, Q 满足 Lipschitz 条件，易见 θ 对 n 满足 Lipschitz 条件．又由 (3·3) 知 $\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}$ 在 Γ_{α_0} 的 ε 邻域中有正的下界 $\rho>0$，因此得到

$$\psi = \theta(s, 0, \alpha_0) - \theta(s, n, \alpha_0) + \theta(s, n, \alpha_0) - \theta(s, n, \alpha)$$

$$\geqslant -Mh + \left(\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\right)_{\alpha^*}(\alpha_0-\alpha) \geqslant \rho(\alpha_0-\alpha) - Mh, \qquad (3\cdot13)$$

其中 $M>0$ 是常数，α^* 介于 α_0 与 α 之间．根据 P, Q 所满足的条件容易看出(3·12)式右边 $\sin\psi$ 的系数可以大于1/2，只要 $|\alpha-\alpha_0|$ 与 ε 足够小．于是结合(3·12)与(3·13)可得

$$\frac{dh}{ds} > \frac{1}{2}\sin\psi > \frac{1}{4}[\rho(\alpha_0-\alpha) - Mh].$$

将此不等式从 0 到 L 积分，L 是 $\gamma^+(B, \alpha_0)$上从 B 到 B_1 的弧长，得

$$h(L, \alpha) \geqslant \frac{\rho}{M}(\alpha_0-\alpha)[1-e^{-ML/4}] = K(\alpha_0-\alpha),$$

其中 $K>0$ 为常数. 由此可见, 只要 $\alpha_0-\alpha>\frac{\sigma\varepsilon}{K}$, 便有

$$h(L,\ \alpha)>\sigma\varepsilon,$$

即 $B_2(\alpha)$ 已越出线段 $\overline{B_1B}$ 而使 B 位于 B_1 与 $B_2(\alpha)$ 之间了. 由于 $B_2(\alpha)$ 沿 l 的移动是 α 的连续函数, 故知有 $\alpha_2<\alpha_0$ 存在, 使 $|\alpha_0-\alpha_2|\leqslant\frac{\sigma\varepsilon}{K}$, 而 $B_2(\alpha_2)=B$, 即 $\gamma^+(B,\ \alpha_2)$ 是 $F(\alpha_2)$ 的闭轨线. 显见只要预先取 σ 足够小, 可使此闭轨线全部位于 Γ_{α_0} 的 ε 邻域之中. 又因为当 $\sigma\to 0$ 时 $\alpha_2\to\alpha_0$, 且 A 是 Γ_{α_0} 上任意一点, 故对固定的 $\varepsilon>0$, 有固定的 $\alpha_1<\alpha_0$, 使 Γ_{α_0} 有外邻域 N_ε 被 $\alpha_1<\alpha<\alpha_0$ 的 $F(\alpha)$ 的闭轨线所充满, 且 N_ε 整个位于 Γ_{α_0} 的外 ε 邻域之中.

根据定理 3·2, N_ε 中的属于不同 $F(\alpha)$ 的闭轨线互不相交; 为确定起见, 设 N_ε 的外境界线是 $F(\alpha_1)$ 的闭轨线 Γ_{α_1}[1]. 要证明对于每一固定的 α, $\alpha_1<\alpha<\alpha_0$, 在邻域 N_ε 中有 $F(\alpha)$ 的内稳定环及外稳定环(可能重合)存在, 只须注意 $F(\alpha)$ 在此邻域中必有一条最内的闭轨线 Γ_α, 它应是内稳定环. 因为如果它是内不稳定, 则在 Γ_α 与 Γ_{α_0} 之间又将有 $\Gamma_{\alpha'}$ 存在, 其中 $\alpha_0>\alpha>\alpha'$. $\Gamma_{\alpha'}$ 与 Γ_{α_0} 一起构成一个环域, $F(\alpha)$ 的轨线与它相遇时都从外部穿进内部去, 于是由定理 3·15(注意前段的附注)知道, 在此环域中又将存在 $F(\alpha)$ 的新的闭轨线, 它应位于 Γ_α 的内部, 这是和 Γ_α 的定义相矛盾的. 同样, $F(\alpha)$ 在 N_ε 中必有一条最外的闭轨线 Γ'_α, 它应是外稳定环, 定理证毕.

请注意, 由定理 3·2 与定理 3·3 我们只能肯定: 旋转向量场的完全族在截线 l 上确定了一个单值连续函数 $\alpha=\alpha(n)$, 使对 l 上坐标为 n 的点 $B(n)$, 有且只有 $F(\alpha(n))$ 的唯一的闭轨线 $\Gamma_{\alpha(n)}$ 通过它. 函数 $\alpha(n)$ 的存在性由定理 3·3 的后半部来保证, $\alpha(n)$ 的单

---

1) 注意后面定理 3·15 中极限环的存在性的证明, 只要用到本定理中的存在性部分就够了, 因此本定理中关于极限环稳定性的证明可以应用定理 3·15 中有关存在性的结论.

值性由定理 3·2 来保证，$\alpha(n)$ 的连续性利用这两定理亦不难由反证法得知. 但是我们却无法肯定必然存在 Γ_{α_0} 的足够小的外或内邻域，以及与 α_0 足够接近的 α_1，使对每一介于 α_0 与 α_1 之间的 α，$F(\alpha)$ 有唯一的闭轨线位于此邻域中. 实际上，下面的例子正好说明这种邻域可以不存在.

例 2 方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-y+x\tan\left[(r-r_0)^3\left(\sin\frac{1}{r-r_0}+2\right)\right]=P(x,y),\\ \frac{dy}{dt}&=x+y\tan\left[(r-r_0)^3\left(\sin\frac{1}{r-r_0}+2\right)\right]=Q(x,y)\end{aligned}\right\}\tag{3·14}$$

(其中 $r_0>0$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$) 有不稳定极限环 $r=r_0$. 由此作均匀旋转向量场的完全族 $F(\alpha)$:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=P(x,y)\cos\alpha-Q(x,y)\sin\alpha,\\ \frac{dy}{dt}&=P(x,y)\sin\alpha+Q(x,y)\cos\alpha.\end{aligned}\tag{3·15}$$

我们要研究 $F(\alpha)$ 在 $r=r_0$ 的邻域中是否存在闭轨线.

令 $V=x^2+y^2$，沿着 (3·15) 的轨线计算 $\frac{dV}{dt}$，得到

$$\frac{dV}{dt}=2r^2\cos\alpha\left[\tan\left\{(r-r_0)^3\left(\sin\frac{1}{r-r_0}+2\right)\right\}-\tan\alpha\right],$$

由此可见，当

$$\tan\left[(r-r_0)^3\left(\sin\frac{1}{r-r_0}+2\right)\right]=\tan\alpha,$$

或 r^* 是方程

$$(r-r_0)^3\left(\sin\frac{1}{r-r_0}+2\right)=\alpha\quad(|\alpha|\ll 1)\tag{3·16}$$

的根时，$F(\alpha)$ 就有闭轨线 $r=r^*$. 曲线 (3·16) 画在图 3·2 中 (只考虑 $r>r_0$ 的情况就够了)，它夹在两曲线

$$l_1:\ (r-r_0)^3=\alpha\quad 与\quad l_2:\ 3(r-r_0)^3=\alpha$$

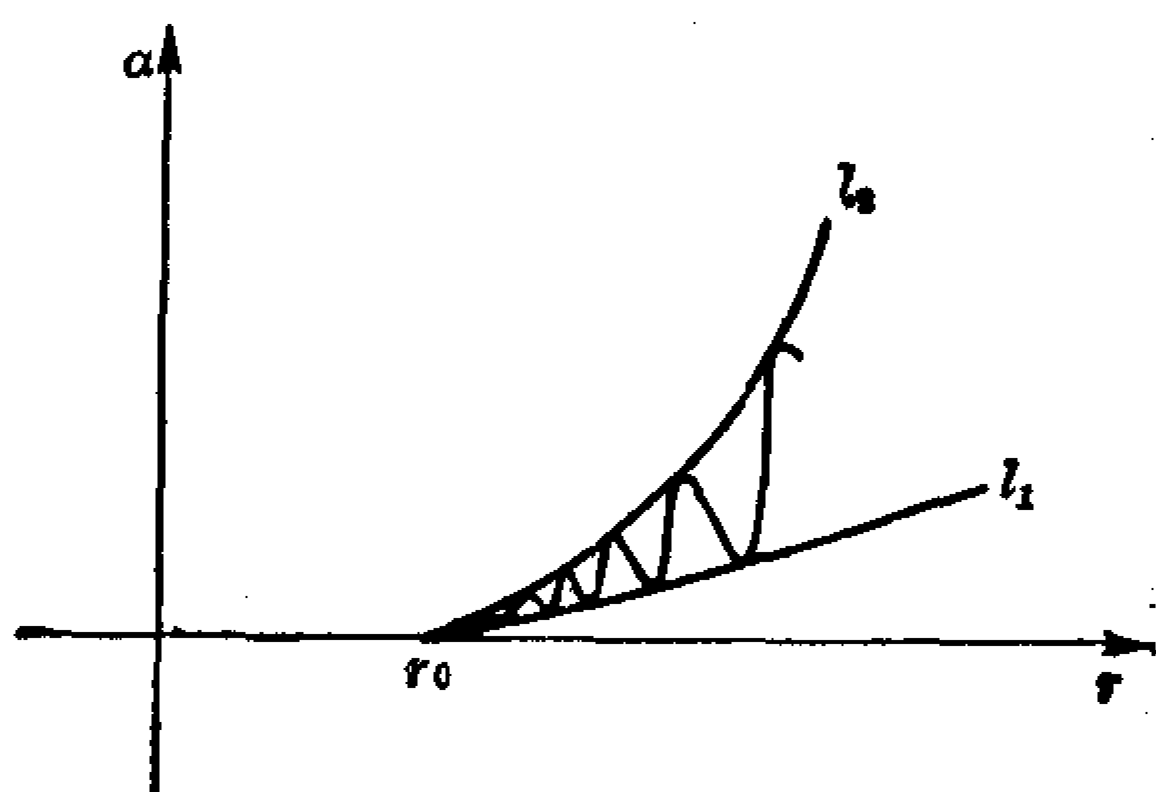


图 3·2

之间. 视 α 为 r 的函数, 研究 $\frac{d\alpha}{dr}=0$ 的根. 由于

$$\frac{d\alpha}{dr}=3(r-r_0)^2\left(\sin\frac{1}{r-r_0}+2\right)-(r-r_0)\cos\frac{1}{r-r_0}=0$$

的根当 $|r-r_0|$ 足够小时与 $\cos\frac{1}{r-r_0}=0$ 的根很接近, 故知在

$$r_0+\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

附近 $\alpha(r)$ 有极大值 α_k, 它差不多等于 $3\Big/\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)^3$, 在

$$r_0+\frac{1}{(2k-3)\pi+\frac{\pi}{2}}$$

附近 $\alpha(r)$ 有极小值 α_k', 它差不多等于 $1\Big/\left((2k-3)\pi+\frac{\pi}{2}\right)^3$. 当 $|k|$ 很大时显然有 $|\alpha_k|>|\alpha_k'|$. 这表示: 一切与 r 轴平行且与它足够接近的直线 $\alpha=\alpha^*$ 都至少与曲线(3·16)相交于两点以上. 以交点的横坐标 r^* 为半径的每一个 (x, y) 平面上的圆 $r=r^*$ 都是 $F(\alpha^*)$ 的孤立闭轨线, 因而是极限环. 要判别这种极限环的稳定性, 只须改写

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\alpha=\alpha^*}=2r^2\cos\alpha^*\left[\tan\left\{(r-r_0)^3\left(\sin\frac{1}{r-r_0}+2\right)\right\}\right.$$
$$\left.-\tan\left\{(r^*-r_0)^3\left(\sin\frac{1}{r^*-r_0}+2\right)\right\}\right],$$

就可看出: 如果交点 (r^*, α^*) 位于曲线(3·16)的上升弧段上, 则对

$r<r^*$ 有 $\frac{dV}{dt}<0$, 对 $r>r^*$ 有 $\frac{dV}{dt}>0$ (r 在 r^* 附近), 即圆 $r=r^*$ 是 $F(\alpha^*)$的不稳定极限环. 反之, 若(r^*, α^*)位于曲线(3·16)的下降弧段上, 则 $r=r^*$ 是 $F(\alpha^*)$的稳定极限环. 又当 (r^*, α^*)是曲线(3·14)的极值点时, $r=r^*$ 是 $F(\alpha^*)$的半稳定极限环.

与定理 3·3 完全一样, 可以证明

定理 3·4　内稳定极限环 Γ_{α_0} 若为正(负)定向, 则对任意足够小的 $\varepsilon>0$, 一定存在 $\alpha_2>\alpha_0$ ($\alpha_2<\alpha_0$), 使对一切 α, $\alpha_0<\alpha\leqslant\alpha_2$ ($\alpha_2\leqslant\alpha<\alpha_0$), 在 Γ_{α_0} 的内 ε 邻域中必定存在 $F(\alpha)$的一个外稳定环和一个内稳定环(可能重合). 又存在 Γ_α 的内 $\delta(\leqslant\varepsilon)$ 邻域, 使它被 $F(\alpha)$的闭轨线所充满.

对于不稳定极限环也可写出与定理 3·3, 3·4 类似的两个定理, 但当 Γ_{α_0} 的定向固定时, α 的变动方向应与上述两定理中的相反.

当前述单值连续函数 $\alpha(n)$的反函数 $n=n(\alpha)$ 也是单值时, $\alpha(n)$或 $n(\alpha)$显然是单调的. 因此我们说, 在旋转向量场中极限环按其定向与稳定性的不同, 随着 α 的增加而单调地扩大或缩小. 对于稳定和不稳定环, 其随 α 增加而变动的情况可以列表如下:

定　向	正	正	负	负
稳定性	稳定	不稳定	稳定	不稳定
运动情况	缩小	扩大	扩大	缩小

定理 3·5　当 α 向适当的方向变动时, 一个半稳定极限环蜕变为至少一个稳定环和一个不稳定环, 分别位于此半稳定环的内部与外部, 而当 α 向另一方向变动时, 半稳定环消失.

【证】　由定理 3·3 与 3·4 以及上表知道, 对于正定向, 外稳定而内不稳定的 Γ_{α_0}, 它的外 δ_1 邻域应被一切对应于 $\alpha_1<\alpha<\alpha_0$ 的极限环 Γ_α 所充满. 如果存在某一 α, 使 $F(\alpha)$在 Γ_{α_0} 的外 δ_1 邻域中

有一系周期环，它的外境界 Γ_α 是外稳定环，内境界 Γ'_α 是内稳定环，那末我们可以把 Γ_α 与 Γ'_α 所围的环域看成是 $F(\alpha)$ 的一个广义稳定极限环. 反之，如果 Γ_α 与 Γ'_α 之间不是由 $F(\alpha)$ 的闭轨线所充满，那末容易看出，其中至少存在 $F(\alpha)$ 的一个稳定环或广义稳定环. 最后，如果 $F(\alpha)$ 在 Γ_{α_0} 的外 δ_1 邻域中的闭轨线唯一存在，则必为稳定环.

同样，Γ_{α_0} 的内 δ_2 邻域亦被一切对应于 $\alpha_2<\alpha<\alpha_0$ 的极限环 Γ_α 所充满，对应于每一 α，其中至少有一个不稳定或广义不稳定环存在. 这就说明，当 α 从 α_0 减小时，Γ_{α_0} 蜕变为至少一个稳定环（在它外邻域）和一个不稳定环（在它内邻域）. 另一方面，若 α 从 α_0 增加，则根据不相交性（定理 3·2）可知 $F(\alpha)$ 在 Γ_{α_0} 的邻域中不可能存在闭轨线，定理证毕.

按照半稳定环的定向与内外稳定性的不同，我们可以列出下面的表：

定　　向	正	正	负	负
稳定部位	内稳定	外稳定	内稳定	外稳定
消失时 α 的变动方向	α 减少	α 增加	α 增加	α 减少

定理 3·6 若当 α 变动时，Γ_α 所遮盖的区域是 R，则 R 的内外境界线上都有奇点（无限远点作为奇点）.

【证】 设 B 是区域 R 的境界点，而 B 不是奇点. 设 $\{B_n\}$ 为 R 中的点列，$B_n\to B$ 当 $n\to\infty$. 对每一点 B_n，必有一个环 Γ_{α_n} 通过它. 由完全族的性质（3·4）知，可设一切 α_n 都在 0 与 T 之间，因而数列 $\{\alpha_n\}$ 至少有一个极限点 $\bar{\alpha}$. 今证 $\{\alpha_n\}$ 亦只能有一个极限点. 否则，设 $\{\alpha_n\}$ 有子叙列

$$\bar{\alpha}_n\to\bar{\alpha},\quad \alpha'_n\to\alpha'\neq\bar{\alpha},$$

则根据向量场对于 $(x,\ y,\ \alpha)$ 的连续性，由 $\{B_n\}$ 的子叙列 $\bar{B}_n\to B$ 可

知，$F(\bar{\alpha}_n)$在$\bar{B}_n$所确定的方向趋向于$F(\bar{\alpha})$在点B所确定的方向；由于叙列$B'_n\to B$可知，$F(\alpha'_n)$在B'_n所确定的方向趋向于$F(\alpha')$在点B所确定的方向. 但$F(\bar{\alpha})$与$F(\alpha')$在点B确定不同的方向，因此当n足够大时，$\Gamma_{\bar{\alpha}_n}$应与$\Gamma_{\alpha'_n}$在点B附近相交，这与定理3·2相矛盾.

现在研究$F(\bar{\alpha})$中经过点B的轨线$\gamma(\bar{\alpha})$. 由于B不是奇点，$\gamma(\bar{\alpha})$唯一存在. 易见$\gamma(\bar{\alpha})$上一切的点都应是R的境界点，$\gamma(\bar{\alpha})$的ω或α极限集中的点也都是R的境界点. 这样，如果$\gamma(\bar{\alpha})$有无限远的ω或α极限点，则定理得证. 现在假设$\gamma(\bar{\alpha})$有界，则由§1定理1·6知道：或者$\gamma(\bar{\alpha})$本身是闭轨线，或是$\gamma(\bar{\alpha})$以另一闭轨线$\Gamma_{\bar{\alpha}}$为ω或α极限集，或是$\gamma(\bar{\alpha})$的极限集中含有奇点. 在最后一情况定理已得证明. 今证前面两种情况不可能出现.

先设$\gamma(\bar{\alpha})$是$F(\bar{\alpha})$的闭轨线，不妨设$\gamma(\bar{\alpha})$是R的内境界线. 于是由定理3·3或与之类似的定理，当α从$\bar{\alpha}$向适当的方向变动时，在$\gamma(\bar{\alpha})$的内部仍将出现$F(\alpha)$的闭轨线，因而$\gamma(\bar{\alpha})$不是R的内境界，与假设相矛盾.

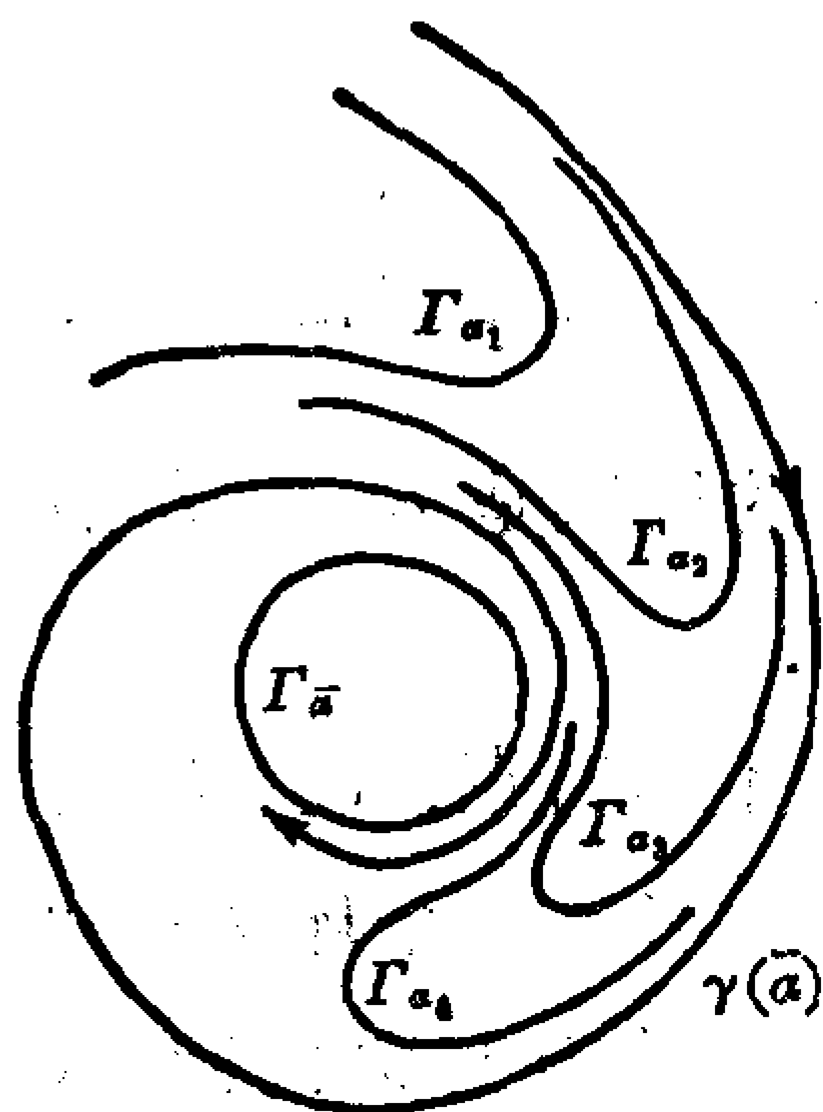


图 3·3

次设$\gamma(\bar{\alpha})$正向（或负向）盘近$F(\bar{\alpha})$的极限环$\Gamma_{\bar{\alpha}}$，则$\Gamma_{\bar{\alpha}}$也是R的境界线，所以在它的任何邻近应存在$F(\alpha_n)$的闭轨线，n很大，$\alpha_n\to\bar{\alpha}$. 这些闭轨线互不相交，一个包含一个地，如图3·3所示. 当n足够大时，Γ_{α_n}可以任意接近$\Gamma_{\bar{\alpha}}$，但不能把它包含在内部，假如$\gamma(\bar{\alpha})$是从$\Gamma_{\bar{\alpha}}$的外侧盘近$\Gamma_{\bar{\alpha}}$的话. 这样，如图3·3，我们就不可能在$\Gamma_{\bar{\alpha}}$的外部找到一个小邻域，使对一切与$\bar{\alpha}$相当接近的α_n都满足§1定理1·1的要求了.

下面假设方程(3·1)中的P，Q有关于x，y，α的一阶连续偏

导数，且当 $\alpha=0$ 时方程(3·1)以 $O(0, 0)$ 为初等奇点。于是在 O 附近(3·1)可改写为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=a(\alpha)x+b(\alpha)y+\bar{P}(x, y, \alpha),\\ \frac{dy}{dt}&=c(\alpha)x+d(\alpha)y+\bar{Q}(x, y, \alpha), \end{aligned} \tag{3·17}$$

其中 $\bar{P}$, $\bar{Q}$ 是关于 x, y 的高阶无穷小，又

$$\Delta(0)=a(0)d(0)-b(0)c(0)\neq 0. \tag{3·18}$$

由定理 3·1 知道 O 的指标不随 α 而变，故 $\Delta(\alpha)$ 不可能变号。今再设

$$\Delta(\alpha)>0,\ a(0)+d(0)\neq 0, \tag{3·19}$$

则 O 是 $F(0)$ 的粗焦点或结点，注意

$$a(\alpha+T)=P_x(0, 0, \alpha+T)=-kP_x(0, 0, \alpha)=-ka(\alpha),$$

$$d(\alpha+T)=Q_y(0, 0, \alpha+T)=-kQ_y(0, 0, \alpha)=-kd(\alpha),$$

可知 $a(T)+d(T)$ 与 $a(0)+d(0)$ 异号，故在区间 $(0, T)$ 中至少有一个 $\alpha=\alpha_0$ 使 $a(\alpha_0)+d(\alpha_0)=0$. 这时 O 是 $F(\alpha_0)$ 的一次近似方程的中心点，但 O 对 $F(\alpha_0)$ 却不一定. 如果 O 是 $F(\alpha_0)$ 的中心点，则由定理 3·2 知道，对 $\alpha\not\equiv\alpha_0 \pmod T$，$F(\alpha)$ 在 $F(\alpha_0)$ 的周期环所充满的 O 的邻域中没有闭轨线. 如果 O 不是 $F(\alpha_0)$ 的中心点，则它是 $F(\alpha_0)$ 的稳定或不稳定细焦点，这时可以证明下一重要的定理(它是熟知的所谓 Hopf 分枝定理在平面定常系统的复述，但条件较弱)，它在本书后半部有极大的用处.

定理 3·7 设 $\Delta(\alpha_0)>0$, $a(\alpha_0)+d(\alpha_0)=0$, O 是 $F(\alpha_0)$ 的稳定焦点. 又设当 $\alpha>\alpha_0$ 时 $a(\alpha)+d(\alpha)>0$(即 O 已变为 $F(\alpha)$ 的不稳定焦点了)，则当 α 从 α_0 增加时，点 O 附近至少出现 $F(\alpha)$ 的一个外稳定环和一个内稳定环(可能重合为一个稳定环).

【证】 由假设知道，存在 O 的一个小邻域 U，它被 $F(\alpha_0)$ 的螺线所充满(图 3·4)，且这些螺线都以 O 为其唯一的 ω 极限点. 在 U 中取一点 $A\neq 0$，则由 A 出发的 $F(\alpha_0)$ 的正半轨线 $\gamma^+(A, \alpha_0)$ 将

交 $F(\alpha_0)$ 在 A 的法线段于一点 B，且 O 点应位于由 $\gamma^+(A, \alpha_0)$ 上的螺线段 $\widehat{AB}$ 与 A 点的法线段 $\overline{AB}$ 所包围的单连通区域中. 根据解对参数的连续性可知，只要 $\alpha_1>\alpha_0$，且 $\alpha_1-\alpha_0$ 足够小，则对一切位于 α_0 与 α_1 之间的 α，由 A 点出发的 $F(\alpha)$ 的正半轨线 $\gamma^+(A, \alpha)$ 将交 $\overline{AB}$ 于它的内点，并且 $\overline{AB}$ 对 $F(\alpha)$ 来说是截线，亦即 $F(\alpha)$ 的一切轨线在穿过 $\overline{AB}$ 以后都将进入前面所说过的单连通区域. 另一方面，O 又是 $F(\alpha)$ 的不稳定焦点，故由环域定理即得本定理的证明.

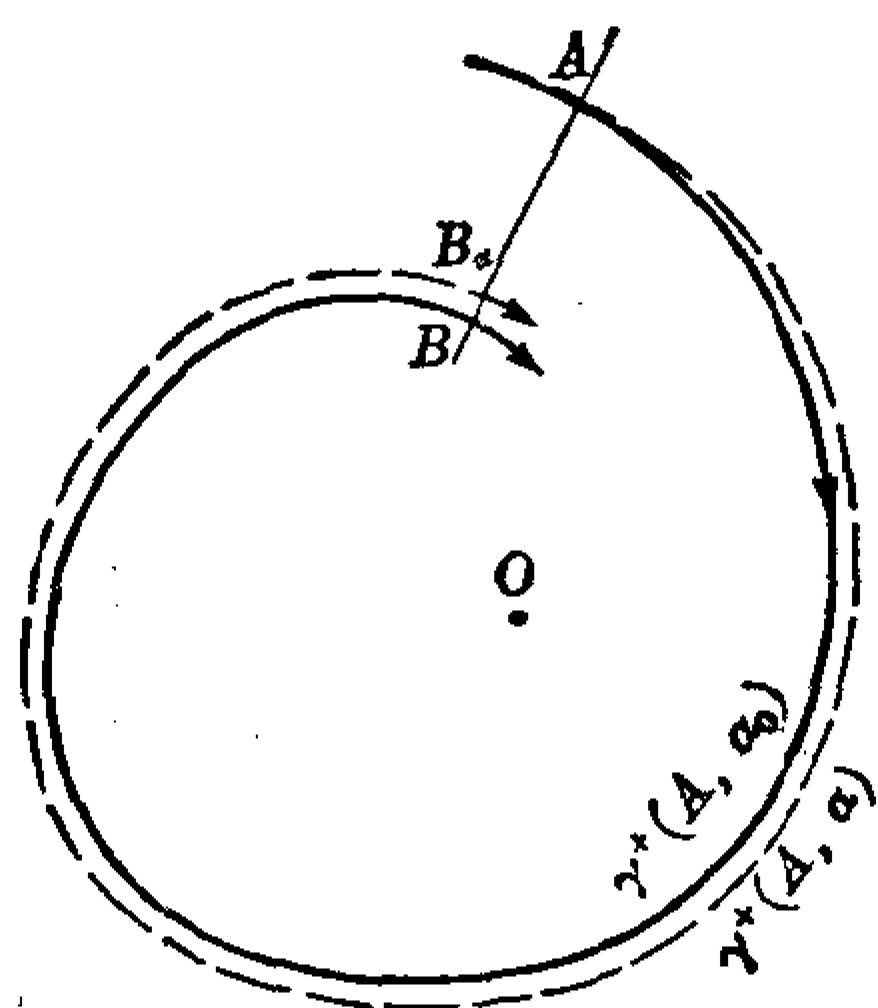


图 3·4

注意：对于本定理，旋转向量场的条件只是保证当 α 从 O 变到 T 时，指标为 $+1$ 的初等奇点一定会改变稳定性，从而对于某一区间中的 α 值，在这种奇点的外围一定存在极限环，它们的全部遮盖了一个区域. 如果(3·1)当 α 变动时不构成旋转向量场，但只要它的初等奇点 O 能改变稳定性(自然还是通过细焦点)，例如在 $\alpha=\alpha_0$ 的时候. 那末由定理 3·7 的证明可知[1)]：如果当 $\alpha=\alpha_0$ 时 O 是稳定焦点，那末对于使 O 为不稳定焦点的那些 α (位于 α_0 邻近)，在 O 外围，方程(3·1)必有稳定环；反之，如果当 $\alpha=\alpha_0$ 时 O 是不稳定焦点，则对使 O 为稳定焦点的那些(位于 α_0 邻近的)α，在 O 外围，方程(3·1)必有不稳定环.

其次我们要讨论鞍点的分界线和由分界线所构成的分界线环在旋转向量场中的行为，以及由分界线环所产生的极限环的稳定性等问题. 在这方面除 G. F. D. Duff 和 A. A. Андронов, E. A. Леонтович 在六十年代的工作以外，还有马知恩近几年来所做的工作[51]. 此外，下面将要介绍的某些结论并不要求 $F(\alpha)$ 是旋转向

1) 证明中只用到 O 在 α_0 改变稳定性这一点.

量场族.

定理3·8[291] 设 $F(\alpha)$ 为一旋转向量场的完全族, $0\leqslant\alpha<T$, 扇形域 AOB 是 $F(\alpha_0)$ 在奇点 O 的任一双曲域(图3·5), 那末当 α 由 α_0 增大时, 此双曲域的两侧边 $\widehat{OA}$ 与 $\widehat{OB}$ 将绕 O 点逆时针地连续转动, 且当 α 变到 α_0+T 时 $\widehat{OB}$ 将转到 $\widehat{OA}$ 的位置.

【证】 以 O 为心作足够小的圆弧 $\widehat{AB}$, 使从双曲域中围出一个有界域 G, 它的内部不含 $F(\alpha)$ 的奇点, 且被 $F(\alpha_0)$ 的双曲轨线所充满. 由于向量场的旋转性质, 当 $\alpha>\alpha_0$ 时 $F(\alpha)$ 的轨线与 G 的两侧边 $\widehat{OA}$, $\widehat{OB}$ 相遇者均由正向进入域 G. 设 M 为 $\widehat{OB}$ 上任一点, 则 $\gamma^+(M,\alpha)$, $(\alpha>\alpha_0)$, 进入 G 后, 既不能由 $\widehat{AO}$ 跑出, 也不可能进入 O 点, 否则它将在 G 中与 $F(\alpha)$ 的某一轨线相切, 不可能. 故 $\gamma^+(M,\alpha)$ 必由 $\widehat{AB}$ 上某一点 N 跑出域 G. 当 M 点向 O 不断接近而趋向 O 时, N 点将沿 $\overset{\frown}{\overrightarrow{BA}}$ 方向单向地移动, 但又不能越过 A 点, 故必存在极限点 $\overline{N}$. 易证过 $\overline{N}$ 的 $F(\alpha)$ 的负半轨必进入奇点 O.

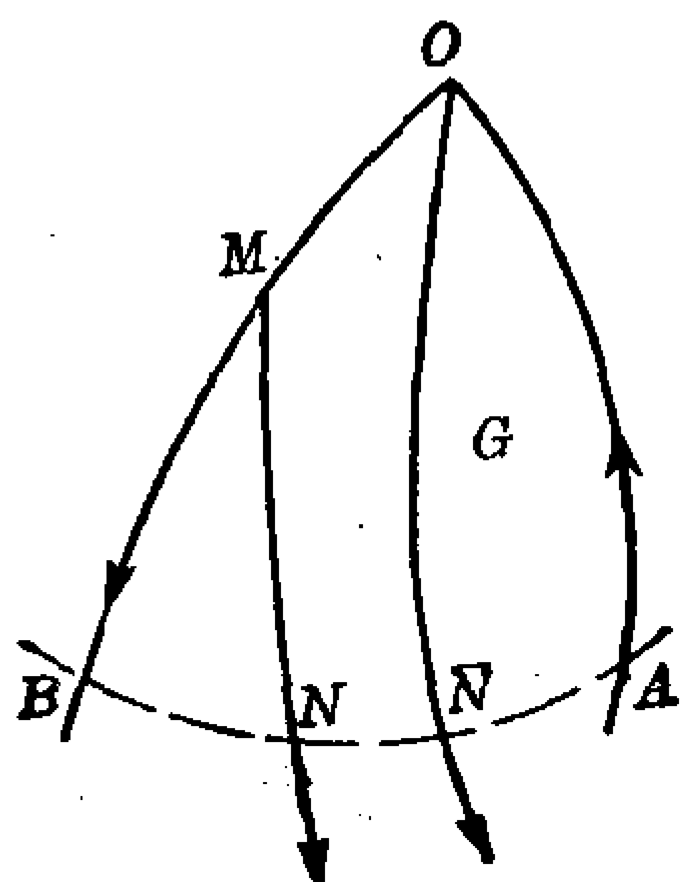


图 3·5

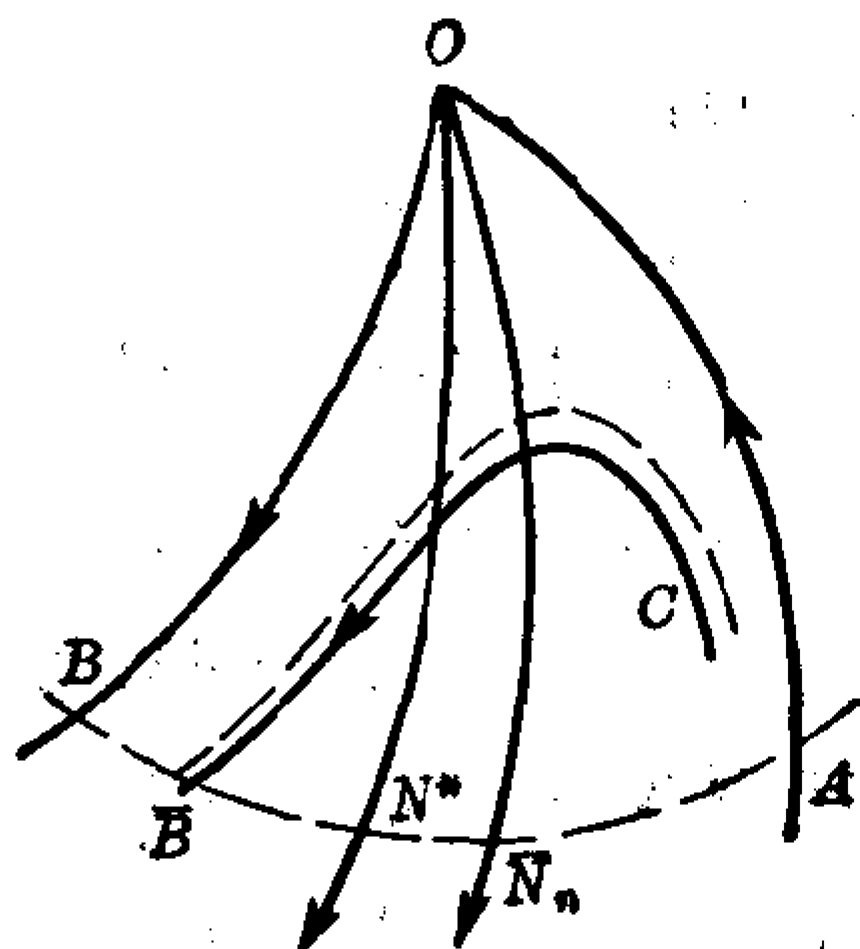


图 3·6

现在证明: 当 $\alpha\to\alpha_0$ 时 $\widehat{O\overline{N}}$ 将趋于和 $\widehat{OB}$ 重合. 为此任取一单调减少而趋于 α_0 的参数序列 $\{\alpha_n\}$, 设向量场 $F(\alpha_n)$ 在 G 内负向进入 O 的轨线与圆弧 $\widehat{AB}$ 的交点为 $\overline{N}_n$ (如果这种轨线不止一条,

则取最靠近 $\widehat{OB}$ 的那一条作为 $\widehat{ON_n}$）. 由(3·5)易证明，随着 $n\to\infty$, $\bar{N}_n$ 将沿 $\overrightarrow{AB}$ 方向单调地向 B 点靠近，但它又不能超过 B 点，故 $\bar{N}_n$ 必有极限位置，设它为 N^*. 今证 $N^*=B$. 如果不是，则 N^* 应在 B 点的右方，这时 $F(\alpha_0)$ 过 $\widehat{BA}$ 上 B 点与 N^* 点之间的 $\bar{B}$ 的负半轨 $\gamma^-(\bar{B},\alpha_0)$ 必能到达邻近于 $\widehat{AO}$ 的 C 点(图 3·6). 根据解对参数的连续性，当 n 充分大，即 $|\alpha_n-\alpha_0|\ll 1$ 时 $\gamma^-(\bar{B},\alpha_n)$ 也将到达 C 点的附近. 但这是不可能的，因为 $F(\alpha_n)$ 已有过 $\bar{N}_n$ 负向进入 O 点的轨线把 $\bar{B}$ 与 C 隔开. 因此必有 $N^*=B$. 再注意到 $\widehat{AB}$ 为 O 邻域内与双曲域的两侧边相交的任一圆弧，就知道 $\widehat{OB}$ 将随 α 连续地向逆时针方向转动.

由于 $F(\alpha_0+T)$ 与 $F(\alpha_0)$ 具有同样的轨线，但正负向相反，且当 $\alpha_0\leqslant\alpha<\alpha_0+T$ 时有(3·5)式成立，所以当且仅当 α 变到 α_0+T 时 $\widehat{OB}$ 才旋转到 $\widehat{OA}$ 的位置. 定理证毕[1].

推论 设 $F(\alpha)$ 为一旋转向量场的完全族，$0\leqslant\alpha<T$, 则当 α 变动时鞍点 O 的四条分界线都绕 O 点逆时针转动[1]. 当 α 从 0 变动到 T 时，离开(进入) O 点的分界线正好转到进入(离开) O 点的分界线的位置.

由此推论立即可知，在旋转向量场族 $F(\alpha)$ 中，当 α 由 α_0 变动时 $F(\alpha_0)$ 的过鞍点的分界线环必定破裂[2]. 为了研究分界线环破裂后在其附近什么时候会出现极限环，我们先介绍一个较古典的，判别分界线环稳定性的定理，但采用[51]的证法.

定理 3·9 设方程(2·1)有过唯一鞍点 N 的分界线环 Γ_0, 且过 N 的另二条分界线位于 Γ_0 的外部. 如果 P, Q 为一次连续可

---

1) 注意，这里必须要求旋转向量场在参数的有限区间上构成完全族，且向量场在 O 的邻域中处处旋转，否则这一结论不成立. 例如 $\frac{dx}{dt}=y$, $\frac{dy}{dt}=x+\alpha x^2y$, 它对 $0\leqslant\alpha<\infty$ 构成完全族，但向量场在两直线 $x=0$ 与 $y=0$ 上不旋转. 这时一切进入(离开) O 的轨线都有固定的斜率 ±1, 不论 α 取什么数值.

2) 注意推论前面一段的尾注.

微，且在 N 点有

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}<0 \quad (>0), \tag{3·20}$$

则 Γ_0 为内侧稳定(不稳定)[1].

【证】 下面仅就$(P_x+Q_y)_N<0$情况立论. 不妨设 Γ_0 为负定向. 作旋转向量场的完全族

$$F(\alpha): \quad \frac{dx}{dt}=\bar{P}(x, y, \alpha), \quad \frac{dy}{dt}=\bar{Q}(x, y, \alpha),$$

使(2·1)成为 $F(0)$, 例如, 可以由(2·1)出发作均匀旋转向量场. 设 $\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}>0$, 因为$(\bar{P}_x(x, y, 0)+\bar{Q}_y(x, y, 0))_N<0$, 由连续性可知必存在 N 的 δ 圆形邻域以及 $\eta>0$, 使当(x, y)在此邻域中且$|\alpha|<\eta$时有

$$\bar{P}_x(x, y, \alpha)+\bar{Q}_y(x, y, \alpha)\leqslant -a<0. \tag{3·21}$$

我们首先证明: 在 Γ_0 的足够小的内邻域中不存在 $F(0)$的闭轨线. 假如不然, 在 Γ_0 位于 N 的 δ 邻域内的两分界线上分别取常点 A_1 与 A_2(图 3·7). 轨线段 $\widehat{A_1RA_2}$ 所对应的时间是有限的, 设为T_0, 而轨线段 $\widehat{NA_1}$ 与 $\widehat{A_2N}$ 所对应的时间均为无限大. 由于 P_x+Q_y 连续, 故它在 Γ_0 内部有界, 设 $P_x+Q_y<M$. 根据解对初值的连续性, 可取 A_1 的邻域 β_1 很小, 以及 A_2 的十分小的邻域 β_2, 使从 $F(0)$的闭轨线 Γ 上位于 β_2 中的任一点 A_2' 跑到 β_1 中的任一点 A_1' 的时间都大于 $\frac{2MT_0}{a}$. 又设 Γ 与 N 的 δ 邻域的边界的交点为 B_1, B_2. 于是

$$\oint_{\Gamma}(P_x+Q_y)\,dt=\oint_{\widehat{B_1BB_2}}(P_x+Q_y)\,dt+\int_{\widehat{B_2A_2'}}(P_x+Q_y)\,dt$$
$$+\int_{\widehat{A_2'A_1'}}(P_x+Q_y)\,dt+\int_{\widehat{A_1'B_1}}(P_x+Q_y)\,dt.$$

注意上式右边第二, 第四两积分为负, 以及前面所作的估计, 可得

1) 此定理在[162]中已被推广到通过多于一个鞍点的奇闭轨线的情况.

$$\oint_{\Gamma}(P_x+Q_y)dt<MT_0-a\cdot\frac{2MT_0}{a}<0. \qquad (3\cdot22)$$

如果 Γ_0 的任意内侧邻域内都有 $F(0)$ 的闭轨线 Γ，则 Γ 或是周期环，或是一系列极限环中之一．在前一情况应有

$$\oint_{\Gamma}(P_x+Q_y)dt=0,$$

与(3·22)矛盾．在后一情况，则与 Γ 相邻的极限环也不满足(3·22)，故在 Γ_0 的足够小内邻域中不可能存在 $F(0)$ 的闭轨线．

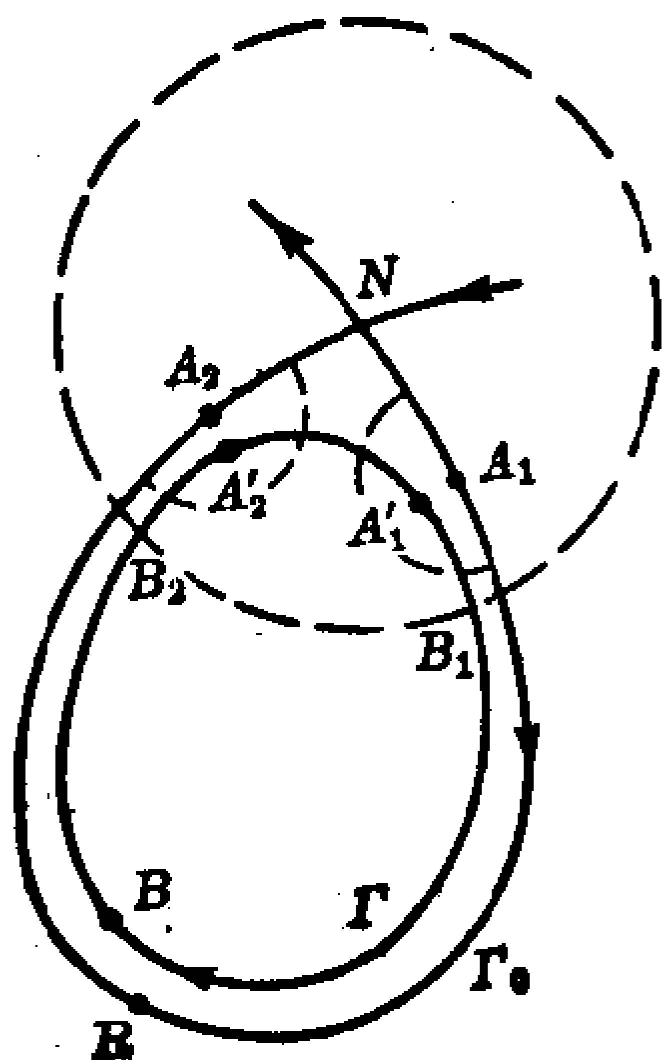


图 3·7

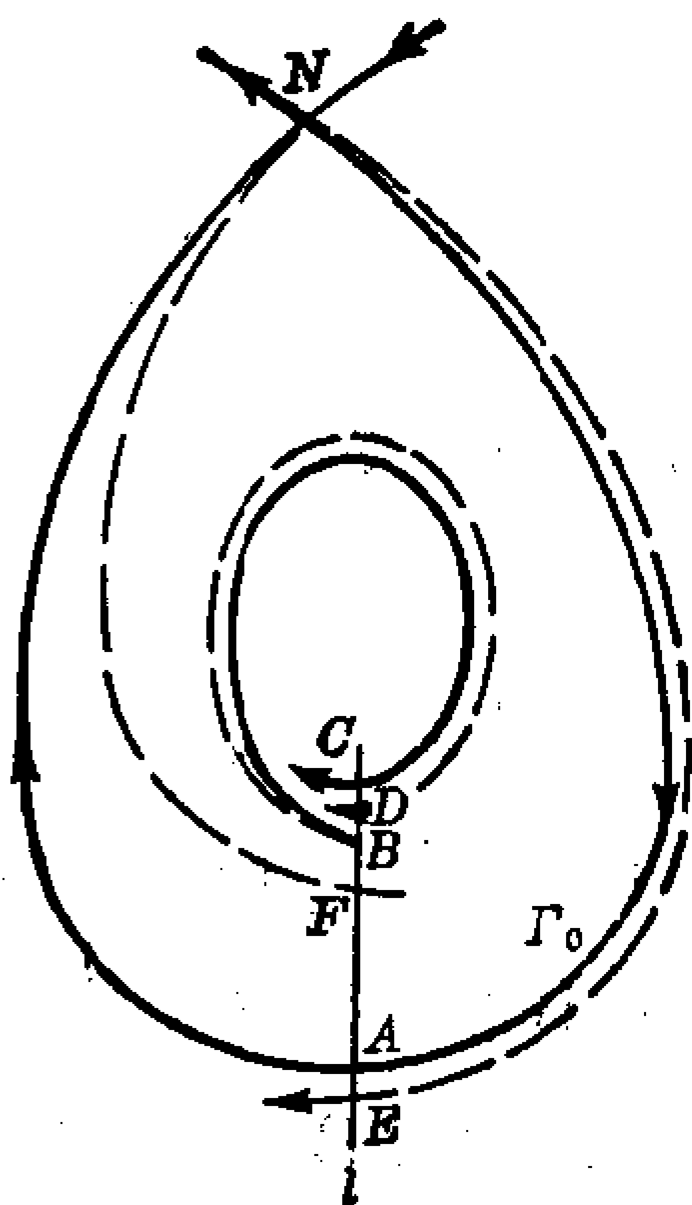


图 3·8

现在来证明本定理．由上可知 Γ_0 或为内侧稳定，或为内侧不稳定，二者必居其一．假设 Γ_0 为内不稳定，我们来导出矛盾，在 Γ_0 上任一常点 A 处作 $F(0)$ 的足够短的截线 l，使过 l 上一点 B 的 $F(0)$ 的正半轨线再次交 l 于 C，而 B 在 A 与 C 之间．当 $0<\alpha\ll1$ 时 l 也将是 $F(\alpha)$ 的截线，且 $F(\alpha)$ 的过 B 的正半轨线将再次交 l 于 B 与 C 之间的一点 D（图 3·8）．另一方面，由定理 3·8 知 $F(\alpha)$ 的离开 N 的那条分界线将与 l 交于 Γ_0 外部一点 E，而进入 N 的分界线则将与 l 交于 Γ_0 内部一点 F．于是 $F(\alpha)$ 的轨线 $\widehat{NE}$，$\widehat{NF}$，$\widehat{BD}$ 与截线段 $\overline{DE}$，$\overline{FE}$ 构成满足定理 1·6 推论的环域，故其中至少存在 $F(\alpha)$ 的一个外不稳定环和一个内不稳定环（可能重合）．容易看出，它们都应位于 Γ_0 的内部．于是沿着

这种环应有

$$\oint(\bar{P}_x(x, y, \alpha)+\bar{Q}_y(x, y, \alpha))dt\geqslant 0.$$

但另一方面，根据解对参数和初值的连续性，只要 B 点与 A 点足够接近，且 $|\alpha|$ 足够小，则上述积分应小于零，矛盾. 这样，Γ_0 必为内稳定，证毕.

注意：本定理的证明并未用到鞍点的全部性质，实际上只要在奇点 N 成立(3·20)式，而 Γ_0 是通过唯一奇点 N 的奇闭轨线，且没有其他的 Γ_0 内部的轨线通过 N (即 N 在 Γ_0 内部为双曲域)，则定理 3·9 的结论便成立.

应当指出，如果在 N 有 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0$, 则过 N 点的分界线环 Γ_0 的稳定性不能确定.

例 3 考虑方程

$$\frac{dx}{dt}=2y=P(x, y), \frac{dy}{dt}=2x-3x^2+\alpha y(x^3-x^2+y^2)=Q(x, y). \tag{3·23}$$

它有过鞍点 $O(0, 0)$ 的分界线环 Γ_0: $x^3-x^2+y^2=0$, 这里

$$P_x(0, 0)+Q_y(0, 0)=0.$$

但取 $V(x, y)=x^3-x^2+y^2$, 容易算出沿方程的轨线有

$$\frac{dV}{dt}=2\alpha y^2(x^3-x^2+y^2).$$

可见当 $\alpha<0$ 时 Γ_0 为内侧稳定，当 $\alpha>0$ 时 Γ_0 为内侧不稳定.

下面讨论由过鞍点的分界线环产生极限环的问题. 先考虑 $F(\alpha)$ 是旋转向量场的情况.

定理 3·10[52] 设方程(3·1)关于 α 构成旋转向量场的完全族，Γ_0 是 $F(\alpha_0)$ 过鞍点 N 的分界线环. 如果在 N 点有

$$\frac{\partial P(x, y, \alpha_0)}{\partial x}+\frac{\partial Q(x, y, \alpha_0)}{\partial y}<0 \quad (>0), \tag{3·24}$$

则当 α 从 α_0 向适当方向变动时，在 Γ_0 的内侧邻近将产生 $F(\alpha)$

的唯一的稳定(不稳定)极限环，而当 α 向另一方向变动时 Γ_0 消失，且在其邻域内亦不存在极限环.

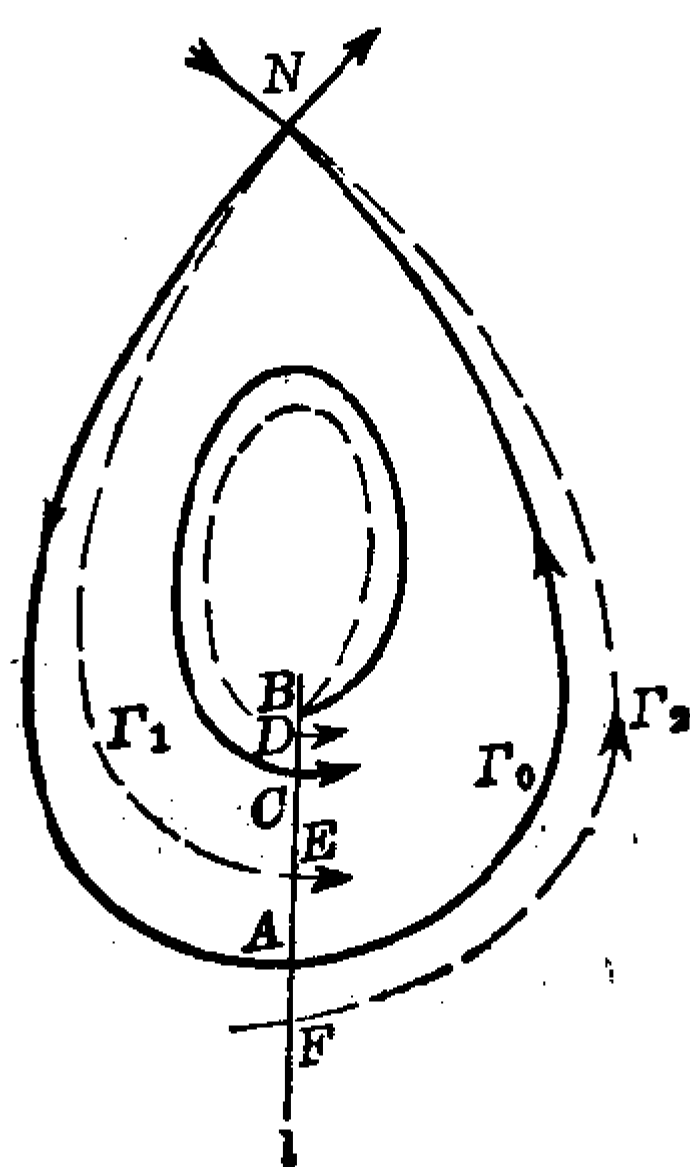


图 3·9

【证】 仅就 Γ_0 内侧稳定的情况来证明. 如图 3·9，设 Γ_0 正定向. 在 Γ_0 上任取一点 A，过 A 作法线段 l，当 l 上的点 B 与 A 足够接近时，过 B 的正半轨线 $\gamma^+(B, \alpha_0)$ 将再交 l 于 A 与 B 之间的一点 C. 让 α 从 α_0 增加到 α_1，$|\alpha_1-\alpha_0|\ll 1$，可使 $F(\alpha_1)$ 过 B 点的正半轨线 $\gamma^+(B, \alpha_1)$ 再交 l 于 B 与 C 之间的一点 D，并且 l 上的 $\overline{BD}$ 线段仍保持为截线. 另一方面，$F(\alpha_1)$ 已不再存在分界线环，$F(\alpha_1)$ 的从 N 离开的分界线 Γ_1 永远保持在 Γ_0 的内部，进入 N 的分界线 Γ_2 永远保持在 Γ_0 的外部，设它们分别与 l 交于 E 和 F，且 $\overline{EF}$ 对 $F(\alpha_1)$ 仍保持为截线. 仿前定理的证明中那样我们得到一个环域，其中至少存在一条外侧稳定和一条内侧稳定的闭轨线(可能重合). 事实上，仿定理 3·9 的证明中一样可证，所产生的是唯一的一条稳定极限环.

根据定理 3·2 可知，这时随着 α 的增加，分界线环 Γ_0 产生的稳定环向内单调缩小而完全遮盖了 Γ_0 的内邻域，同时也可知道，当 α 从 α_0 减小时，在此邻域中不可能有 $F(\alpha)$ 的闭轨线了. 定理证毕.

注意：如果在奇点 N 有

$$\frac{\partial P(x, y, \alpha_0)}{\partial x}+\frac{\partial Q(x, y, \alpha_0)}{\partial y}=0, \qquad (3\cdot 25)$$

那末即使 Γ_0 为内稳定(内不稳定)，在旋转向量场族中，由它所产生的 $F(\alpha)$ $(\alpha\neq\alpha_0)$ 的极限环的唯一性也不一定有保证.

例 4 将例 2 中的方程 (3·14) 右边各乘上因子 $[(x-r_0)^2+y^2]$，所得的方程就添加了一个高阶奇点 $(r_0, 0)$，从而 $r=r_0$ 也就

变为分界线环了. 显见在$(r_0, 0)$, 条件(3·25)成立. 在圆 $r=r_0$ 以外之处新旧方程的轨线完全一样. 因此, 根据例 2 的分析可知, 当向量场作均匀旋转时, 由 $\alpha=0$ 时的分界线环能产生 $\alpha\neq 0$ 时多于一个的极限环.

与细焦点产生极限环的定理 3·7 相类似, 我们可以给出过细鞍点(即在此点有 $P_x+Q_y=0$)的分界线环产生极限环的一个充分条件(不限于旋转向量场).

定理 3·11[51] 设有含参数 α 的方程

$$F(\alpha):\quad \frac{dx}{dt}=P(x, y, \alpha),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x, y, \alpha), \tag{3·1}$$

其中 P, Q 关于 x, y, α 连续可微. 设 $F(\alpha)$有鞍点 N, 它不随 α 而移动. 又设当$|\alpha-\alpha_0|\ll 1$ 时 $F(\alpha)$始终存在经过 N 的分界线环 Γ_α(它的位置可以随 α 而连续移动). 如果

$$P_x(x, y, \alpha_0)+Q_y(x, y, \alpha_0)|_N=0,$$

且 Γ_{α_0} 是 $F(\alpha_0)$的内稳定(不稳定)分界线环, 而当 $0<|\alpha-\alpha_0|\ll 1$ 时有

$$P_x(x, y, \alpha)+Q_y(x, y, \alpha)|_N>0 \quad (<0), \tag{3·26}$$

则在 Γ_α 的内侧邻域内必至少存在 $F(\alpha)$的一个外稳定(外不稳定)的极限环和一个内稳定(内不稳定)极限环(它们可能重合).

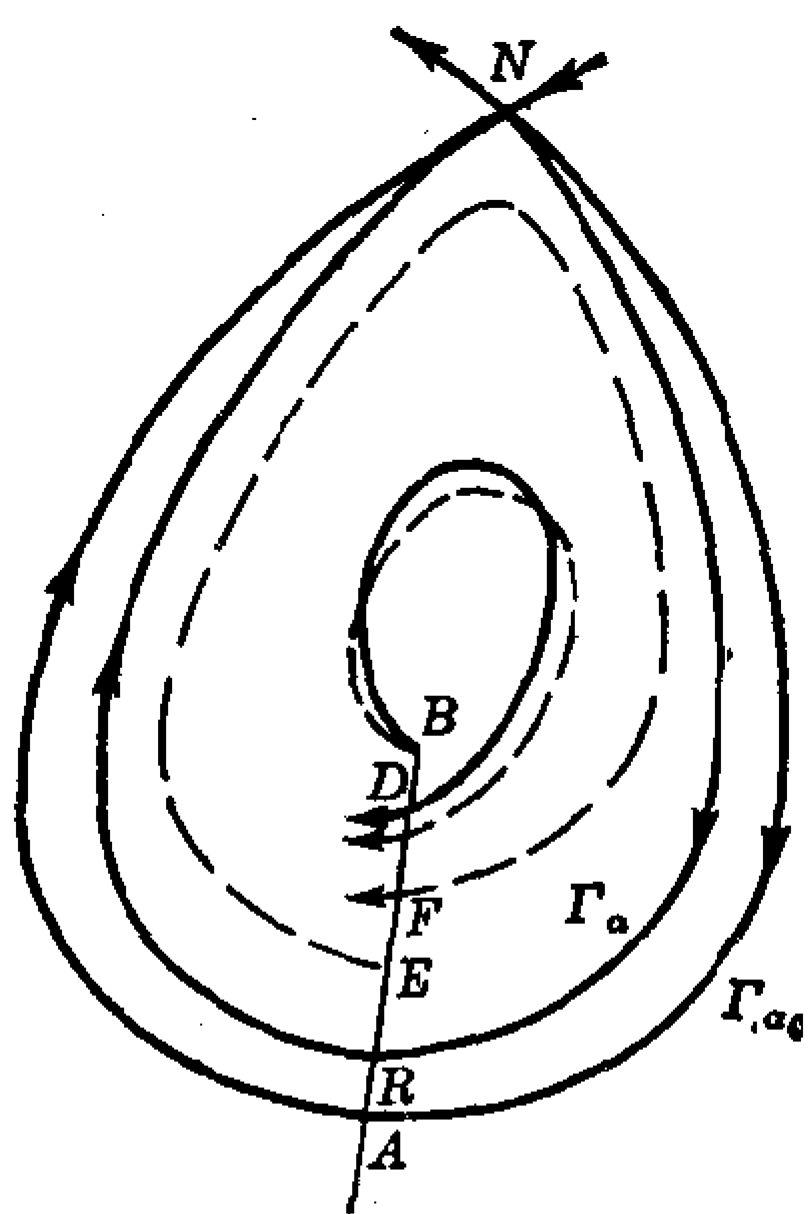


图 3·10

【证】 现在仅就 Γ_{α_0} 为内侧稳定, 且发散量 P_x+Q_y 在 N 大于零的情况来证明. 不妨设 Γ_{α_0} 为负定向. 在 Γ_{α_0} 上任一常点 A 作 $F(\alpha_0)$的截线 l, 由 Γ_{α_0} 内侧稳定以及 $F(\alpha)$关于 α 的连续性, 仿前可知当 $0<\alpha-\alpha_0\ll 1$ 时 $F(\alpha)$的过 B(位于 Γ_{α_0} 内部的 l 上, 且与 A 足够接近)的正半轨

$\gamma^+(B,\alpha)$将再次交 l 于 A 与 B 之间的一点 D. 易见 Γ_α 必位于由 $\gamma^+(B,\alpha)$与 $\overline{DB}$ 所围区域的外部(图3·10), 设 Γ_α 与 l 的交点为 R.

另一方面, 因为当 $0<|\alpha-\alpha_0|\ll 1$ 时(3·26)中成立>的关系, 所以 Γ_α 为内侧不稳定, 从而在 Γ_α 的足够小的内邻域中, $F(\alpha)$的过 l 上与 R 足够接近的点 E 的正半轨 $\gamma^+(E,\alpha)$将再次交 l 于 E 与 D 之间的点 F. 这样, 在 $\gamma^+(B,\alpha)$, $\gamma^+(E,\alpha)$与截线段 $\overline{BD}$, $\overline{EF}$ 所构成的环域中, 应用环域定理, 便得到本定理的结论.

注意: 定理3·11 的证明与定理3·10 的证明很类似, 但现在的问题是定理3·11 的那些假设条件是否都能成立? 这一点看起来不象定理3·10 或定理3·7 那样明显. 下面是[51]中所举出的具体例子.

例5 考察含参数 α 的方程

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=(1-5\alpha)x+\frac{17\alpha-5}{6\alpha}y^2-\frac{2(\alpha-1)}{3\alpha^2}x^2y\\&\quad+36\alpha^2xy^2-6\alpha y^4-192\alpha x^3y+192x^5+24x^2y^3\\&=P(x,y,\alpha),\\\frac{dy}{dt}&=2(3\alpha-1)y+\frac{16(1-4\alpha)}{3\alpha}x^2-\frac{2(\alpha-1)}{3\alpha^2}xy^2\\&\equiv Q(x,y,\alpha).\end{aligned}\tag{3·27}$$

容易验证当 $\alpha>\frac{1}{2}$ 时原点 O 是(3·27)的鞍点. 记

$$F(x,y,\alpha)=8x^3+y^3-6\alpha xy,$$

F 沿着(3·27)的轨线的全导数为

$$\frac{dF}{dt}=(8x^3+y^3-6\alpha xy)\Big[(\alpha-1)\Big(1-\frac{2}{\alpha^2}xy\Big)+(24x^2-6\alpha y)^2\Big].$$

显见当 $\alpha>\frac{1}{2}$ 时, (3·27)始终存在经过鞍点 O 的分界线环

$$\Gamma_\alpha:\quad 8x^3+y^3-6\alpha xy=0. \tag{3·28}$$

由于 $P_x(0, 0, \alpha)+Q_y(0,0,\alpha)=\alpha-1$, 故由定理 3·9 知道: 当 $\frac{1}{2}<\alpha<1$ 时 Γ_α 为内侧稳定; 当 $\alpha>1$ 时 Γ_α 为内侧不稳定; 当 $\alpha=1$ 时出现临界情况. 这时

$$\frac{dF}{dt}=(8x^3+y^3-6xy)(24x^2-6y)^2,$$

从而在 Γ_1 内部有 $\frac{dF}{dt}<0$. 不难看出, 此时 Γ_1 为内侧不稳定. 因此根据定理 3·11 可知, 当 α 由 1 减小时, 在 Γ_α 的内邻域中将产生 $F(\alpha)$ 的不稳定极限环.

实际上, 当 $\alpha=1$ 时方程(3·27)可化成

$$\frac{dx}{dt}=-4x+2y^2+6(8x^3+y^3-6xy)(4x^2-y),$$

$$\frac{dy}{dt}=4(y-4x^2),$$

此方程除鞍点 O 以外还有一个奇点 $M\left(\frac{1}{2},1\right)$, 它位于分界线环 Γ_1 的内部, 且为稳定粗焦点. 故当 $|\alpha-1|\ll1$ 时, Γ_α 内部也只有唯一的奇点, 它仍是稳定粗焦点. 但当 $\alpha<1$ 时, 因 Γ_α 为内侧稳定, 故在 Γ_α 内部必有不稳定环 $\overline{\Gamma}_\alpha$, 它把奇点 M 包含在其内部. 当 α 增大至 1 时 $\overline{\Gamma}_\alpha$ 变为 Γ_1, 使 Γ_1 改变了稳定性.

应当注意, 在向量场族 $F(\alpha)$ 中, 当 α 变动时, 除了奇点和分界线环可能产生极限环以外, 也可能由于轨线的凝聚而突然产生极限环. 这一事实由定理 3·5 便可看出, 因为既然半稳定环 Γ_{α_0} 当 α 向某一方向变动时会消失, 那末如果 α 的变动方向倒过来, 情况自然就是这样: 原来 $F(\alpha)$ 没有极限环, 在 $\alpha=\alpha_0$ 时突然出现半稳定环 Γ_{α_0}, 然后 Γ_{α_0} 就分裂为至少两个极限环了. 在下一节中将证明这种突然产生的极限环必定是多重环, 当 $F(\alpha)$ 不构成旋转向量场族时这多重环不一定是半稳定环. 如何判别一个含参数的方

程当参数变动时(即使构成旋转向量场族)能否突然产生多重环，这是一个很重要但也是很困难而尚未解决的问题.

下面介绍关于旋转向量场理论的推广问题. 在本节开始时已经提到许多人对 Duff 的条件予以减轻，例如，不要求 P, Q 存在偏导数，让不等式(3·3)也允许成立等号，不要求(3·4)成立，等等，而希望 Duff 的主要结论，即不相交定理 3·2 仍能保证成立. 陈翔炎较多地从几何角度来考虑这个问题，认为要保证定理 3·2 成立，关键问题在于证明下一从直观上看来明显，而要作严格的证明却并不容易的引理. 由于他终于找到了证明这个引理的方法，所以他对 Duff 理论的推广比其他一些人的工作都更好一些. 现在就来介绍这个引理.

引理[50] 设 L_0 是逐段光滑的单闭曲线，其参数方程为 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. 在 φ', ψ' 存在的点记

$$\Theta(t)=\varphi'(t)Q(\varphi(t),\ \psi(t))-\psi'(t)P(\varphi(t),\ \psi(t)),$$

设当 t 增加时 L_0 为正定向，且 $\Theta(t)\geqslant 0$, 则在 L_0 上不存在使方程

$$\frac{dx}{dt}=P(x,\ y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,\ y) \tag{3·29}$$

的轨线当 t 增加时跑到 L_0 外部的点，也不存在使(3·29)的轨线当 t 减少时进入 L_0 内部的点. 如果改 L_0 为负定向，或改使 $\Theta(t)\leqslant 0$, 则结论恰恰相反; 如果同时成立"L_0 为负定向，$\Theta(t)\leqslant 0$"，则引理的结论仍保持成立. 如常，这里假定 P, Q 连续，并能保证(3·29)的解的唯一性.

【证】 条件 $\Theta(t)\geqslant 0$ 相当于: 方程(3·29)的过 L_0 上光滑点的轨线当 t 增加时或者进入 L_0 内部，或者在该点与 L_0 相切. 这一性质显然与 L_0 的参数表示无关，故不失一般性可以认为在 $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ 存在的点恒有 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$; 例如，可取 t 作曲线的弧长. 设 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 的周期为 T, 并且除了在

$t=t_i \quad (i=0, 1, \cdots, n-1), \ t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=t_0+T$
等 n 个点以外, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ 处处存在连续.

今证对任一 $\tilde{t}\in(t_{i-1}, t_i)$, 方程(1)的, 当 $t=\tilde{t}$ 时过 $(\varphi(\tilde{t}), \psi(\tilde{t}))$ 的解 $(x_0(t), y_0(t))$ 在 t 增加时不能离开 L_0 跑到 L_0 外部去. 用反证法, 设存在 $\delta_1>0$ 使当 $t\in(\tilde{t}, \tilde{t}+\delta_1)$ 时 $(x_0(t), y_0(t))$ 位于 L_0 外部. 我们要导出矛盾. 考虑一个辅助的含参数微分方程:

$$\frac{dx}{dt}=P(x, y)-\alpha\psi'(t), \ \frac{dy}{dt}=Q(x, y)+\alpha\varphi'(t), \quad t\in(t_{i-1}, t_i), \ \alpha>0. \tag{3·30}_\alpha$$

设它的满足条件:

$$t=\tilde{t} \text{ 时} \quad x=\varphi(\tilde{t}), \ y=\psi(\tilde{t})$$

的解是 $x=x_\alpha(t)$, $y=y_\alpha(t)$. 由于 $\varphi'^2(\tilde{t})+\psi'^2(\tilde{t})>0$, 故必存在 $\delta_2>0$, $\delta_2<\min(t_i-\tilde{t}, \tilde{t}-t_{i-1})$, 使当 $t', t''\in[\tilde{t}-\delta_2, \tilde{t}+\delta_2]$ 时恒有

$$\varphi'(t')\varphi'(t'')+\psi'(t')\psi'(t'')>0.$$

又因方程 $(3·30)_\alpha$ 的右端函数连续, 故存在 $\delta_3>0$, 使当 $0<\alpha\leqslant1$, $t\in[\tilde{t}, \tilde{t}+\delta_3]$ 时 $(x_\alpha(t), y_\alpha(t))$ 与 L_0 上对应于 $t\in[\tilde{t}+\delta_2, \tilde{t}+T-\delta_2]$ 的弧段不相交. 取 $\delta=\min(\delta_2, \delta_3)$, 先证当 $0<\alpha\leqslant1$, $t\in[\tilde{t}, \tilde{t}+\delta]$ 时 $(x_\alpha(t), y_\alpha(t))$ 必在 L_0 内部. 注意当 $t=\tilde{t}$ 时有

$$y'_\alpha(\tilde{t})\varphi'(\tilde{t})-x'_\alpha(\tilde{t})\psi'(\tilde{t}) =\Theta(\tilde{t})+\alpha[\varphi'^2(\tilde{t})+\psi'^2(\tilde{t})] >0,$$

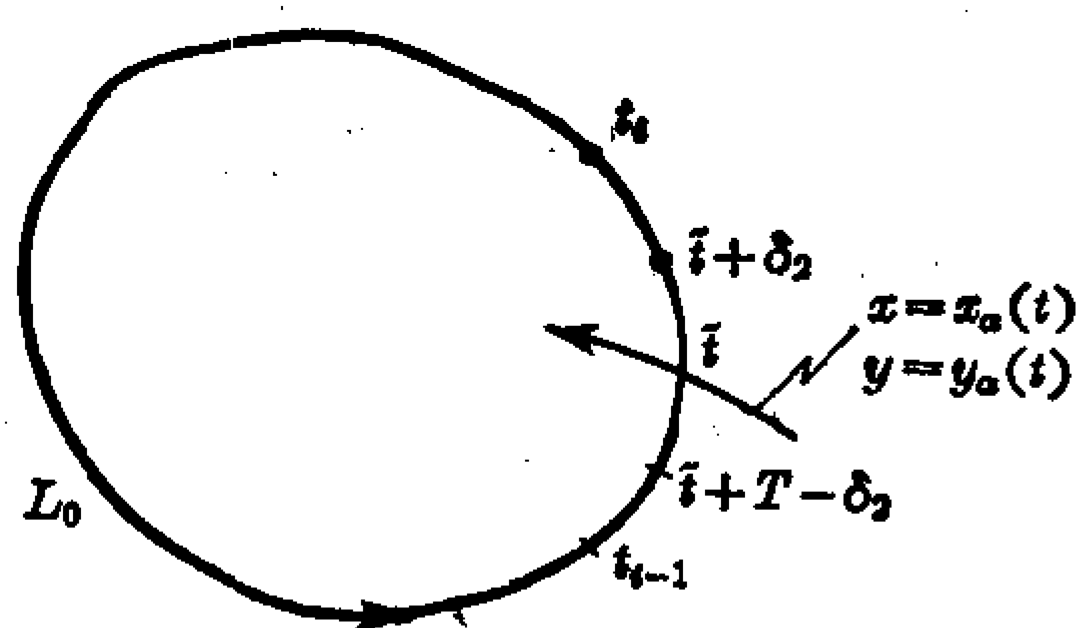


图 3·11

故当 t 从 $\tilde{t}$ 增加时 $(x_\alpha(t), y_\alpha(t))$ 必进入 L_0 内部. 如果在某一 $t_1\in(\tilde{t}, \tilde{t}+\delta]$ 它与 L_0 再次相交于 $(\varphi(t_2), \psi(t_2))$, 即 $x_\alpha(t_1)=\varphi(t_2)$, $y_\alpha(t_1)=\psi(t_2)$, 则 $t_2\in(\tilde{t}-\delta_2, \tilde{t}+\delta_2)$, 且在交点处应有

$$y'_\alpha(t_1)\varphi'(t_2)-x'_\alpha(t_1)\psi'(t_2)\leqslant0.$$

但另一方面又有

$$y'_\alpha(t_1)\varphi'(t_2)-x'_\alpha(t_1)\psi'(t_2)$$
$$=Q(\varphi(t_2),\ \psi(t_2))\varphi'(t_2)-P(\varphi(t_2),\ \psi(t_2))\psi'(t_2)$$
$$+\alpha[\varphi'(t_1)\varphi'(t_2)+\psi'(t_1)\psi'(t_2)]>0,$$

矛盾．这就证明了当 $0<\alpha\leqslant 1$, $t\in(\tilde{t},\ \tilde{t}+\delta]$ 时 $(x_\alpha(t),\ y_\alpha(t))$ 应在 L_0 的内部.

显见当 $0<\alpha\leqslant 1$, $t\in(\tilde{t},\ \tilde{t}+\delta]$时，$\{(x_\alpha(t),\ y_\alpha(t))\}$是一致有界等度连续函数族，且由于方程(3·29)满足解的存在唯一性，利用 Arzela 引理可证

$$\lim_{\alpha\to 0}x_\alpha(t)=x_0(t),\quad \lim_{\alpha\to 0}y_\alpha(t)=y_0(t),\quad t\in[\tilde{t},\ \tilde{t}+\delta]$$

一致地成立，因而当 $t\in[\tilde{t},\ \tilde{t}+\delta]$时$(x_0(t),\ y_0(t))$不可能跑到 L_0 的外部，与假设相矛盾．由于方程(3.29)的过$(\varphi(t_i),\ \psi(t_i))$邻近的点的轨线当 t 增加时已证明不能跑到 L_0 的外部去，故由解对初值的连续性可知，它的过$(\varphi(t_i),\ \psi(t_i))$ 点的轨线当 t 增加时也不能跑到 L_0 的外部去，引理证毕[1)].

现在可以把 §1 定理 1·6 的推论，即环域定理推广如下：

定理 3·12 设 $L_i(i=1,\ 2)$是逐段光滑的单闭曲线，$L_1\supset L_2$, L_i 的参数方程是 $x=\varphi_i(t)$, $y=\psi_i(t)$；在 L_1, L_2 以及由它们所围成的环域 R 内部不含方程(3·29)的奇点．又设对 φ_i, ψ_i 都存在导数的点恒成立

$$\varphi'_1(t)Q(\varphi_1(t),\ \psi_1(t))-\psi'_1(t)P(\varphi_1(t),\ \psi_1(t))\geqslant 0\quad(\leqslant 0),$$
$$\varphi'_2(t)Q(\varphi_2(t),\ \psi_2(t))-\psi'_2(t)P(\varphi_2(t),\ \psi_2(t))\leqslant 0\quad(\geqslant 0),$$

则方程(3·29)当 L_1, L_2 为正定向时在 R 中存在稳定(不稳定)极限环；当 L_1, L_2 为负定向时在 R 中存在不稳定(稳定)极限环.

这一结果比[53]的更好．其次，本节定理 3·2 可推广为：

定理 3·13 如果对两个方程组

1) 若分别考虑 L_0 上使 $\Theta(t)=0$ 的点集（闭）和使 $\Theta(t)>0$ 的点集（开），以及方程(3·29)过这些点的轨线的性态，则本引理的证明可以简化，且不必引入方程 $(3\cdot 30)_\alpha$.

$$\frac{dx}{dt}=P_i(x, y),\ \frac{dy}{dt}=Q_i(x, y) \quad (i=1, 2) \qquad (3\cdot31)_i$$

常成立 $P_1(x, y)Q_2(x, y)-P_2(x, y)Q_1(x, y)\geqslant0(\leqslant0)$, 则它们的闭轨线或者重合或者不相交.

【证】 设 L_i 是方程$(3\cdot31)_i$的闭轨线, 其方程为 $x=\varphi_i(t)$, $y=\psi_i(t)\,(i=1, 2)$. 若 L_1 与 L_2 相交但不重合, 则只有两种可能: 1. L_1 与 L_2 外切或内切; 2. L_2 有在 L_1 外部的点, 也有在 L_1 内部的点. 在前一情况, 在切点处(如果它们沿着整个一段弧相切, 亦即有公共弧段, 则把这整个弧段理解为一点) L_2 当 t 增加和减小时将同时进入 L_1 的内部或外部. 在后一情况, 在 L_1 上必既有 L_2 当 t 增加时进入 L_1 内部, 又有当 t 增加时跑到 L_1 外部的点. 但

$$\begin{aligned}&\varphi_1'(t)Q_2(\varphi_1(t),\ \psi_1(t))-\psi_1'(t)P_2(\varphi_1(t),\ \psi_1(t))\\&\quad=[P_1Q_2-Q_1P_2]_{x=\varphi_1(t), y=\psi_1(t)}\geqslant0 \quad (\leqslant0),\end{aligned}$$

由引理即知前述两种情况都不可能发生, 证毕.

显然, 两方程有公共闭轨线的充要条件是

$$P_1(x, y)Q_2(x, y)-P_2(x, y)Q_1(x, y)=0$$

有闭分支, 且这闭分支是方程的闭轨线.

既然不相交定理 3·2 可以作如上的推广, 那末旋转向量场的定义也就可以作相应的推广了.

定义 3·2 设有含参数向量场族(3·1). 如果对任一固定的 (x_0, y_0) 以及 α_0, 总存在正数 $\delta(x_0, y_0, \alpha_0)$, 使当 $\alpha\in[\alpha_0-\delta, \alpha_0+\delta]$ 时恒有

$$\begin{aligned}&(Q(x_0, y_0, \alpha)P(x_0, y_0, \alpha_0)-P(x_0, y_0, \alpha)Q(x_0, y_0, \alpha_0))\\&\quad\cdot\operatorname{sgn}(\alpha-\alpha_0)\geqslant0 \quad (\leqslant0),\end{aligned} \qquad (3\cdot32)$$

则称(3·1)为平面上的广义旋转向量场.

根据本节前面几个定理的证明方法可知, 除了牵涉到等式(3·4)的结论以外, 其他的结果在定义 3·2 之下都仍旧保持成立.

当然，现在还要加上新的可能性，即：对应于不同参数的向量场有可能有相同的闭轨线.

关于旋转向量场理论在研究极限环的唯一性和二次微分系统(即当(3·29)右边为 x, y 的二次多项式时的系统）的极限环问题中的应用将在以后各节中看到. 现在先来证明两个定理，它说明这种理论可以导出环域定理和得到§1定理1·9的逆定理[48]. 为了叙述简单起见，在下面的定理3·14中对环域的境界线作较强的假设.

定理 3·14　设在方程(3·29)中 $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 为一次连续可微，又存在一个不含奇点的环域 G，它的内外境界线都是二次连续可微曲线，且(3·29)的轨线与 G 的境界线相遇时都从外部进入内部，则(3·29)在 G 中存在外稳定环与内稳定环(可能重合).

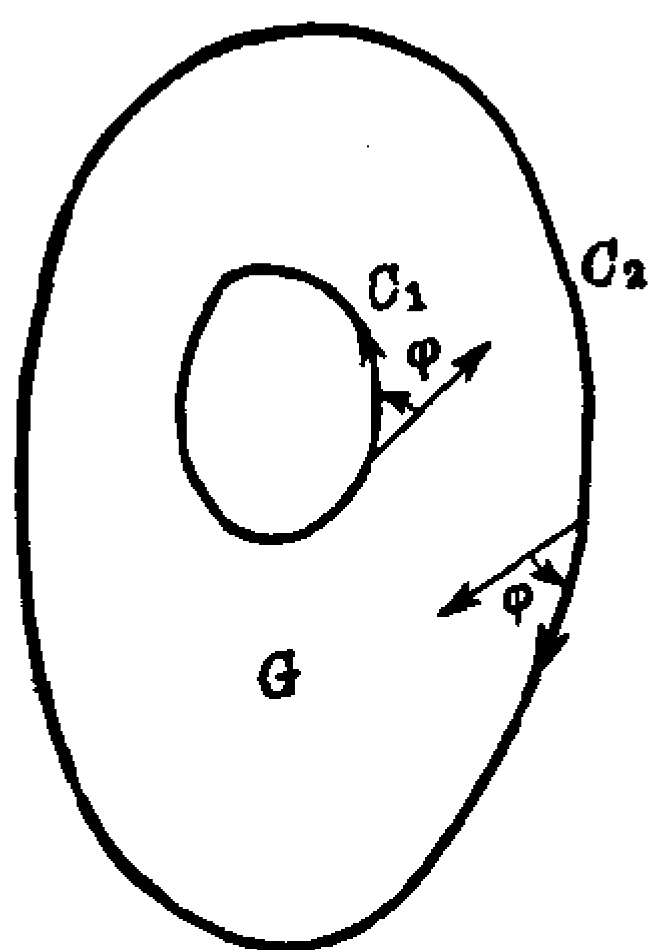


图 3·12

【证】　设 G 的内外境界线分别为 C_1 与 C_2. 今规定在 C_1 上逆时针方向为正方向，C_2 上顺时针方向为正方向. 我们首先来构造一个方程使它具有闭轨线 C_1, C_2. 注意到在 C_i 上任一点 (x, y)，由方程(3·29)的轨线正向(即 t 增加的方向)转到 C_i 的切线正向所需的角度若记为 $\varphi(x, y)$，则方程

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=P(x, y)\cos\varphi(x, y)-Q(x, y)\sin\varphi(x, y)=P^*(x, y),\\ \dfrac{dy}{dt}=P(x, y)\sin\varphi(x, y)+Q(x, y)\cos\varphi(x, y)=Q^*(x, y)\end{cases}\tag{3·33}$$

便以 C_1, C_2 作为它的闭轨线(图 3·12).

然而(3·33)在 C_i 之外没有定义，因此必需设法把 $\varphi(x, y)$ 连续地延拓到 $G_1\supset G$ 中去. 设 N_ε^i $(i=1, 2)$ 是 C_i 的 ε 邻域，N_ε^1 与 N_ε^2 无公共点，亦不包含(3·29)的奇点. 定理中的条件保证了可以

在 C_i 的邻域中引进曲线坐标 (s, n). 记 $\varphi(x, y)=\bar{\varphi}(s, 0)$ 当 $(x,y)\in C_i$. 再定义

$$\varphi(x, y)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin^2\frac{n\pi}{2\varepsilon}+\bar{\varphi}(s, 0)\cos^2\frac{n\pi}{2\varepsilon}, & \text{当}(x,y)\in N_\varepsilon^i,\\ \frac{\pi}{2}, & \text{当}(x, y)\overline{\in}N_\varepsilon^i.\end{cases}\tag{3·34}$$

显见 $\varphi(x, y)$ 在 G_1 中连续，且在 C_i 以外的地方恒大于零. 现在再造一个新的方程

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\bar{P}(x, y, \alpha)=P(x, y)\cos\alpha+P^*(x, y)\sin\alpha,\\ \frac{dy}{dt}&=\bar{Q}(x, y, \alpha)=Q(x, y)\cos\alpha+Q^*(x, y)\sin\alpha.\end{aligned}\tag{3·35}$$

容易算出

$$\begin{vmatrix}\bar{P} & \bar{Q}\\ \frac{\partial\bar{P}}{\partial\alpha} & \frac{\partial\bar{Q}}{\partial\alpha}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}P & Q\\ P^* & Q^*\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}$$
$$=PQ^*-QP^*=(P^2+Q^2)\sin\varphi\geqslant0,$$

因为 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$. 因此(3·35)关于 $\alpha\in[0, \pi)$构成广义旋转向量场的完全族. (3·35)当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时成为方程(3·33),此时它有正定向的闭轨线 C_1 与负定向的闭轨线 C_2. 由于 C_1 与 C_2 定向相反，故区域 G 不可能被方程(3·33)的闭轨线所充满，否则 C_1 与 C_2 应有相同的定向. 这样，(3·33)在 G 中有最大的正定向闭轨线 C_1'(它可能就是 C_1). 根据定理 3·3, 当 α 向适当方向变动时 C_1' 将扩大. 由于 G 中没有奇点，根据定理 3·6, (3·35)的闭轨线全体(对一切 α)所遮盖的区域 R 应包含整个区域 G, 就是说，C_1' 可以扩大而到达 C_2[1]. 但在扩大过程中定向不会改变，故必在 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\pi=-\frac{\pi}{2}$ 或在 $\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2}$ 时扩大到达 C_2, 这是因为在 $\alpha=$

---

1) 如果(3·33)在 C_1 与 C_2 之间还有负定向闭轨线 C_2', 则取(最内的) C_2' 以代替 C_2.

$-\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$ 时(3·35)成为

$$\frac{dx}{dt}=-P^*(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=-Q^*(x, y),$$

它以 C_2 为正定向闭轨线. 但是从 $\frac{\pi}{2}$ 变到 $-\frac{\pi}{2}$ 必须经过 0, 从 $\frac{\pi}{2}$ 变到 $\frac{3\pi}{2}$ 时必须经过 π, 而在 $\alpha=0$ 或 π 时(3·35)成为(3·29)或

$$\frac{dx}{dt}=-P(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=-Q(x, y),$$

这就表示方程(3·29)在 G 内部必定存在闭轨线, 它们之中的最外面的一条必为外稳定环, 最里面的一条必为内稳定环. 当然, 也可能(3·29)在 G 内部只有唯一的极限环, 这时它必定是稳定环, 定理证毕.

下面我们证明在适当的条件下, 判别闭轨线不存在的 Poincaré 定理(§1 定理 1·9)是存在逆定理的.

定理 3·15[48] 如果方程(3·29)在某一单连通区域 G 内存在唯一的指标为 +1 的初等奇点 O, 但在 G 中不存在闭轨线, 则必存在 G 的子区域 G^* 及在其中定义的连续可微的二元函数 $h(x, y)$, 使它关于(3·29)的全导数在 G^* 中保持定号且不等于零(点 O 除外).

【证】 首先我们来确定所需的区域 G^*, 并由(3·29)出发构造一个方程, 使它以 O 点为中心点, 且其闭轨线充满 G^*. 为此, 由(3·29)作均匀旋转向量场

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=P(x, y)\cos\alpha-Q(x, y)\sin\alpha,\\ \frac{dy}{dt}&=P(x, y)\sin\alpha+Q(x, y)\cos\alpha.\end{aligned} \tag{3·36}$$

由定理 3·7 后面的注意可知, 完全族(3·36)的闭轨线全体遮盖了一个区域 $\widetilde{G}$. 它的内境界为 O 点, 外境界线上必有奇点, 所以 $\widetilde{G}$ 至少在某些方向要越出 G. 取 $\widetilde{G}$ 中全部位于 G 内部的闭轨线所

构成的集合为 G^*(图 3·13). 今对点 $(x, y)\in G^*$ 定义函数 $\alpha^*(x,y)$ 的值就是完全族中通过此点的闭轨线所对应的参数 α 的值. 于是方程

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}&=P(x, y)\cos\alpha^*(x, y)-Q(x, y)\sin\alpha^*(x, y)\\
&=\widetilde{P}(x, y, \alpha^*),\\
\frac{dy}{dt}&=P(x, y)\sin\alpha^*(x, y)+Q(x, y)\cos\alpha^*(x, y)\\
&=\widetilde{Q}(x, y, \alpha^*)
\end{aligned}
\tag{3·37}
$$

便有一系闭轨线充满区域 G^*, 因而以 O 为中心点.

下面我们来证明利用(3·37)的正交轨线可以构造出适合定理要求的函数 $h(x, y)$. 如图 3·13, 从 O 点出发作(3·37)的任一条正交轨线 l, 以 h 记 l 的弧长, 从 O 点量起. 今在 G^* 中定义函数 $h(x, y)$ 如下: 对一点 $A(x, y)\in G^*$. 假设(3·37)的经过点 A 的闭轨线 Γ 与 l 交于 $B(x_0, y_0)$, 那末就取 l 在 B 的弧长 h_0 作为 $h(x, y)$的值. 现证 $h(x, y)$有一阶连续偏导数. 假设 l 的参数方程为 $x=\varphi(h)$, $y=\psi(h)$. 方程(3·37)的闭轨线族的方程为 $x=x(s, h)$, $y=y(s, h)$, 其中 s 表示闭轨线的弧长, 从 l 上的点量起, 顺时针为正. 于是显见有 $x(0, h)=\varphi(h)$, $y(0, h)=\psi(h)$. 由于 l 与 Γ 在交点处相互垂直, 故

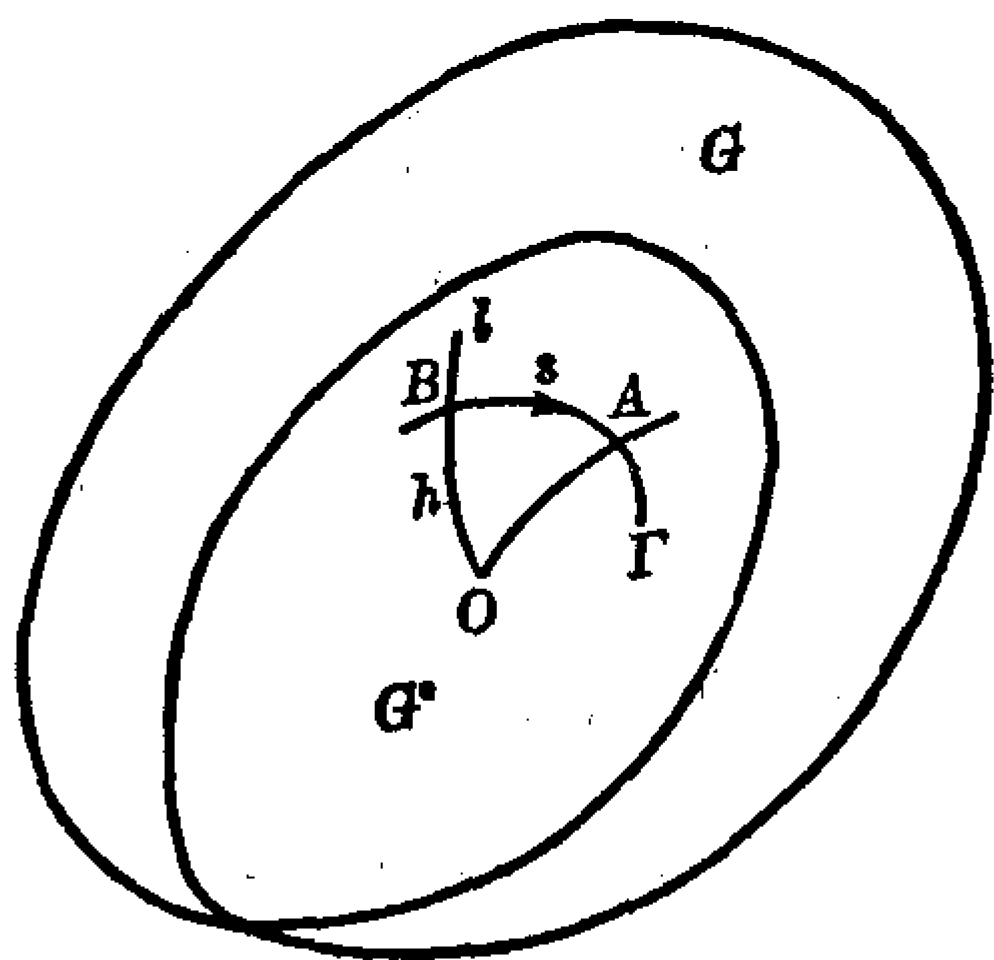


图 3·13

$$
\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial h}\\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial h}\end{vmatrix}_{\substack{s=0\\ h=h_0}}=\begin{vmatrix}\widetilde{P}(x_0, y_0, \alpha^*(x_0, y_0)) & \varphi'(h_0)\\ \widetilde{Q}(x_0, y_0, \alpha^*(x_0, y_0)) & \psi'(h_0)\end{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{\widetilde{P}^2+\widetilde{Q}^2}}\neq 0,
$$

因此由 $x_0=x(0, h_0)$, $y_0=y(0, h_0)$可解出 h_0 为 x_0, y_0 的一阶连

续可微函数. 另一方面, 根据解对初值的连续可微性以及熟知的公式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x_0} & \dfrac{\partial y}{\partial x_0} \\ \dfrac{\partial x}{\partial y_0} & \dfrac{\partial y}{\partial y_0} \end{vmatrix} = e^{\int_{t_0}^{t}(\tilde{P}_x+\tilde{Q}_y)dt} > 0$$

可知 x_0, y_0 有对 x, y 的一阶连续偏导数, 因而作为 x, y 的复合函数的 $h_0=h(x_0, y_0)$ 也有对 x, y 的一阶连续偏导数. 最后我们证明 $\dfrac{dh}{dt}$ 是定号的. 为此只要注意(3·37)的闭轨线是由旋转向量场(3·36)所产生的, 而当 α 变动时向量场(3·36)将严格旋转, 故(3·29)的轨线不可能与(3·37)的闭轨线相切, 即(3·37)的闭轨线都是向量场(3·29)的无切弧. 因此沿(3·29)的轨线有

$$\frac{dh}{dt}=\frac{\partial h}{\partial x}P+\frac{\partial h}{\partial y}Q>0 \quad (<0),$$

上式中到底成立 $>$ 还是 $<$, 要看 O 是(3·29)的不稳定奇点还是稳定奇点而定, 定理证毕.

在要结束关于旋转向量场的讨论以前, 研究一下奇点可以移动的旋转向量场的某些性质是有趣的. 明确地说, 现在我们假设向量场的奇点随着参数 α 的变化而移动, 它可以消失也可以分解, 但要求分解后的奇点最多为有限个, 且不与原向量场的奇点重合.

定理 3·16 能在旋转向量场中移动或消失的奇点只能是指标为零且不含椭圆域的奇点[291].

【证】 设对 $\alpha_1\neq\alpha_0$, $F(\alpha_0)$ 的奇点 O 移动成为 $F(\alpha_1)$ 的奇点 O'. 由于 O 对 $F(\alpha_1)$ 来说是常点, 故存在以 O 为心的足够小的圆 C, 使 C 上及其内部都不含 $F(\alpha_1)$ 的奇点, 并且只含 $F(\alpha_0)$ 的唯一奇点 O, 显见 C 关于 $F(\alpha_1)$ 的指标为零, 但 $F(\alpha_1)$ 的向量与 $F(\alpha_0)$ 的向量之间的夹角均小于 π, 所以 C 关于 $F(\alpha_0)$ 的指标也是零, 亦即 O 的指标为零. 同理可证 O' 在 $F(\alpha_1)$ 中的指标也是零.

现在假设 $F(\alpha_0)$ 的奇点 O 邻域中含有椭圆域. 对于任一 $\alpha_1\neq\alpha_0$, 设 O 移动成为 $F(\alpha_1)$ 的奇点 O', 那末我们总可找到 O 的足够小的椭圆域 G, 使它不含 $F(\alpha_1)$ 的任何奇点. 由于 G 的边界轨线是一条从 O 出发又回到 O 的轨线, 故经过 G 的边界上任一点 P 的 $F(\alpha_1)$ 的轨线在进入(当 t 增加或减小时) G 以后只能从 O 点穿出 G. 由于 P 的任意性, 故 O 是 $F(\alpha_1)$ 的奇点, 与假设相矛盾.

推论 在旋转向量场中初等奇点不能随参数的变化而移动.

注意: 如果旋转向量场族不是定义在全平面, 则在其定义域的边界上的初等奇点有可能随参数的变化而移动.

例6 对以 δ 为参数的方程

$$\frac{dx}{dt}=\delta x-y+mxy-y^2,\quad \frac{dy}{dt}=x+ax^2,$$

容易计算

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ \dfrac{\partial P}{\partial\delta} & \dfrac{\partial Q}{\partial\delta}\end{vmatrix}=-x^2(1+ax),$$

所以方程在直线 $1+ax=0$ 的两边构成不同旋转方向的旋转向量场族. 不难验证这时位于 $1+ax=0$ 上的两个初等奇点(指标分别为 $+1$ 与 -1)的位置将随 δ 的变化而上下移动.

与定理 3·2 类似, 现在仍成立:

定理3·17 在奇点可随参数 α 的变化而移动的旋转向量场 $F(\alpha)$ 中, 设 Γ_i 是 $F(\alpha_i)$ 的奇闭轨线或闭轨线 $(i=1, 2)$, 则当 $\alpha_1\neq\alpha_2$ 时 Γ_1 与 Γ_2 互不相交.

与定理 3·3 和 3·4 对应, 我们有

定理3·18 在旋转向量场族 $F(\alpha)$ 中, 设奇点 O 随参数 α 的变化而连续移动, 但不分解为几个. 设 $\Gamma(\alpha_0)$ 是 $F(\alpha_0)$ 的外稳定(外不稳定)奇闭轨线, 则当 α 从 α_0 向适当方向变动时, 在 Γ_0 的外侧邻域中必至少存在 $F(\alpha)$ 的一条包含 Γ_0 在其内部的闭或奇闭轨线; 又若 $F(\alpha)$ 的奇点不移出 Γ_0 的外部, 则 Γ_0 的外侧必有 $F(\alpha)$ 的闭轨线.

证明从略，见[291]。

关于旋转向量场理论，一个重要而值得研究的课题是：应该给它再加一个什么样的条件才能保证对于每一个 $F(\alpha)$ 只存在唯一的极限环？在这方面[50]得到一点结果，但条件又嫌太强，故适用范围很小。

读了定理 3·9，人们自然地会想到：如果在奇闭轨线上有几个鞍点，而发散量在这些鞍点的值有正也有负，这时如何来判别这条奇闭轨线的稳定性，关于这方面有 Л. А. Черкас 的工作[54]，他得到的主要结果如下：

设奇闭轨线 Γ 为正定向，设 $\lambda_i^j(j=1,2;i=1,2,\cdots,n)$ 是 Γ 上第 i 个鞍点处的两个特征根，其中 $\lambda_i^1>0>\lambda_i^2$，记 $\lambda_i=-\lambda_i^2/\lambda_i^1$，则当 $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i>1(<1)$ 时 Γ 为稳定（不稳定）。

关于平面含多参数的向量场中由奇点产生极限环的研究还有 F. Takens[56] 等不少较近代的研究工作。

习 题

1. 试用环域定理证明本节定理 3·2.

2. 证明本节的(3·12)式与 § 2 的(2·26)的第一式是一致的，其中的 k^* 与 k 是同一函数。

3. 由方程

$$\frac{dr}{dt}=-(r-1)(r-3)^2,$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\begin{cases}(r-1)(r-2)(r-3)\sec|r-2|\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } 0<r<4 \text{ 且 } r\neq 1,3;\\ \dfrac{4}{\pi}, & \text{当 } r=1;\\ -\dfrac{4}{\pi}, & \text{当 } r=3\end{cases}$$

出发构造一均匀旋转向量场的完全族 $F(\alpha)$，研究极限环随参数 α 变动的情况，并指出极限环所遮盖的区域。

4. 试将旋转向量场中极限环变化的情况与方程

$$C(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)+K=0 \qquad (\triangle)$$

的实根随参数 C 而变化的情况进行比较，这里

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

无实根，又 K 是常数。问 $K=0$ 的方程(△)对应于旋转向量场中的哪一种

情况?

5. 证明:具有正的函数行列式 $\dfrac{\partial(x_1, y_1)}{\partial(x, y)}$ 的点变换 $x_1=f(x, y)$, $y_1=g(x, y)$将旋转向量场的完全族仍变为完全族[46].

6. 设 $F_1(P, Q)$与 $F_2(P^*, Q^*)$为满足本节开头所给的条件1(即(3·2)式)与条件3的向量场,且它们有相同的奇点,则存在一完全族 $F(\alpha)$使 $F(0)=F_1$, $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=F_2$ 的充要条件是在一切常点都成立 $PQ^*-QP^*>0$[46].

7. 设由方程(3·1)(对一切 α)的包含奇点 O 的闭轨线全体所遮盖的开环域为 G(O 点除外). 在 G 中定义函数 $\alpha^*(x, y)$如定理3·16的证明中那样. 试证:若 P, Q 有连续一阶偏导数,则 $\alpha^*(x, y)$在 G 中亦有连续一阶偏导数,且满足一阶拟线性偏微分方程[55]:

$$Q(x, y, \alpha^*)\frac{\partial\alpha^*}{\partial y}+P(x, y, \alpha^*)\frac{\partial\alpha^*}{\partial x}=0.$$

8. 利用 O 是方程

$$\frac{dx}{dt}=P(x, y, \alpha^*(x, y)),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x, y, \alpha^*(x, y))$$

的中心点这一事实证明:若 Γ 是方程(3·1)的闭轨线,则

$$\oint_\Gamma H(s)ds=-\oint_\Gamma \frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\,\frac{\partial\alpha^*}{\partial n}ds,$$

其中 $H(s)$是(3·1)的正交轨线的曲率, $\dfrac{\partial\alpha^*}{\partial n}$ 表示 $\alpha^*(x, y)$沿 Γ 的外法线方向的方向导数[37].

9. 证明:若方程

$$\frac{dx}{dt}=P(\lambda x, y),\qquad \frac{dy}{dt}=\lambda Q(\lambda x, y)$$

或

$$\frac{dx}{dt}=\lambda P(x, \lambda y),\qquad \frac{dy}{dt}=Q(x, \lambda y)$$

关于 $\lambda\in(0, +\infty)$形成广义旋转向量场,则方程(3·29)不存在闭轨线.

10. 试就下列方程验证定理3·21的结论[51]:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}=&\{[y+x(1-x^2-y^2)]\cos\alpha-[-x+y(1-x^2-y^2)]\sin\alpha\}\\&\cdot[(x-g(\alpha))^2+y^2],\\ \frac{dy}{dt}=&\{[y+x(1-x^2-y^2)]\sin\alpha+[-x+y(1-x^2-y^2)]\cos\alpha\}\\&\cdot[(x-g(\alpha))^2+y^2],\end{aligned}$$

其中取 i) $g(\alpha)=\sqrt{1+\tan\alpha}$; ii) $g(\alpha)=\sqrt{1+\alpha}$; iii) $g(\alpha)=\sqrt{1+\tan 2\alpha}$.

11．试从旋转向量场的观点来体会§1定理1·13的含义.

12．证明方程

$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+xy-y^2,\quad \frac{dy}{dt}=x(1-2x)\quad (\delta>0)$$

的经过鞍点$\left(\frac{1}{2}, y_1>0\right)$的位于$x=\frac{1}{2}$左方的两条分界线必包围原点$O$. 假设已知当$\delta=0$时$O$为稳定焦点，试证对某些$\delta>0$，在$O$外围至少存在两个极限环.

13．试应用§1习题10以及旋转向量场的理论证明下面的无环判别准则[38]:

设在方程$\frac{dx}{dt}=y-F(x)-Q(x)$，$\frac{dy}{dt}=g(x)$中的$F(x)$与$g(x)$如§1习题10，$Q(x)$为奇函数．$xQ(x)\leqslant 0$(或$\geqslant 0$)，则不存在闭轨线.

14．设奇闭轨线Γ上有两个鞍点N_1，N_2，以$\operatorname{div} N_i$记在N_i点的发散量的值．证明：当

$$\frac{\operatorname{div}N_1}{\lambda_1^1}>\frac{\operatorname{div}N_2}{\lambda_2^2}\quad (或<)$$

时Γ为稳定(或不稳定)．这一条件也可改写为：当

$$\operatorname{div} N_1 \operatorname{div} N_2>(<)\lambda_1^1 \operatorname{div} N_2+\lambda_2^1 \operatorname{div} N_1$$

时Γ为稳定(不稳定).

§4. 极限环随参数而变化的一般情况

在研究了旋转向量场中极限环的较有规则的变化情况以后，现在我们进而研究含参数微分方程

$$\frac{dx}{dt}=P(x, y, \alpha), \quad \frac{dy}{dt}=Q(x, y, \alpha) \tag{4·1}$$

的极限环随着参数 α 的变动而变动的一般情况. 本节要讨论的主题共有三个:

I. 假设 Γ 是 $(4\cdot1)_{\alpha=0}$ 的一个极限环，问当 $\alpha\neq0$ 而与零很接近时方程(4·1)在 Γ 的邻近是否仍有极限环，如果有的话，是否为唯一?

II. 研究当 $\alpha_1\neq\alpha_2$, $|\alpha_1|$, $|\alpha_2|$ 都很小时，位于 Γ 邻近的方程 $(4\cdot1)_{\alpha_1}$ 与 $(4\cdot1)_{\alpha_2}$ 的极限环是否不相交.

III. 假设 $(4\cdot1)_{\alpha=0}$ 有一系充满某一环域的周期环，研究当 $\alpha\neq0$ 而 $|\alpha|$ 甚小时方程(4·1)是否存在极限环，如果存在的话，当 $\alpha\to0$ 时其极限位置是 $(4\cdot1)_{\alpha=0}$ 的哪些周期环[1].

早在1954年日本数学家占部实[41]已经用第2节说过的 Ляпунов 方法详细研究过这三个问题，由于国内看不到上述杂志，陈翔炎[57]完全独立地用 Ткачев 方法重又得到他的那些结果，并且对于第三个问题得到更好的结果. 现在我们就按照后者的方法来讲述这几个问题.

假设方程(4·1)中的 P, Q 对于 x, y, α 有以后所需用到的各阶连续偏导数，又设当 $\alpha=0$ 时方程(4·1)有闭轨线 Γ，其方程为

---

1) 显见在这时如果把 $\alpha=0$ 包括在内，那末研究对应于不同 α 的极限环是否相交是没有意义的. 如果把 $\alpha=0$ 除外，那末这问题就化为问题 II.

$$x=\varphi(s),\ y=\psi(s), \tag{4·2}$$

其中 s 是从 Γ 上某一定点量起的弧长，顺时针方向为正．和第2节一样，将坐标系移到 Γ 上去，得到方程

$$\frac{dn}{ds}=F(s,\ n,\ \alpha), \tag{4·3}$$

然后定义后继函数

$$\Psi(n_0,\ s_0,\ \alpha)=n(l+s_0,\ n_0,\ s_0,\ \alpha)-n_0$$

$$=\int_{s_0}^{l+s_0}F(s,\ n(s,\ n_0,\ s_0,\ \alpha),\ \alpha)ds, \tag{4·4}$$

其中 l 是 Γ 的周长，$n=n(s,\ n_0,\ s_0,\ \alpha)$ 表示方程 $(4·1)_\alpha$ 的当 $s=s_0$ 时 $n=n_0$ 的解．显见 $n=n(s,\ n_0,\ s_0,\ \alpha)$ 是 $(4·1)_\alpha$ 的闭轨线的充要条件为

$$\Psi(n_0,\ s_0,\ \alpha)=0, \tag{4·5}$$

又易见有

$$n(s,\ 0,\ s_0,\ 0)\equiv 0 \quad 和 \quad \Psi(0,\ s_0,\ 0)\equiv 0.$$

定理 4·1

$$\Psi'_{n_0}(0,\ s_0,\ 0)=e^{\int_0^l H(s)ds}-1, \tag{4·6}$$

$$\Psi'_\alpha(0,\ s_0,\ 0)=e^{\int_0^l H(s)ds}\int_0^l e^{-\int_{s_0}^{s+s_0}H(s)ds}\frac{\partial\theta(s+s_0)}{\partial\alpha}ds. \tag{4·7}$$

【证】 (4·6)已在第2节中得到(注意它的数值不依赖于 s_0)，今证(4·7)．将(4·4)两边对 α 求偏导数，得到

$$\Psi'_\alpha(n_0,\ s_0,\ \alpha)=\int_{s_0}^{l+s_0}\left(F'_\alpha+F'_n\frac{\partial n}{\partial\alpha}\right)ds. \tag{4·8}$$

注意 $\frac{\partial n}{\partial\alpha}$ 满足变分方程

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial n}{\partial\alpha}=F'_n\frac{\partial n}{\partial\alpha}+F'_\alpha$$

和初始条件 $\left.\frac{\partial n}{\partial\alpha}\right|_{s=s_0}=0$，可知

$$\frac{\partial n}{\partial\alpha}=e^{\int_{s_0}^{s}F'_n ds}\int_{s_0}^{s+s_0}e^{-\int_{s_0}^{\bar{s}}F'_n ds}F'_\alpha d\bar{s}.$$

代入(4·8)，再分部积分，得到

$$\Psi'_\alpha(n_0,\ s_0,\ \alpha)=e^{\int_{s_0}^{l+s_0}F'_n ds}\int_{s_0}^{l+s_0}e^{-\int_{s_0}^{s}F'_n d\bar{s}}F'_\alpha ds. \tag{4·9}$$

在第2节中已算出

$$F'_n(s,\ 0,\ 0)=H(s), \tag{4·10}$$

它表示方程$(4·1)_{\alpha=0}$的正交轨线的曲率在Γ上的值. 类似地容易算出

$$\begin{aligned}F'_\alpha(s,\ 0,\ 0)=&[P(\varphi(s),\ \psi(s),\ 0)Q'_\alpha(\varphi(s),\psi(s),\ 0)\\&-P'_\alpha(\varphi(s),\ \psi(s),\ 0)Q(\varphi(s),\ \psi(s),\ 0)]\\&\cdot[P^2(\varphi(s),\ \psi(s),\ 0)+Q^2(\varphi(s),\ \psi(s),\ 0)]^{-1}\\=&\partial\theta(s)/\partial\alpha,\end{aligned} \tag{4·11}$$

其中$\dfrac{\partial\theta(s)}{\partial\alpha}$表示方程(4·1)的轨线的斜角$\theta$关于$\alpha$的偏导数在$\alpha=0$, $n=0$, $s=s$处(即Γ上弧长为s之处)的值.

在(4·9)中令$n_0=\alpha=0$, 注意$n(s,\ 0,\ s_0,\ 0)\equiv0$, 以(4·10), (4·11)两式代入，得到

$$\Psi'_\alpha(0,\ s_0,\ 0)=e^{\int_{s_0}^{l+s_0}H(s)ds}\int_{s_0}^{l+s_0}e^{-\int_{s_0}^{s}H(\bar{s})d\bar{s}}\frac{\partial\theta(s)}{\partial\alpha}ds.$$

显见沿着Γ, $H(s)$是s的周期为l的周期函数，在上式右边的积分符号中作变换$s=s_0+s'$，然后再记s'为s，即得(4·7). 定理证毕.

本节研究问题的方法主要是在适当的条件之下对(4·5)应用隐函数存在定理，把n_0解出来表示为α与s_0的单值函数，或是把α解出来表示为n_0与s_0的单值函数. 因此首先应该注意，这样得到的结果都是小范围的. 其次，注意在问题I中起作用的是$\Psi'_{n_0}(0,\ s_0,\ 0)$，因为当它不等于零时就可由(4·5)解出

$$n_0=n_0(s_0,\ \alpha),$$

它在$|\alpha|$很小时是单值可微的，这表示对于每一个绝对值足够小的α有唯一的n_0满足(4·5)，亦即方程$(4·1)_\alpha$在Γ的邻域中有唯

一的闭轨线，它通过点(s_0, n_0). 反之，若

$$\Psi'_{n_0}(0, s_0, 0)=0,$$

则$(4\cdot1)_\alpha$的闭轨线的存在或唯一性都得不到保证了. 在问题II中起作用的则是$\Psi'_\alpha(0, s_0, 0)$，当它不等于零时就可由$(4\cdot5)$解出

$$\alpha=\alpha(s_0, n_0),$$

它在$|n_0|$很小时是单值可微的，这表示通过点(s_0, n_0)的方程$(4\cdot1)$的轨线只有当

$$\alpha=\alpha(s_0, n_0)$$

时才是闭轨线，因而对应于不同α的方程$(4\cdot1)$的闭轨线不可能相交. 反之，如果

$$\Psi'_\alpha(0, s_0, 0)=0,$$

则不相交性便成了问题.

由定理 4·1 容易得到

定理 4·2 若方程$(4\cdot1)$关于α构成旋转向量场，则极限环的扩大率(或缩小率)无一处为零.

【证】 由定理所指出的条件知道$\dfrac{\partial\theta}{\partial\alpha}\geqslant0$，因此由$(4\cdot7)$看出

$$\Psi'_\alpha(0, s_0, 0)>0,$$

故由$(4\cdot5)$可解出单值函数$\alpha=\alpha(s_0, n_0)$，且存在

$$\left.\frac{dn_0}{d\alpha}\right|_{n_0=0}=\frac{\displaystyle\int_0^l e^{-\int_{s_0}^{s+s_0}H(\bar{s})d\bar{s}}\,\frac{\partial\theta(s+s_0)}{\partial\alpha}ds}{e^{-\int_0^l H(s)ds}-1},\tag{4·12}$$

其值对一切s_0恒不等于零. 若Γ为单重稳定环(已设为负定向)，则上式右边分母大于零，从而

$$\left.\frac{dn_0}{d\alpha}\right|_{n_0=0}>0,$$

即Γ随α的增加而扩大. 反之，若Γ为单重不稳定环，则

$$\left.\frac{dn_0}{d\alpha}\right|_{n_0=0}<0,$$

即 Γ 随 α 的增加而缩小. 这些结论是符合于定理 3·4 后面那个表中所规定的. 若 Γ 为多重环, 则

$$\left.\frac{dn_0}{d\alpha}\right|_{n_0=0}=\infty,$$

这也恰当地反映出定理 3·5 所得的结果.

推广定理 4·2 的条件, 可得

定理 4·3 若对一切 s_0 有 $\Psi'_\alpha(0, s_0, 0)\neq 0$, 因而保持定号, 则在 Γ 的充分小的邻域中对应于不同 α 的方程(4·1)的闭轨线必不相交.

【证】 由定理的条件知对每一 $s_0(0\leqslant s_0\leqslant l)$, 方程 (4·5) 在经过$(s_0, 0)$的 Γ 的法线段上确定 α 为 n_0 的单值函数, 它有一个长度不为零的存在区间, 且满足条件 $\alpha(s_0, 0)=0$. 因此根据 Weierstrass 定理, $\alpha(s_0, n_0)$有一个最小的不等于零的存在区间 (n_0 的区间), 它适用于一切 s_0, 这就表示 Γ 存在一个邻域被方程(4·1)的闭轨线所充满. 这些闭轨线是互不相交的, 已在定理 4·2 之前说明过了[1].

但应注意, 虽然 α 是 n_0 的单值函数, 其反函数却不一定单值. 特别, 只要对于某一 s_0, α 的值域缩为一点 $\alpha=0$, 则显见对一切 s_0, α 的值域都是 $\alpha=0$, 这时 Γ 是方程$(4·1)_{\alpha=0}$ 的一系周期环中的一个, 而由不相交性, 方程$(4·1)_{\alpha=0}$ 在 Γ 的小邻域中没有闭轨线. 又应注意, 定理 4·3 所肯定的不相交性只适用于绝对值相当小的 α, 对应的闭轨线不但位于 Γ 的小邻域之中, 并且当 $\alpha\to 0$ 时以 Γ 为极限位置, 我们称这种闭轨线为第一型的. 很可能方程(4·1)对于某一绝对值较大的 α 有一条闭轨线 Γ^*, 它与 Γ 相交, 但当 $\alpha\to 0$ 时 Γ^* 的极限位置却是方程$(4·1)_{\alpha=0}$ 的另一闭轨

1) 严格些说, 由定理的条件知当$|n_0|$, $|\alpha|$足够小时, 对于任一 s_0 有

$$\Psi'_\alpha(n_0, s_0, \alpha)>0 \quad (<0).$$

今设有 Γ_{α_1} 与 Γ_{α_2} 交于(s_0^*, n_0^*), 则

$$\Psi(n_0^*, s_0^*, \alpha_1)=\Psi(n_0^*, s_0^*, \alpha_2)=0,$$

从而有 $\overline{\alpha}$ 介于 α_1 与 α_2 之间使 $\Psi'_\alpha(n_0^*, s_0^*, \overline{\alpha})=0$, 与前式矛盾.

线 Γ_1. 对于 Γ^* 与 Γ, 定理 4·3 就不适用了. 我们称 Γ^*(对于 Γ 来说)是第二型的闭轨线. 如果限制 $|\alpha|$ 要足够小, 那末在 Γ 的适当小邻域中就不存在第二型的闭轨线了, 否则将与解对参数的连续性相矛盾.

为了保证定理 4·3 的条件成立, 除了假设方程(4·1)对 α 构成旋转向量场以外, 还可以有其他办法. 为此先证:

引理 4·1 若 Γ 不是单重环, 则对一切 $0\leqslant s_0\leqslant l$, $\Psi'_\alpha(0, s_0, 0)$有相同的符号.

【证】 在(4·7)中令 $s_0+s=s'$, 并注意

$$\int_0^l H(s)ds=0,$$

即得

$$\begin{aligned}\Psi'_\alpha(0,\ s_0,\ 0)&=\int_{s_0}^{s_0+l} e^{-\int_{s_0}^{s'}H(\bar{s})d\bar{s}}\ \frac{\partial\theta(s')}{\partial\alpha}\,ds'\\ &=e^{\int_0^{s_0}H(\bar{s})d\bar{s}}\int_{s_0}^{s_0+l} e^{-\int_0^{s'}H(\bar{s})d\bar{s}}\ \frac{\partial\theta(s')}{\partial\alpha}\,ds',\end{aligned}\tag{4·13}$$

显见 $\dfrac{\partial\theta(s')}{\partial\alpha}$ 关于 s' 有周期 l, 又由

$$\begin{aligned}\int_0^{s'+l} H(\bar{s})\,d\bar{s}&=\int_0^{s'} H(\bar{s})d\bar{s}+\int_{s'}^{s'+l} H(\bar{s})d\bar{s}\\ &=\int_0^{s'} H(\bar{s})d\bar{s}+\int_0^{l} H(\bar{s})d\bar{s}=\int_0^{s'} H(\bar{s})d\bar{s},\end{aligned}$$

可知 $e^{-\int_0^{s'}H(\bar{s})d\bar{s}}$ 关于 s' 亦有周期 l. 这样, (4·13)可改写为

$$\begin{aligned}\Psi'_\alpha(0,\ s_0,\ 0)&=e^{\int_0^{s_0}H(\bar{s})d\bar{s}}\int_0^l e^{-\int_0^{s'}H(\bar{s})d\bar{s}}\frac{\partial\theta(s')}{\partial\alpha}\,ds'\\ &=e^{\int_0^{s_0}H(\bar{s})d\bar{s}}\Psi'_\alpha(0,\ 0,\ 0).\end{aligned}$$

证毕

根据这个引理由定理 4·3 立刻可得:

定理 4·4 若 Γ 不是单重环与周期环, 且 $\Psi'_\alpha(0,\ s_0,\ 0)\neq0$ 对某一 s_0 成立, 则当 α 向一方或两方作微小变动时, 在 Γ 的邻域中方程(4·1)有闭轨线, 并且对应于不同 α 的闭轨线必不相交.

推论 若当 $\alpha=0$ 时方程(4·1)有一系闭轨线充满了 Γ 的小邻域 U，则对 $\alpha\neq0$(但 $|\alpha|$ 很小)，方程$(4\cdot1)_\alpha$ 能在 U 中有闭轨线的必要条件是

$$\Psi'_\alpha(0,\ s_0,\ 0)=0.$$

这一推论在研究第三个问题时很有用处.

与定理 4·3 相对应的，我们有熟知的

定理 4·5 若 Γ 为单重环(即 $\Psi'_{n_0}(0,\ s_0,\ 0)\neq0$)，则当 $|\alpha|$ 足够小时方程(4·1)在 Γ 的邻域中有唯一的第一型单重环 Γ_α，它与 Γ 有相同的稳定性.

【证】 由 $\Psi'_{n_0}(0,\ s_0,\ 0)\neq0$ 知，当 $|\alpha|$ 足够小时(但不退缩为一点 $\alpha=0$)，方程(4·5)确定 n_0 为 α 的单值连续可微函数，满足条件

$$n_0(0,\ s_0)=0,$$

故 Γ_α 的存在与唯一性得证. 又因 $\oint H(s,\ \alpha)ds$ 的值随 α 以及 Γ_α 的位置而连续变动，故若

$$\oint_\Gamma H(s,\ 0)ds\neq0,$$

则当 $|\alpha|$ 甚小时

$$\oint_{\Gamma_\alpha} H(s,\ \alpha)ds$$

与之同号，即 Γ_α 亦为单重环，且与 Γ 有相同的稳定性. 证毕.

定理 4·5 说明，当 α 从 0 向任何一方作微小变动时单重环不会消失，并且保持稳定性. 定理 4·4 则说明，当 Γ 是多重环(但非周期环)且

$$\Psi'_\alpha(0,\ s_0,\ 0)\neq0$$

对某一 s_0 成立时，至少当 α 向某一方向作微小变动时极限环亦不消失，但不保持重数，亦不保证唯一性，例如半稳定环在旋转向量场中分裂为二就是一例.

定理4·6　若 $\Psi'_\alpha(0, s_0, 0) \neq 0$ 对某一 s_0 成立，则 Γ 是半稳定环的充要条件是 $\alpha(n_0, s_0)$ 在 $n_0=0$ 取得严格极值，即当 α 自零向某一方向变动时方程(4·1)在 Γ 的两侧同时出现极限环，而当 α 向另一方向变动时极限环消失.

【证】　不妨设对 s_0^* 有

$$\Psi'_\alpha(0, s_0^*, 0) > 0,$$

于是存在 $\delta>0$，使当 $|\alpha|<\delta$, $|n_0|<\delta$ 时亦有

$$\Psi'_\alpha(n_0, s_0^*, \alpha) > 0.$$

又由 $\Psi'_\alpha(0, s_0^*, 0) \neq 0$ 知道，方程(4·5)在经过点 $(s_0^*, 0)$ 的 Γ 的法线段 $-\varepsilon \leqslant n_0 \leqslant \varepsilon$ 上确定

$$\alpha = \alpha(n_0, s_0^*)$$

为 n_0 的单值连续函数.

今设 α 在 $n_0=0$ 取极小值，则存在 n_0 的小区间

$$[-\eta, \eta] \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon],$$

使对其中一切 $n_0 \neq 0$ 有

$$\alpha(n_0, s_0^*) > 0.$$

不妨设 η 如此之小，使 $\eta<\delta$，且 $\alpha(n_0, s_0^*)<\delta$ 当 $|n_0| \leqslant \eta$. 这样，若 $n_0 \in (0, \eta)$，则

$$\Psi'_\alpha(n_0, s_0^*, \alpha(n_0, s_0^*)) > 0.$$

但已知
$$\Psi(n_0, s_0^*, \alpha(n_0, s_0^*)) = 0,$$

故
$$\Psi(n_0, s_0^*, 0) < 0,$$

即 Γ 为外稳定. 同样，若 $n_0 \in (-\eta, 0)$，仍可导出

$$\Psi(n_0, s_0^*, 0) < 0,$$

即 Γ 为内不稳定，合在一起可知 Γ 为半稳定.

反之，若 Γ 为外稳定而内不稳定，则对足够小的区间 $[-\eta, \eta]$ 中的一切 $n_0 \neq 0$ 有 $\Psi(n_0, s_0^*, 0) < 0$，与

$$\Psi'_\alpha(n_0, s_0^*, \alpha) > 0 \quad 及 \quad \Psi(n_0, s_0^*, \alpha(n_0, s_0^*)) = 0$$

一起可以看出必有 $\alpha(n_0, s_0^*) > 0$ 对 $n_0 \neq 0$，即 α 在 $n_0=0$ 取极

小值.

由于半稳定环是多重环,故在定理 4·6 的条件下如果 Γ 是半稳定,则不但 α 在 $n_0=0$ 取得极值,而且充满 Γ 的邻域的闭轨线互不相交. 显见这定理是定理 3·5 的推广. 其次,我们又可以把定理 4·4 推广成为

定理 4·7 设 Γ 为方程 $(4\cdot1)_{\alpha=0}$ 的 k 重环, $1<k<\infty$, 又存在 $-s_0$, 使 $\Psi(0, s_0, \alpha)$ 在 $\alpha=0$ 不取极值,则当 α 向一方或两方变动时 Γ 不消失,且对充分小的 $|\alpha|$, 方程 $(4\cdot1)$ 在 Γ 的邻近不能有多于 k 个的极限环.

【证】 由假设知对任一 $\varepsilon>0$ 可以找到 $\alpha_1<0<\alpha_2, |\alpha_i|<\varepsilon$,使 $\Psi(0, s_0, \alpha_1)$ 与 $\Psi(0, s_0, \alpha_2)$ 异号,因此又存在 $\delta>0$, 使对一切 n_0, $|n_0|<\delta$, $\Psi(n_0, s_0, \alpha_1)$ 与 $\Psi(n_0, s_0, \alpha_2)$ 异号. 于是对满足 $|n_0|<\delta$ 的任一 n_0 至少可以找到一个 $\alpha(n_0)$, 其值介于 α_1 与 α_2 之间,使 $\Psi(n_0, s_0, \alpha(n_0))=0$. 这表示方程 $(4\cdot1)_{\alpha(n_0)}$ 有闭轨线通过点 (s_0, n_0). 如果一切 $\alpha(n_0)\equiv0$, 则 Γ 是 $(4\cdot1)_{\alpha=0}$ 的周期环,与假设不合,故 $\alpha(n_0)$ 的值域是一个非零区间[1],它可能以 $\alpha=0$ 为内点,亦可能以 $\alpha=0$ 为端点. 注意, $\alpha(n_0)$ 不一定是单值函数,即对应于不同 α 的极限环可能相交.

其次,假设存在数列 $\alpha_i\to0$, 使方程 $(4\cdot1)_{\alpha_i}$ 在 Γ 的邻域中常有 $k+1$ 个或更多的第一型极限环,则对 α_i 至少有 $k+1$ 个 n_0^{ij} $(j=1, 2, \cdots, k+1)$, 使

$$\Psi(n_0^{ij}, s_0, \alpha_i)=0 \quad (j=1, 2, \cdots, k+1; i=1, 2, \cdots),$$

于是由 Rolle 定理知必存在 $\bar{n}_0^i$, 使

$$\Psi_{n_0^k}^{(k)}(\bar{n}_0^i, s_0, \alpha_i)=0 \quad (i=1, 2, \cdots),$$

其中 $\bar{n}_0^i$ 介于诸 n_0^{ij} 之间. 在上式中令 $i\to\infty$, 则 $\alpha_i\to0$, $\bar{n}_0^i\to0$. 故得

---

1) 如果 $\Psi(0, s_0, \alpha)$ 对于 α 不是解析的,则须在定理中改设 $\Psi(0, s_0, \alpha)$ 在 $\alpha=0$ 附近为单调.

$$\Psi_{n_0^k}^{(k)}(0,\ s_0,\ 0)=0,$$

这和 Γ 是 k 重环的定义相矛盾. 因此当 $|\alpha|$ 充分小时方程 (4·1) 在 Γ 的邻近不能有多于 k 个的极限环. 证毕.

仿此可以证明定理 4·5 的下一推广:

定理 4·8 设 $\Psi(n_0,\ s_0,\ 0)$ 在 $n_0=0$ 不取极值 (即 Γ 为稳定环、不稳定环或某种复合极限环), 则当 α 向两方作微小变动时极限环都不消失.

但应注意, 这时即使 Γ 为 $(4·1)_{\alpha=0}$ 的稳定环或不稳定环, 方程 $(4·1)_{\alpha\neq0}$ 在 Γ 的邻域中仍可能有多于一个的极限环, 因而保持稳定性的话也失去意义.

总结以上各定理可知, 只有在下述两条件同时成立的情况, 当 α 从零向两方变动时, 极限环 Γ 都有可能消失:

1. $\Psi(n_0, s_0, 0)$ 对一切 s_0 在 $n_0=0$ 取到极值 (即 Γ 为半稳定环或某种复合极限环).

2. $\Psi(0,\ s_0,\ \alpha)$ 对一切 s_0 在 $\alpha=0$ 取到极值.

还应注意的是, 在上述各定理中我们所得到的不相交性的结论都是局部的, 即它们只肯定在适当的条件下两个 (对于 Γ 来说是) 第一型的极限环 Γ_{α_1} 与 Γ_{α_2} $(\alpha_1\neq\alpha_2,\ |\alpha_i|\ll1)$ 不相交, 而不能肯定是否任意两个 Γ_{α_1} 与 Γ_{α_2} $(\alpha_1\neq\alpha_2)$ 亦不相交. 下面证明

定理 4·9 如果方程 (4·1) 对于 α 构成广义旋转向量场, 则任二 Γ_{α_1} 与 Γ_{α_2} $(\alpha_1\neq\alpha_2)$ 必不相交.

【证】 不妨设 $\alpha_2<\alpha_1$, 且 Γ_{α_1} 为正定向. 由于在 Γ_{α_1} 上任一点有

$$\begin{aligned}&P(x,\ y,\ \alpha_2)Q(x,\ y,\ \alpha_1)-P(x,\ y,\ \alpha_1)Q(x,\ y,\ \alpha_2)\\&\quad=P_2Q_1-P_1Q_2\geqslant0,\end{aligned}$$

故 $F(\alpha_2)$ 的轨线与 Γ_{α_1} 相遇时或是 (当 t 增加时) 穿出, 或是相切地穿进. 今以 Γ_{α_1} 代替定理 3·14 的证明中的 C_1, $P(x,\ y,\ \alpha_2)$ 与 $Q(x,\ y,\ \alpha_2)$ 代替其中的 $P(x,\ y)$ 与 $Q(x,\ y)$, 可以作出一个新的依

赖于参数β的广义旋转向量场:

$$\frac{dx}{dt}=P_2\cos\beta+P^*\sin\beta,\qquad \frac{dy}{dt}=Q_2\cos\beta+Q^*\sin\beta.$$

此方程当$\beta=\frac{\pi}{2}$时以Γ_{α_1}为轨线,并且$F(\alpha_2)$的轨线与Γ_{α_1}邻近的$\left(\text{对应的}\beta\text{与}\frac{\pi}{2}\text{相差很小}\right)$闭轨线相遇时,都应不相切地穿出,由此显见$\Gamma_{\alpha_2}$不能和$\Gamma_{\alpha_1}$相交.

下面研究问题III. 设方程$(4\cdot1)_{\alpha=0}$有一系闭轨线充满闭轨线Γ的邻域,由定理4·4的推论知可设$\Psi'_\alpha(0, s_0, 0)=0$对一切$s_0$,否则当$\alpha\neq0$而$|\alpha|$绝对值甚小时方程(4·1)不可能在$\Gamma$的邻域中有闭轨线. 现在就$s_0=0$的情况来研究条件

$$\Psi'_\alpha(0, 0, 0)=\int_0^l e^{-\int_0^s H(\bar{s})d\bar{s}}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}ds=0. \qquad (4\cdot14)$$

把积分变数s改为时间变数t,注意由第2节知

$$\begin{aligned}e^{-\int_0^s H(\bar{s})d\bar{s}}&=e^{-\int_0^t(P_{x0}+Q_{y0})dt+\frac{1}{2}d\log(P_0^2+Q_0^2)}\\&=\frac{\sqrt{P_0^2+Q_0^2}}{\sqrt{P_0^2(0)+Q_0^2(0)}}e^{-\int_0^t(P_{x0}+Q_{y0})dt},\end{aligned}$$

其中$P_0=P(f(t), g(t), 0)$, $Q_0=Q(f(t), g(t), 0)$; $x=f(t)$, $y=g(t)$是Γ的方程;又

$$ds=\sqrt{P_0^2+Q_0^2}\,dt,\ \frac{\partial\theta}{\partial\alpha}=\frac{P_0Q_{\alpha0}-Q_0P_{\alpha0}}{P_0^2+Q_0^2},$$

可得

$$\Psi'_\alpha(0, 0, 0)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{P_0^2(0)+Q_0^2(0)}}\int_0^T e^{-\int_0^t(P_{x0}+Q_{y0})dt}(P_0Q_{\alpha0}-Q_0P_{\alpha0})dt=0. \qquad (4\cdot15)$$

引理4·2 $e^{-\int_0^t(P_{x0}+Q_{y0})dt}Q_0$与$-e^{-\int_0^t(P_{x0}+Q_{y0})dt}P_0$沿$\Gamma$取值时是方程$(4\cdot1)_{\alpha=0}$关于周期解$x=f(t)$, $y=g(t)$的变分方程的共轭方程的周期解.

【证】 引理中所说的共轭方程是

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\xi_1}{dt}&=-P_x(f(t),\ g(t),\ 0)\xi_1-Q_x(f(t),\ g(t),\ 0)\xi_2,\\ \frac{d\xi_2}{dt}&=-P_y(f(t),\ g(t),\ 0)\xi_1-Q_y(f(t),\ g(t),\ 0)\xi_2.\end{aligned}\right\}\tag{4·16}$$

要证明此引理，取 $\xi_1=e^{-\int_0^t(P_{x0}+Q_{y0})dt}Q_0$, $\xi_2=-e^{-\int_0^t(P_{x0}+Q_{y0})dt}P_0$ 代入(4·16)直接验证即可.

现在假设方程$(4\cdot1)_{\alpha=0}$的一系闭轨线的方程为

$$x=f_h(t)=f(t,\ h),\qquad y=g_h(t)=g(t,\ h),\tag{4·17}$$

其中 h 代表闭轨线族所依赖的参数，并以 Γ^h 表示相应的闭轨线，$\xi_{1h}(t)$, $\xi_{2h}(t)$ 表示相应的变分方程的共轭方程的周期解. 利用(4·15)以及引理 4·2 就可把定理 4·4 的推论改写为

定理 4·10 在方程$(4\cdot1)_{\alpha=0}$的闭轨线族$\{\Gamma^h\}$中，那些能够在 $\alpha\neq0$ 时产生$(4\cdot1)_\alpha$的闭轨线的 Γ^h，其所对应的参数 h 必须满足条件

$$\begin{aligned}A_1(h)=\oint_{\Gamma^h}&[\xi_{1h}(t)P_{\alpha0}(f(t,\ h),\ g(t,\ h),\ 0)\\&+\xi_{2h}(t)Q_{\alpha0}(f(t,\ h),\ g(t,\ h),\ 0)]dt=0.\end{aligned}\tag{4·18}$$

写成这种形状的必要条件(4·18)可以被推广而使适用于 n 维空间的含参数非定常方程组[1].

为了进一步研究当 $\alpha\neq0$ 时方程(4·1)的极限环的存在性、个数和稳定性，我们现在将坐标系统移到 Γ^h 上去，假设 l 是闭轨线族(4·17)的横截线(这种横截线是存在的，例如可以取 l 为$(4\cdot1)_{\alpha=0}$的正交轨线). 在任一 Γ^h 上取其与 l 的交点为计算弧长 s 的起点，于是通过坐标变换

$$x=\varphi(s,\ h)-n\psi'(s,\ h),\qquad y=\psi(s,\ h)+n\varphi'(s,\ h)$$

(其中 $x=\varphi(s,\ h)$, $y=\psi(s,\ h)$ 是 Γ^h 的参数方程，n 是 Γ^h 的法线

1) 参考[60]第六章.

长)可将方程(4·1)改为

$$\frac{dn}{ds}=F(s,\ n,\ \alpha,\ h).\tag{4·19}$$

然后引进后继函数[1]

$$\Psi(n_0,\ \alpha,\ h)=\int_0^{l_h}F(s,\ n,\ \alpha,\ h)ds,$$

其中 l_h 是 Γ^h 的周长. 如前一样可证

$$\Psi'_\alpha(0,\ 0,\ h)=\int_0^{l_h}e^{-\int_0^s H(\bar{s},h)d\bar{s}}\frac{\partial\theta(s,\ h)}{\partial\alpha}ds=A_1(h).\tag{4·20}$$

今设方程$(4·1)_\alpha$在某一Γ^h 邻近有闭轨线 L^α, L^α 与 l 的交点位于 Γ^{h_α} 上,则易见有

$$\Psi(0,\ \alpha,\ h_\alpha)=0.$$

因此研究方程(4·1)是否存在闭轨线的问题,就化为方程

$$\Psi(0,\ \alpha,\ h)=0\tag{4·21}$$

对于 h 是否有实解的问题了. 显见

$$\Psi(0,\ 0,\ h)\equiv0,$$

故将 $\Psi(0,\ \alpha,\ h)$ 按 α 的幂展开时应有

$$\Psi(0,\ \alpha,\ h)=\frac{\alpha^n}{n!}[A_n(h)+\alpha A_{n+1}(h,\ \alpha)]\quad(n\geqslant1),\tag{4·22}$$

其中 $A_n(h)$是第一个不恒等于零的系数.

定理 4·11 当 α 变动时 Γ^{h^*} 不消失(意即存在$(4·1)_\alpha$的闭轨线 L^α,使当 $\alpha\to0$ 时 $L^\alpha\to\Gamma^{h^*}$)的必要条件是

$$A_n(h^*)=0.\tag{4·23}$$

如果(4·23)成立,且 $A_n(h)$在 h^* 不取极值,则当 α 变动时 Γ^{h^*} 不消失. 又若

$$A_n(h^*)=A'_n(h^*)=\cdots=A_n^{(k-1)}(h^*)=0,\qquad A_n^{(k)}(h^*)\neq0,$$

则当$|\alpha|$充分小时在 Γ^{h^*} 邻近,方程$(4·1)_\alpha$不能有多于 k 个的极限环.

1) 由于每一 Γ^h 都不是单重环, s 的初值可以固定取 $s_0=0$, 故在 Ψ 中不再标出.

【证】 若 $A_n(h^*)\neq 0$, 则由 (4·22) 看出当 $|\alpha|\neq 0$, $|\alpha|$ 与 $|h-h^*|$ 充分小时

$$\Psi(0,\ \alpha,\ h)\neq 0,$$

即 Γ^{h^*} 不产生方程 $(4\cdot1)_\alpha$ 的闭轨线.

次设 $A_n(h^*)=0$, 但不是 $A_n(h)$ 的极值, 则对任何 $\varepsilon>0$ 常存在 $h_1<h^*<h_2$, $|h_i-h^*|<\varepsilon$ 使

$$A_n(h_1)\cdot A_n(h_2)<0,$$

因而存在 $\delta>0$, 使当 $|\alpha|<\delta$ 时有

$$\Psi(0,\ \alpha,\ h_1)\Psi(0,\ \alpha,\ h_2)<0.$$

于是对任一固定的 α, $|\alpha|<\delta$, 至少有一个 h_α 使

$$\Psi(0,\ \alpha,\ h_\alpha)=0,$$

其中 $h_1<h_\alpha<h_2$, 即方程 $(4\cdot1)_\alpha$ 有闭轨线, 它与 l 的交点位于 Γ^{h_α} 上.

最后, 设存在 $\alpha_i\to 0\ (i\to\infty)$, 使当 $\alpha=\alpha_i$ 时方程 (4·1) 在 Γ^{h^*} 邻近有 $k+1$ 个极限环, 则必有 $h_i^j\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ k+1)$ 使

$$A_n(h_i^j)+\alpha_i A_{n+1}(h_i^j,\ \alpha_i)=\frac{n!}{\alpha_i^n}\Psi(0,\ \alpha_i,\ h_i^j)=0.$$

于是由 Rolle 定理知道存在 h_i^* 介于诸 h_i^j 之间, 使

$$\Psi_{h^k}^{(k)}(0,\ \alpha_i,\ h_i^*)=0,$$

即
$$A_n^{(k)}(h_i^*)+\alpha_i\frac{\partial^k}{\partial h^k}A_{n+1}(h_i^*,\ \alpha_i)=0.$$

令 $i\to\infty$, 则 $\alpha_i\to 0$, $h_i^*\to h^*$, 由上式可得

$$A_n^{(k)}(h^*)=0,$$

与假设相矛盾. 定理证毕.

推论 若 $A_n(h^*)=0$, $A_n'(h^*)\neq 0$, 则 Γ^{h^*} 能产生方程 $(4\cdot1)_\alpha$ 的唯一的极限环.

利用定理 4·11 及其推论, 可以导出一些古典的熟知的结果.

定理 4·12 van der Pol 方程

$$\ddot{x}+\mu(x^2-1)\dot{x}+x=0$$

当$|\mu|$足够小时有唯一的周期解(不计 t 的平移)。

【证】 等价方程组为

$$\frac{dx}{dt}=y, \quad \frac{dy}{dt}=-x+\mu y(1-x^2), \tag{4·24}$$

当 $\mu=0$ 时方程有一系闭轨线 $x^2+y^2=h^2$. 由于对方程(4·24)有

$$P_0=y,\ Q_0=-x,\ P_{x0}+Q_{y0}\equiv 0,\ P_{\mu 0}\equiv 0,\ Q_{\mu 0}=y(1-x^2),$$

故条件(4·18)成为

$$A_1(h)=\oint_{\Gamma^h} y^2(1-x^2)dt=0. \tag{4·25}$$

以 $x=h\sin t$, $y=h\cos t$ 代入上式, 得到

$$A_1(h)=\int_0^{2\pi} h^2\cos^2 t(1-h^2\sin^2 t)dt=\pi h^2\left(1-\frac{h^2}{4}\right)=0,$$

但 $h\neq 0$, 故必 $h=2$. 又易算出 $A_1'(2)\neq 0$, 故由定理 4·11 的推论可知方程(4·24)当$|\mu|$足够小时有唯一的闭轨线, 它当 $\mu\to 0$ 时趋于半径为 2 的圆 $x^2+y^2=4$. 可以证明(见习题 1), 当 $\mu>0$ 时极限环为稳定, $\mu<0$ 时为不稳定.

其次, 考虑 Hamilton 系统的扰动方程

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y}+p(x,\ y,\ \alpha), \quad \frac{dy}{dt}=\frac{\partial H}{\partial x}+q(x,\ y,\ \alpha), \tag{4·26}$$

这里假设 $p(x,\ y,\ 0)\equiv q(x,\ y,\ 0)\equiv 0$, 且方程

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt}=\frac{\partial H}{\partial x}$$

的通积分 $H(x,\ y)=h$ 为一系闭轨线 Γ^h. 现在

$$P_0=-\frac{\partial H}{\partial y},\ Q_0=\frac{\partial H}{\partial x}, P_{x0}+Q_{y0}\equiv 0,$$

$$P_{\alpha 0}=p_\alpha'(x,\ y,\ 0),\ Q_{\alpha 0}=q_\alpha'(x,\ y,\ 0),$$

条件(4·18)成为

$$A_1(h)=\oint_{\Gamma^h}\left[\frac{\partial H}{\partial x}p'_\alpha(x,\ y,\ 0)+\frac{\partial H}{\partial y}q'_\alpha(x,\ y,\ 0)\right]dt$$

$$=\oint_{\Gamma^h}p'_\alpha(x,\ y,\ 0)dy-q'_\alpha(x,\ y,\ 0)dx$$

$$=\iint_{G^h}[p''_{x\alpha}(x,\ y,\ 0)+q''_{y\alpha}(x,\ y,\ 0)]dx\,dy=\Phi(h)=0,$$

其中 G^h 是 Γ^h 的内域. 这样, 定理 4·10 及其推论就成为

定理 4·13 若 $\Phi(h^*)=0$, $\Phi'(h^*)\neq 0$, 则当 $|\alpha|$ 甚小时方程 (4·26) 在 Γ^{h^*} 邻近存在唯一的极限环. 又若

$$\Phi(h^*)=\Phi'(h^*)=\cdots=\Phi^{(k-1)}(h^*)=0,\qquad \Phi^{(k)}(h^*)\neq 0,$$

则方程 (4·26) 在 Γ^{h^*} 邻近不能有多于 k 个的极限环.

这定理的前半部是 Л. С. Понтрягин[58] 的结果, 后半部是张芷芬的结果.

关于定理 4·7 中所说的 k 个极限环究竟能否实现的问题, A. A. Андронов 和 E. A. Леонтович[59] 有详细的研究, 由于内容较繁, 不在此介绍, 请参考原文或秦元勋的《微分方程所定义的积分曲线》, 下册第四篇.

习 题

1. 证明在定理 4·11 的推论的条件之下, 若 Γ^h 随 h 的增加而扩大, 则当

$$\alpha^n A'_n(h^*)<0\quad(>0)$$

时由 Γ^{h^*} 所产生的唯一极限环为稳定(不稳定)环.

2. 证明若 Γ 为单重环, 又 $\Psi'_\alpha(0,\ s_0,\ 0)\equiv 0$, 则 $\left.\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}\equiv 0$ (沿着 Γ).

3. 说明在定理 4·6 中对调 α 与 n_0 的位置而得到的对偶定理是明显而没有意义的.

4. 证明在定理 4·7 的条件下若 k 为奇数, 则在 Γ 的邻域中至少存在方程 $(4·1)_\alpha$ 的一个与 Γ 有相同稳定性的极限环.

5. 与问题 III (在题 3 意义下的) 对偶的问题是什么? 对应于条件 (4·18) 的是什么条件?

§5. 极限环的存在性

自从 van der Pol 在 1926 年研究了方程

$$\ddot{x}+\mu(x^2-1)\dot{x}+x=0 \quad (\mu>0) \tag{5·1}$$

并证明与之对应的相平面上的一阶方程组

$$\frac{dx}{dt}=y, \quad \frac{dy}{dt}=-x+\mu(1-x^2)y \tag{5·2}$$

存在稳定极限环以后，他的结果不断地被许多物理与数学工作者所推广．迄今为止，人们不但研究了较(5·1)更为广泛的二阶非线性方程：

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0 \tag{5·3}$$

及

$$\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=0 \tag{5·4}$$

的极限环问题，而且推广(5·2)，还研究了若干不一定能化为二阶非线性方程的方程组的极限环问题，如

$$\frac{dx}{dt}=f_1(x)+f_2(y), \quad \frac{dy}{dt}=g_1(x)+g_2(y) \tag{5·5}$$

型的，以及最一般的方程

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y), \quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y), \tag{5·6}$$

其中尤以 P, Q 为二次或三次多项式的特别多．对(5·6)我们将在本书的下半本作深入而详细的研究，本节主要限于介绍证明(5·3)，(5·4)和(5·5)型的方程存在极限环的方法．关于这个问题，虽然本质上来说，都归结为应用环域定理来肯定极限环的存在性，但对不同类型的方程仍有不同的技巧．我们将主要根据方程类型和技巧的不同介绍几个最典型的定理，然后在最后较多地罗列一些近代文献，以便于读者查阅．

I. 方程(5·4)与(5·3)在非线性振动理论中是有明显的物理意义的，因此除了一般的保证解的存在唯一性的假定，如 f, g 为连续(以后不再提了)以外，我们都假定：

$$xg(x)>0 \quad 当 \quad x\neq 0 \quad (从而必有\ g(0)=0), \tag{5·7}$$

与

$$f(0)<0 \quad 或 \quad f(0,0)<0. \tag{5·8}$$

(5·7)表示存在唯一的平衡位置 $x=\dot{x}=0$，且恢复力与位移的方向相反，(5·8)表示振动系统在平衡位置附近有负的阻尼. 在这些条件下，通常就称(5·3)为Liénard方程，它是(5·1)的推广，首先由 A. Liénard[9] 所研究.

为了研究方程(5·3)，一般记

$$G(x)=\int_0^x g(\xi)d\xi, \quad F(x)=\int_0^x f(\xi)d\xi, \tag{5·9}$$

而去研究与(5·3)等价的方程组[1]：

$$\frac{dx}{dt}=y-F(x), \quad \frac{dy}{dt}=-g(x). \tag{5·10}$$

定理 5·1(А. В. Драгилёв) 设

1) $xg(x)>0$ 当 $x\neq 0$; $G(\pm\infty)=+\infty$;

2) $xF(x)<0$ 当 $x\neq 0$ 且 $|x|$ 充分小;

3) 存在常数 $M>0$ 以及 $K>K'$，使

$F(x)\geqslant K$ 当 $x>M$; $F(x)\leqslant K'$, 当 $x<-M$.

则方程(5·10)存在稳定极限环.

【证】[2] 记

$$\lambda(x, y)=\frac{y^2}{2}+G(x), \quad \lambda_1(x, y)=\frac{(y-K)^2}{2}+G(x),$$

---

1) 在这里 $y=\dot{x}+F(x)$，而不是象(5·2)中取 $y=\dot{x}$. 这种变换称为Liénard变换，(x, y)平面称为Liénard平面. 其优点是：两个非线性函数被分开放在两个方程中去了；并且代替 $f(x)$，出现了它的积分 $F(x)$，后者具有更好的光滑性.

2) 这里改用黄克成[61]的较为简便的证法，它还具有便于估计极限环的存在区域的好处.

$$\lambda_2(x, y)=\frac{(y-K')^2}{2}+G(x).$$

分别计算它们关于 t 的全导数，得到

$$\frac{d\lambda}{dt}=\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$
$$=y(-g(x))+g(x)(y-F(x))=-g(x)F(x), \quad (5\cdot 11)$$
$$\frac{d\lambda_1}{dt}=g(x)(K-F(x)), \ \frac{d\lambda_2}{dt}=g(x)(K'-F(x)).$$

由条件 1) 可知 $\lambda(x, y)=C(C>0)$ 表示一族包含原点的闭曲线，称之为等能量曲线，称 $\lambda(x, y)$ 为能量函数．由条件 2) 和 (5·11) 知在原点附近有 $\frac{d\lambda}{dt}>0$．所以对位于原点附近的闭曲线 $\lambda(x,y)=C$ 来说，一切与它相交的轨线都是从内部穿到外部去的．为了要应用环域定理，只要再做一条环域的外境界线 Γ，使得一切轨线与 Γ 相交时都从外部穿到内部就成了．

首先，取 $y_1>0$，使 $y_1>K$，$-y_1<K'$，且对区域

$$R_+: \ -M\leqslant x\leqslant M, \quad y\geqslant y_1$$

中的一切点有

$$y-F(x)>0, \quad \frac{-g(x)}{y-F(x)}<\frac{K-K'}{2M}; \quad (5\cdot 12)$$

而对区域 $\qquad R_-: \ -M\leqslant x\leqslant M, \quad y\leqslant -y_1$

中的一切点有

$$y-F(x)<0,$$
$$\frac{-g(x)}{y-F(x)}<\frac{K-K'}{2M}. \quad (5\cdot 13)$$

设

$$l=\max\left[\frac{(y_1-K')^2}{2}, \frac{(-y_1-K)^2}{2}\right],$$

考察闭曲线 $\Gamma=\widehat{ABCDA}$

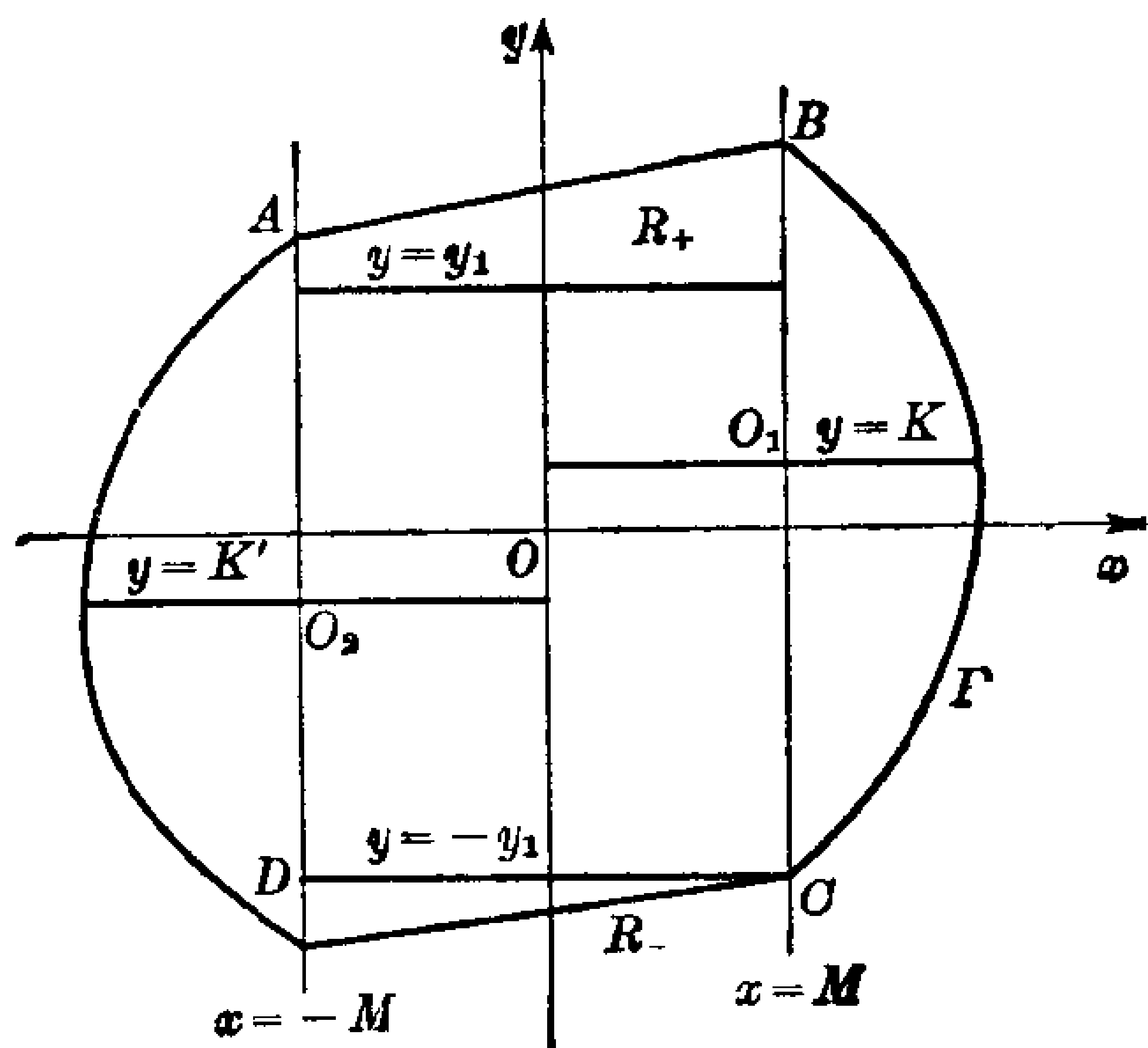


图 5·1

$\left(图5\cdot1对应于\frac{(-y_1-K)^2}{2}>\frac{(y_1-K')^2}{2}\right)$, 其中 $\widehat{BC}$ 是闭曲线 $\lambda_1(x, y)=l+G(M)$ 位于直线 $x=M$ 右方的部分, $\widehat{AD}$ 是闭曲线 $\lambda_2(x, y)=l+G(-M)$ 位于直线 $x=-M$ 左方的部分, $\overline{AB}$ 与 $\overline{CD}$ 为直线段. 记直线 $x=M$ 与直线 $y=K$ 的交点为 O_1, $x=-M$ 与 $y=K'$ 的交点为 O_2. 由 Γ 的作法易证:

$$y_C\leqslant -y_1,\ y_A\geqslant y_1,\ |\overline{O_1C}|=|\overline{O_2D}|,\quad |\overline{O_1B}|=|\overline{O_2A}|.$$

于是 $\overline{AB}\mathbin{/\!/}\overline{DC}$, 且 $\overline{AB}$ 与 $\overline{DC}$ 分别位于 R_+ 与 R_- 中, 斜率为 $\beta=\frac{K-K'}{2M}$. 由条件 1), 3) 以及(5·11), (5·12), (5·13)可知一切轨线与 Γ 相交的必从外部穿到内部, 定理证毕.

上述证法可被推广以得到比(5·10)更一般的方程

$$\frac{dx}{dt}=h(y)-F(x),\quad \frac{dy}{dt}=-g(x) \tag{5·14}$$

存在极限环的充分条件, 其中 $g(x)$ 不一定只有一个零点, 又 $yh(y)>0$ 当 $y\neq0$, $h(+\infty)=+\infty$, $h(-\infty)=-\infty$. 为简单起见, 我们这里仅就 $h(y)\equiv y$ 的情况来证明一个定理. 至于(5·14), 请读者参考[61].

定理 5·2 设 $xF(x)<0$(或 >0)当 $x\neq0$ 且 $|x|$ 充分小, 又存在常数 $M>0$, $x_1>0$ 及 $x_2>0$ 使

1) $xg(x)>0$ 当 $-x_2<x<0$ 及 $0<x<x_1$;

2) $F(x)\geqslant -M$(或 $F(x)\leqslant M$)当 $0<x<x_1$, 而

$$F(x_1)\geqslant M+\sqrt{2l}\quad (或\ F(x_1)\leqslant -M-\sqrt{2l});$$

3) $F(x)\leqslant M$(或 $F(x)\geqslant -M$)当 $-x_2<x<0$, 而

$$F(-x_2)\leqslant -M-\sqrt{2l}\quad (或\ F(-x_2)\geqslant M+\sqrt{2l});$$

其中 $l=\max[G(x_1), G(-x_2)]$, 则方程(5·10)存在稳定(不稳定)极限环.

【证】 记

$$\lambda_1(x, y)=\frac{1}{2}(y+M)^2+G(x),$$

$$\lambda_2(x, y)=\frac{1}{2}(y-M)^2+G(x),$$

于是容易算出

$$\frac{d\lambda_1}{dt}=-g(x)[M+F(x)],$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt}=g(x)[M-F(x)]. \tag{5·15}$$

关于环域的内境界线的作法与定理 5·1 同，现在来做外境界线．在条件 2), 3) 中只考虑括号以外的情况．考察闭曲线

$$\Gamma=\widehat{ABCDEFA}$$

(图 5·2 对应于 $G(x_1)>G(-x_2)$ 的情况)，其中 $\widehat{AB}$ 为曲线 $\lambda_1(x, y)=\frac{1}{2}(2M+\sqrt{2l})^2$ 的一部分，以 $A(0, M+\sqrt{2l})$ 为左端点，容易看出 $y_B>M$; $\widehat{AF}$ 是曲线 $\lambda_2(x, y)=l$ 的一部分，且 $y_F\geqslant M$. $\widehat{DE}$ 是曲线

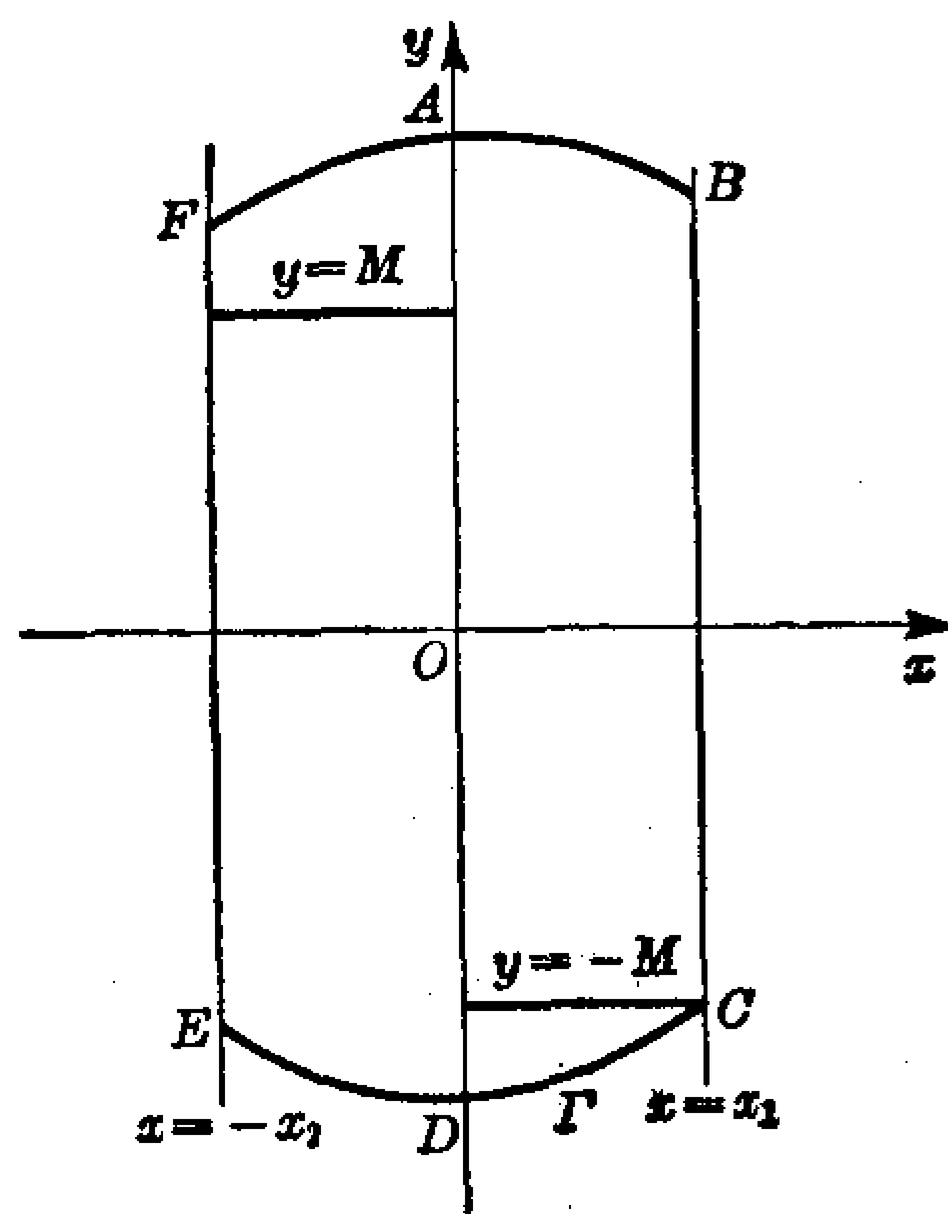


图 5·2

$$\lambda_2(x, y)=\frac{1}{2}(2M+\sqrt{2l})^2$$

的一部分，以 $D(0, -M-\sqrt{2l})$ 为右端点，且易看出 $y_E<-M$; $\widehat{DC}$ 是曲线 $\lambda_1(x, y)=l$ 的一部分，且 $y_C\leqslant -M$; $\overline{BC}$, $\overline{EF}$ 为直线段． 显然 $y_B<y_A=M+\sqrt{2l}$, $y_E>y_D=-M-\sqrt{2l}$. 由定理的条件及(5·15)可知方程(5·10)的一切与 Γ 相交的轨线都是从外部穿到内部的，定理证毕．

由于在定理 5·2 中对 $F(x)$, $g(x)$ 所加的条件都是局部的，因此当方程(5·10)的奇点不唯一，即 $g(x)$ 有多于一个零点时，或条件 $G(\pm\infty)=+\infty$ 不成立时，定理 5·2 也可适用．

例 1 方程

$$\frac{dx}{dt}=y-x^3+3x,\quad \frac{dy}{dt}=x^2-6x \tag{5·16}$$

存在极限环(此方程有奇点(0,0)与(6, 198)).

【证】 取 $M=2$, $x_1=x_2=3$, 可以验证定理 5·2 的条件成立.

多次应用定理 5·2 中的技巧可以给出方程(5·10) 至少存在 n 个极限环的充分条件. 例如, 可以证明方程

$$\frac{dx}{dt}=y+x^2\sin x,\quad \frac{dy}{dt}=-x,$$

及
$$\frac{dx}{dt}=y+x^2\sin x,\quad \frac{dy}{dt}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

在带域 $|x|\leqslant n\pi+\frac{\pi}{2}$ 内均至少存在 n 个极限环. 对于后一方程组, $g(x)=\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $G(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$, $G(\pm\infty)=1$.

II. 第二种证明方程(5·10)存在极限环的方法与前面两定理所用的方法不太相同, 今以 A. Ф. Филиппов 的定理为代表来介绍这种方法[62].

定理 5·3 设在(5·10)中 $g(x)$ 仍满足条件

$$xg(x)>0 \quad 当 \quad x\neq 0,\ G(\pm\infty)=+\infty; \tag{5·17}$$

又设经过变数变换

$$\int_0^x g(\xi)d\xi=z_1(x),\quad \int_0^x f(\xi)d\xi=F(x)=F_1(z_1),\quad 当\quad x>0; \tag{5·18}$$

$$\int_0^x g(\xi)d\xi=z_2(x),\quad \int_0^x f(\xi)d\xi=F(x)=F_2(z_2),\quad 当\quad x<0 \tag{5·19}$$

之后, 函数 $F_1(z)$ 与 $F_2(z)$ 满足条件:

1) 对于小的 $z(0<z<\delta)$ 有 $F_1(z)\leqslant F_2(z)$, 但不是 $F_1(z)\equiv F_2(z)$; 又 $F_1(z)<a\sqrt{z}$, $F_2(z)>-a\sqrt{z}$, 其中 $0<a<\sqrt{8}$.

2) 存在一数 $z_0>0$, 使

$$\int_0^{z_0}(F_1(z)-F_2(z))dz>0,$$

且当 $z>z_0$ 时有 $F_1(z)\geqslant F_2(z)$, $F_1(z)>-a\sqrt{z}$, $F_2(z)<a\sqrt{z}$. 则方程(5·10)存在稳定极限环.

在改 x 为 z_1 与 z_2 并且消去 t 以后, (5·10)成为

$$\frac{dz_1}{dy}=F_1(z_1)-y, \quad 当 \quad z_1>0, \tag{5·20}$$

$$\frac{dz_2}{dy}=F_2(z_2)-y, \quad 当 \quad z_2>0. \tag{5·21}$$

Филиппов 方法的要点在于: 通过变换(5·18)与(5·19)把方程(5·10)的右半平面的轨线变为方程(5·20)的右半平面的积分线, 把方程(5·10)的左半平面的轨线变为方程(5·21)的右半平面的积分线; 然后对(5·20)与(5·21)应用微分方程的比较定理, 以确定两方程的积分线与 y 轴的交点的相对位置; 最后再回到(x, y)平面中去, 就容易造出我们所需要的环域的外境界线.

首先注意: 对于方程(5·20)与(5·21), 只要假定 $f(x)$ 与 $g(x)$ 连续, 并且条件(5·17)成立, 就可保证解的存在与唯一性. 这是因为

$$\frac{dF_i(z_i)}{dz_i}=\frac{dF(x)}{dx}\,\frac{dx}{dz_i}=\frac{f(x)}{g(x)} \quad (i=1, 2)$$

在半平面 $z_i>0$ 中为连续, 所以(5·20)与(5·21)在右半平面中解的存在与唯一性可以得到保证. 至于在 y 轴上除原点以外的任何一点, 解的存在唯一性可由方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{g(x)}{F(x)-y}$$

的右方具有关于 y 的连续偏导数得到保证.

引理 5·1 设 $F(z)$ 连续, $F(0)=0$, 则经过点 $B(z_0, F(z_0))$ $(z_0>0)$ 的方程

$$\frac{dz}{dy}=F(z)-y \tag{5·22}$$

的积分线必交 y 轴于两点 A 与 A'，使 $y_A\geqslant0$，$y_{A'}\leqslant0$，其中至少有一个成立真正的不等式.

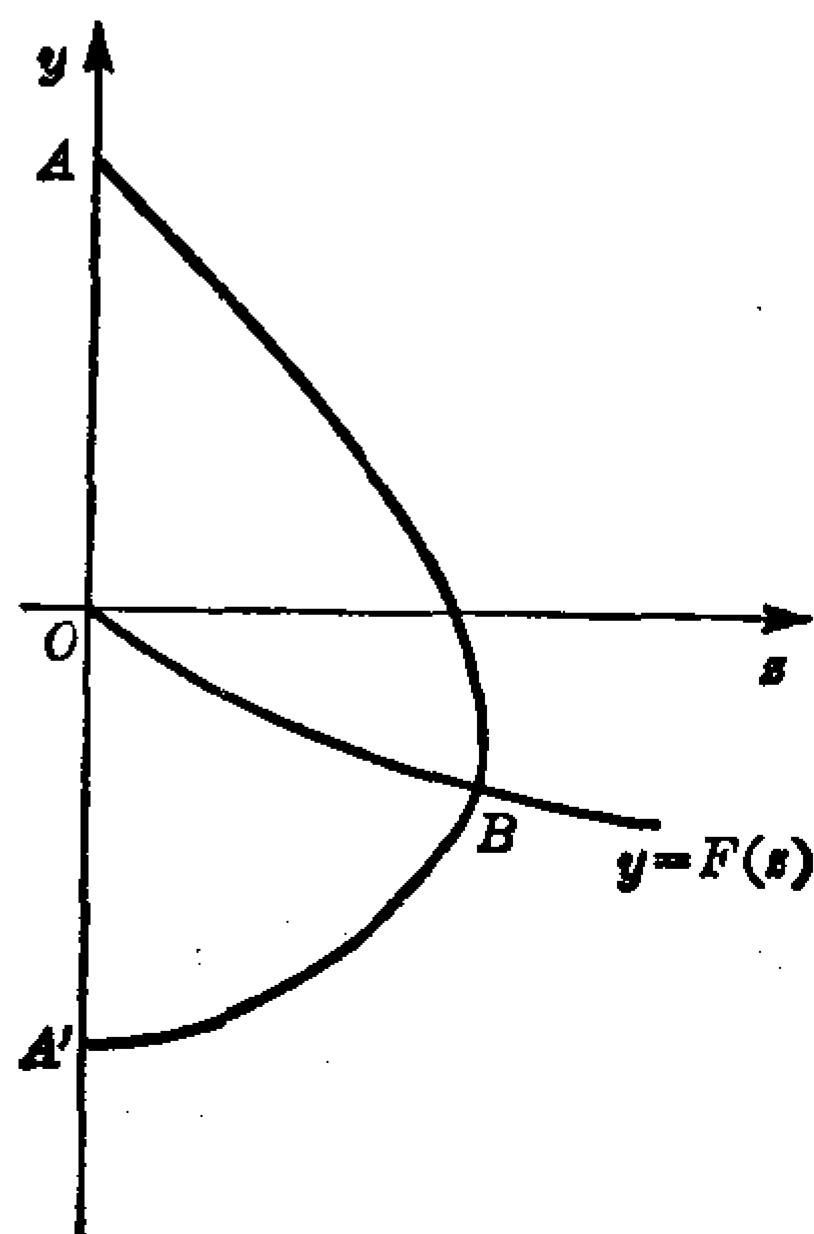


图 5·3

【证】 注意(5·22)以及 $\left|\frac{dy}{dz}\right|<1$ 当 $|y|>1+\max\limits_{[0,z_0]}|F(z)|$，可知过等倾线 $y=F(z)$ 上的点 B 的积分线位于直线 $z=z_0$ 的左方. 它在 $y=F(z)$ 上方的部分有负的斜率，在 $y=F(z)$ 下方的部分有正的斜率(图 5·3). 但两头都必与 y 轴相交，设交点为 A 与 A'，显见不能有 $A=A'$.

引理 5·2 设 $F(z)$ 连续，$F(0)=0$，且当 $z>z_0$ 时有 $F(z)<a\sqrt{z}$ $(0<a<\sqrt{8})$，则从负 y 轴上任一点 $K(0, y_K)$ 出发的(5·22)的积分线必仍回头与 y 轴交于一点 $L(0, y_L)$，且 $y_L\geqslant0$. (仿此，若 $F(z)>-a\sqrt{z}$，则从正 y 轴上任一点 $M(0, y_M)$ 出发的积分线必回头与 y 轴交于一点 $N(0, y_N)$，且 $y_N\leqslant0$.)

【证】 若从 K 出发的(5·22)的积分线不与直线 $z=z_0$ 相交，则证明与引理 5.1 一样. 今设积分线与 $z=z_0$ 交于一点 P，它位于等倾线 $y=F(z)$ 的下方. 在半平面 $z>z_0$ 中比较方程 (5·22) 与方程

$$\frac{dw}{dy}=a\sqrt{w}-y \tag{5·23}$$

的经过同一点 P 的积分线. 因方程(5·23)有通积分

$$2w-ay\sqrt{w}+y^2$$
$$=C\exp\left\{\frac{2a}{\sqrt{8-a^2}}\tan^{-1}\left[\left(a-\frac{4\sqrt{w}}{y}\right)\Big/\sqrt{8-a^2}\right]\right\},$$

它的任一积分线都与正负 y 轴各有一个交点，可知对 (5·22) 的

经过P点的积分线$z=z(y)$与(5·23)的经过同一点的积分线[1] $w=w(y)$，当$y>y_P$时应有$z(y)<w(y)$，从而$z(y)$亦必与$y=F(z)$相交，然后再回头与y轴交于一点L，显见$y_L\geqslant 0$.

注意：由引理5·2的证明可见，若在引理5·1中设$F(z)>-a\sqrt{z}$，$0<a<\sqrt{8}$，则必有$y_A>0$；如果设$F(z)<a\sqrt{z}$，则必$y_{A'}<0$. 因而若在引理5·2的条件下再有$F(z)>-a\sqrt{z}$（或$F(z)<a\sqrt{z}$）当$0<z<\delta$，那末可证必有$y_L>0$（或$y_N<0$）.

【定理5·3的证明】 取$z'\in(0,\delta)$，使$F_1(z')<F_2(z')$. 经过$B(z', F_1(z'))$作方程

$$\frac{dy}{dz}=\frac{1}{F_1(z)-y} \tag{5·20}^*$$

的积分线，经过$E(z', F_2(z'))$作方程

$$\frac{dy}{dz}=\frac{1}{F_2(z)-y} \tag{5·21}^*$$

的积分线，由引理5·1及定理的条件1)，知前者应与y轴交于两点A与C，后者应与y轴交于两点G与D（图5·4），且有

$$y_G>y_A\geqslant 0,\quad y_C<y_D\leqslant 0.$$

与图5·4对应的(x, y)平面中的图形见图5·5，两图中文字相同的点互相对应. 由于在正y轴的线段$\overline{A'G'}$上有$\frac{dx}{dt}>0$，在负y轴的线段$\overline{C'D'}$上有$\frac{dx}{dt}<0$，可知$\widehat{B'C'D'E'G'A'B'}$构成所需环域的内境界线[2].

其次，根据定理5·3的条件以及引理5·2后面的注意知道，从负y轴上的点K出发的方程(5·21)*的积分线必定回头交y轴于

1) 若令$\sqrt{w}=u$，则(5·23)成为$\frac{du}{dy}=\frac{au-y}{2u}$，当$a^2<8$时此方程以原点为焦点，一切积分线都是螺线.

2) 若$D=O$，则$D'=O$，这时可改用左半平面中过C'的轨线和过E'的铅直线以代替轨线段$\widehat{OE'}$.

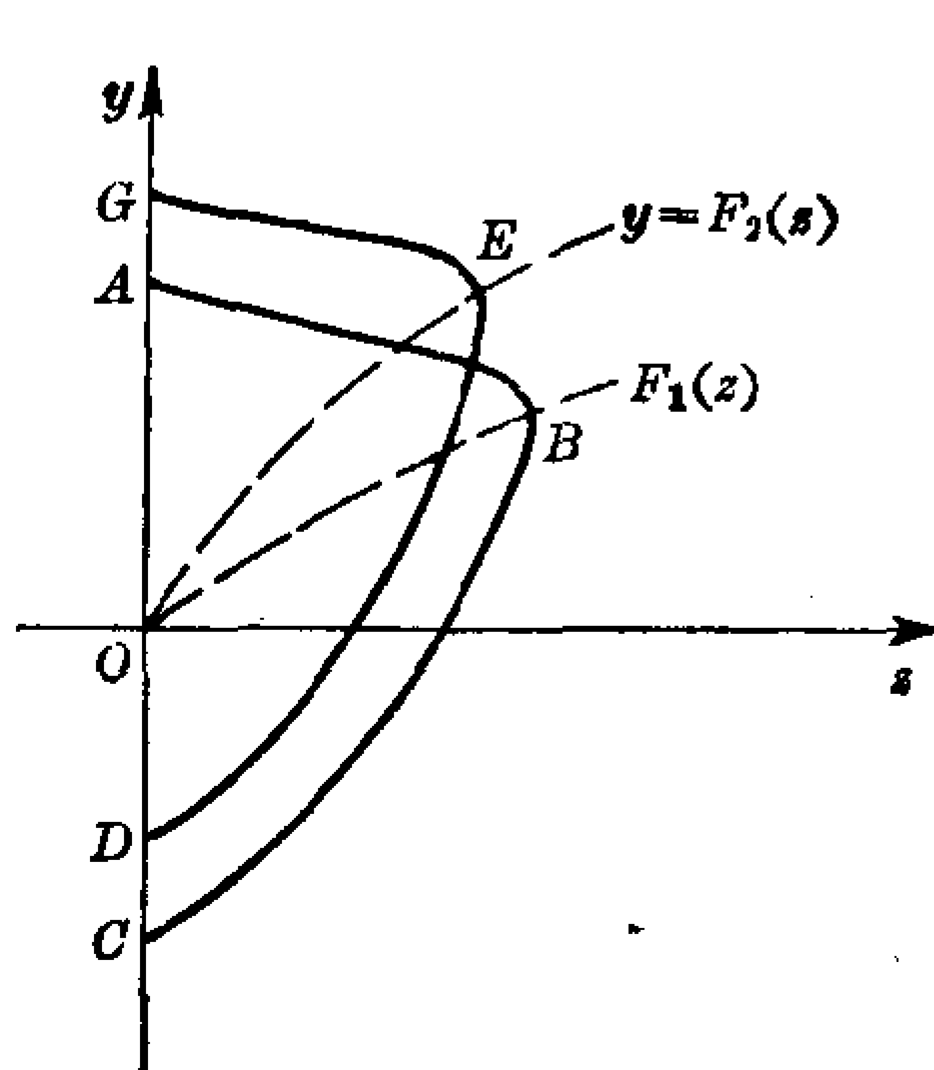


图 5·4

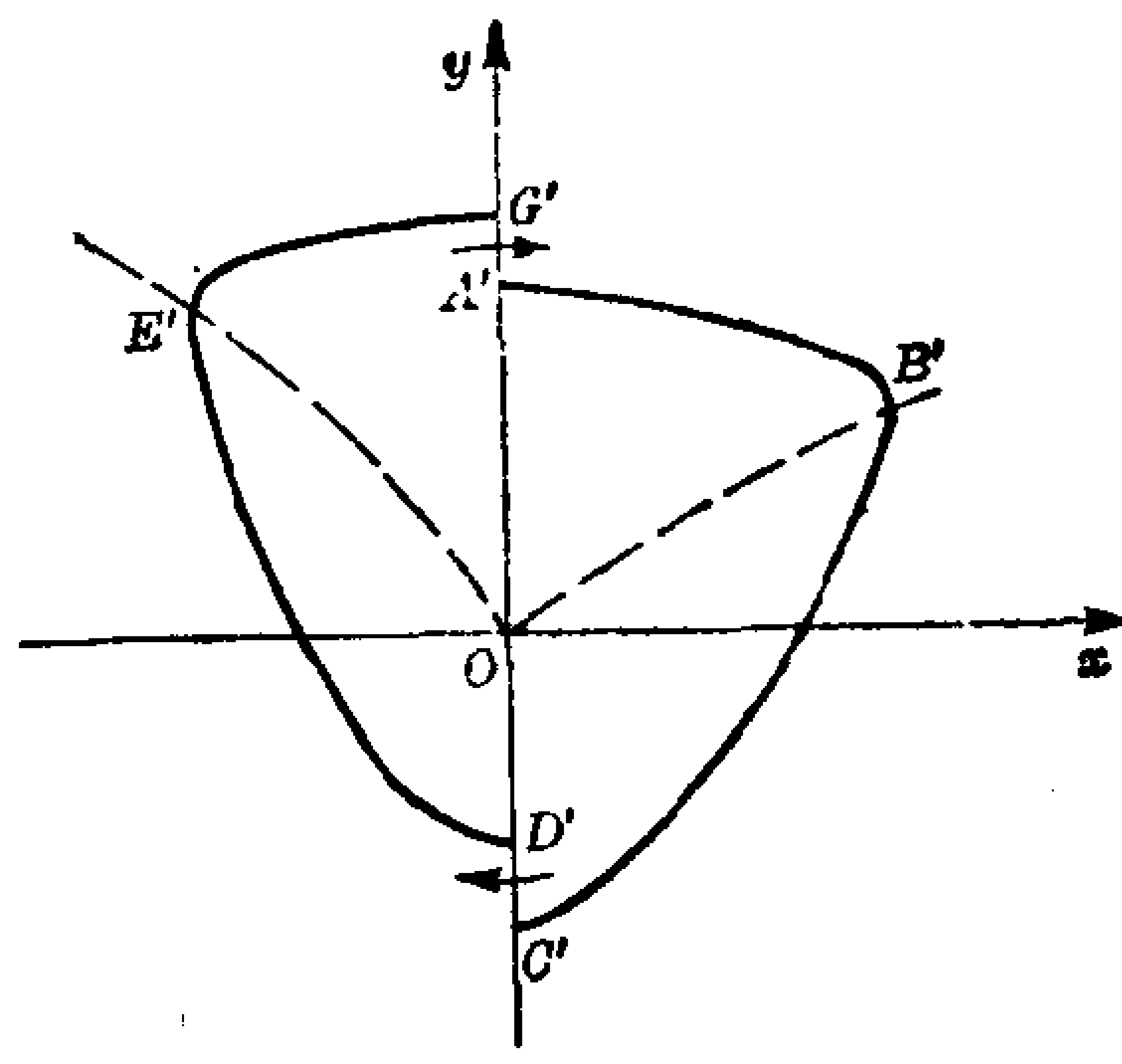


图 5·5

L, $y_L>0$, 当 y_K 减少时 y_L 增加. 设

$$\lim_{y_K\to-\infty} y_L=y_M,$$

则或 $y_M=+\infty$, 或 $0<y_M<+\infty$.

先看 $y_M<+\infty$ 的情况, 这时从 M 出发的方程(5·20)* 的积分线应回头交负 y 轴于一点 N, $y_N<0$; 而从 N 出发的方程(5·21)* 的积分线应回头交正 y 轴于 M 的下方一点 P(图 5·6).

转到(x, y)平面, 立刻看出轨线 $\widehat{M'N'P'}$ 与直线段 $\overline{M'P'}$ 构成环域的外境界线, 因为轨线与 $\overline{M'P'}$ 相交时必定自左向右. 这时稳定极限环的存在性已得证明.

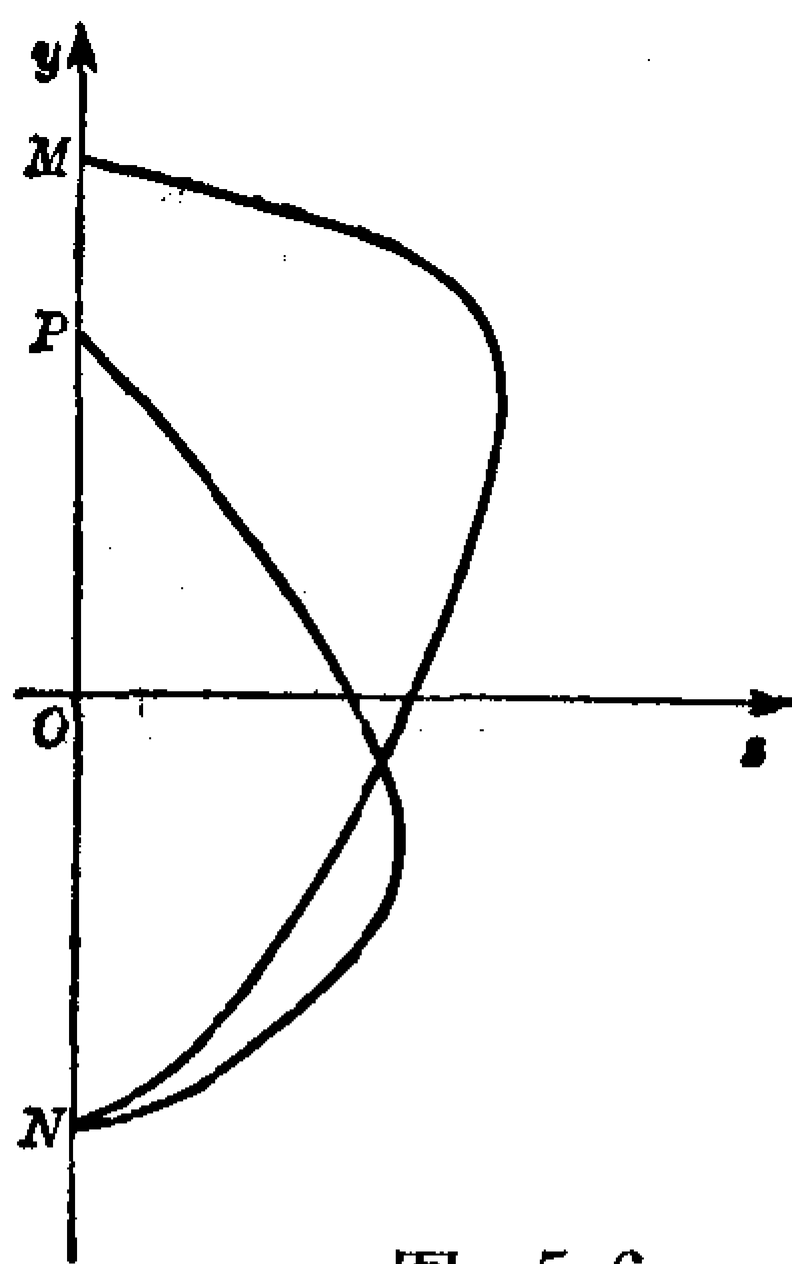


图 5·6

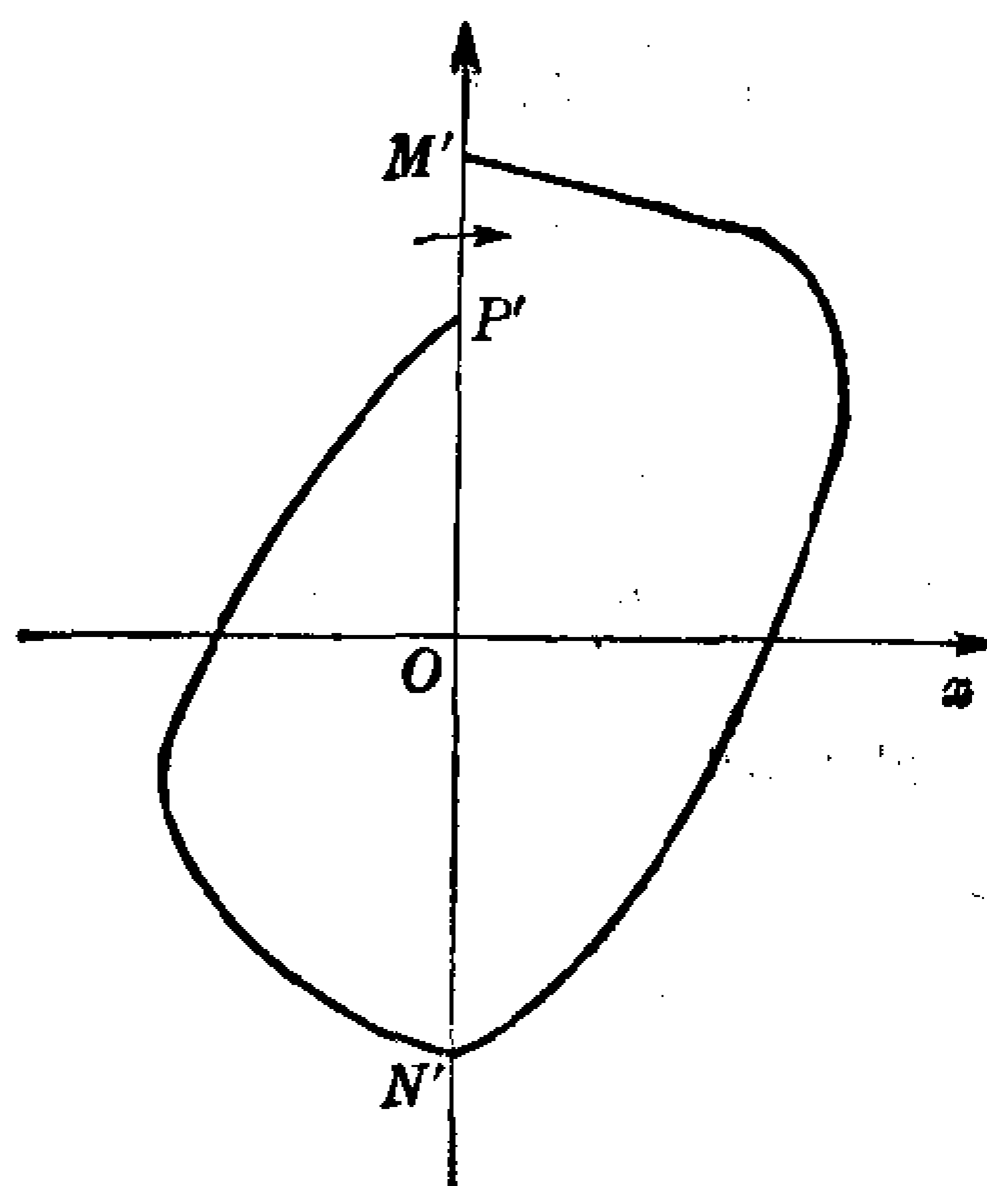


图 5·7

当 $y_M=+\infty$ 时以上的证明不适用. 我们还需要以下几个引理.

引理 5·3 设 $y_1(z)$ 与 $y_2(z)$ 分别是方程 (5·20)* 与 (5·21)* 的解, 它们满足同一初值条件 $y_1(0)=y_2(0)=y_0$. 对于定理的条件 2) 中的 z_0 以及任一 $\varepsilon>0$, 总可以取 $|y_0|$ 足够大, 使得 $y_1(z)$ 与 $y_2(z)$ 都在区间 $[0, z_0]$ 中存在, 且满足不等式

$$|y_1(z)-y_0|<\varepsilon, \quad |y_2(z)-y_0|<\varepsilon \quad \text{当 } 0\leqslant z\leqslant z_0.$$

【证】 记 $m=\max\limits_{[0,z_0]}[|F_1(z)|, |F_2(z)|]$, 若 $|y_0|\geqslant m+\dfrac{z_0}{\varepsilon}+\varepsilon$, 容易证明这时引理 5·3 的结论便能成立, 详情请读者自己补足.

由引理 5·3 立刻可得

引理 5·4 当 $|y_0|\to\infty$ 时在区间 $[0, z_0]$ 上均匀地成立

$$\frac{y_0^2}{(F_1(z)-y_1(z))(F_2(z)-y_2(z))}\to 1.$$

引理 5·5 存在一正数 p, 使当 $|y_0|>p$ 时有 $y_1(z_0)<y_2(z_0)$.

【证】 由 $y_1(0)=y_2(0)$ 及方程 (5·20)*, (5·21)*, 易见成立等式

$$\begin{aligned}y_0^2(y_2(z_0)-y_1(z_0)) &= \int_0^{z_0}\frac{(y_2(z)-y_1(z))y_0^2dz}{(F_1(z)-y_1(z))(F_2(z)-y_2(z))}\\ &+\int_0^{z_0}(F_1(z)-F_2(z))dz\\ &+\int_0^{z_0}\left(\frac{y_0^2}{(F_1(z)-y_1(z))(F_2(z)-y_2(z))}-1\right)\\ &\cdot(F_1(z)-F_2(z))dz=I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

当 $|y_0|\to+\infty$ 时由引理 5·3 及引理 5·4 知 $I_1\to 0$. 又因 $F_1(z)-F_2(z)$ 在 $[0, z_0]$ 中有界, 故 $I_3\to 0$. 此外, 根据条件 2) 知道 $I_2>0$. 因此, 当 $|y_0|\to+\infty$ 时上式右方趋向正的极限, 故当 $|y_0|$ 足够大时必有 $y_2(z_0)-y_1(z_0)>0$, 引理证毕.

现在来证明当 $y_M=+\infty$ 时的定理 5·3. 取方程 (5·21)* 的一条积分线 $\widehat{KQRL}$, 使 $y_K<-p$, $y_L>p$. 过 L 与 K 作方程 (5·20)*

的积分线 $\widehat{LST}$ 与 $\widehat{KV}$. 由引理5·5知有 $y_S<y_R$, $y_V<y_Q$. 由条件2)及比较定理知道 $\widehat{ST}$ 不能与 $\widehat{RQ}$ 相交, 故必回头交 $z=z_0$ 于 Q 上方一点 U(图5·8). 回到 (x, y) 平面, 可知轨线段 $\widehat{V'K'Q'R'L'S'T'U'}$ 与直线段 $\overline{U'V'}$ 一起构成所需环域的外境界线, 定理证毕.

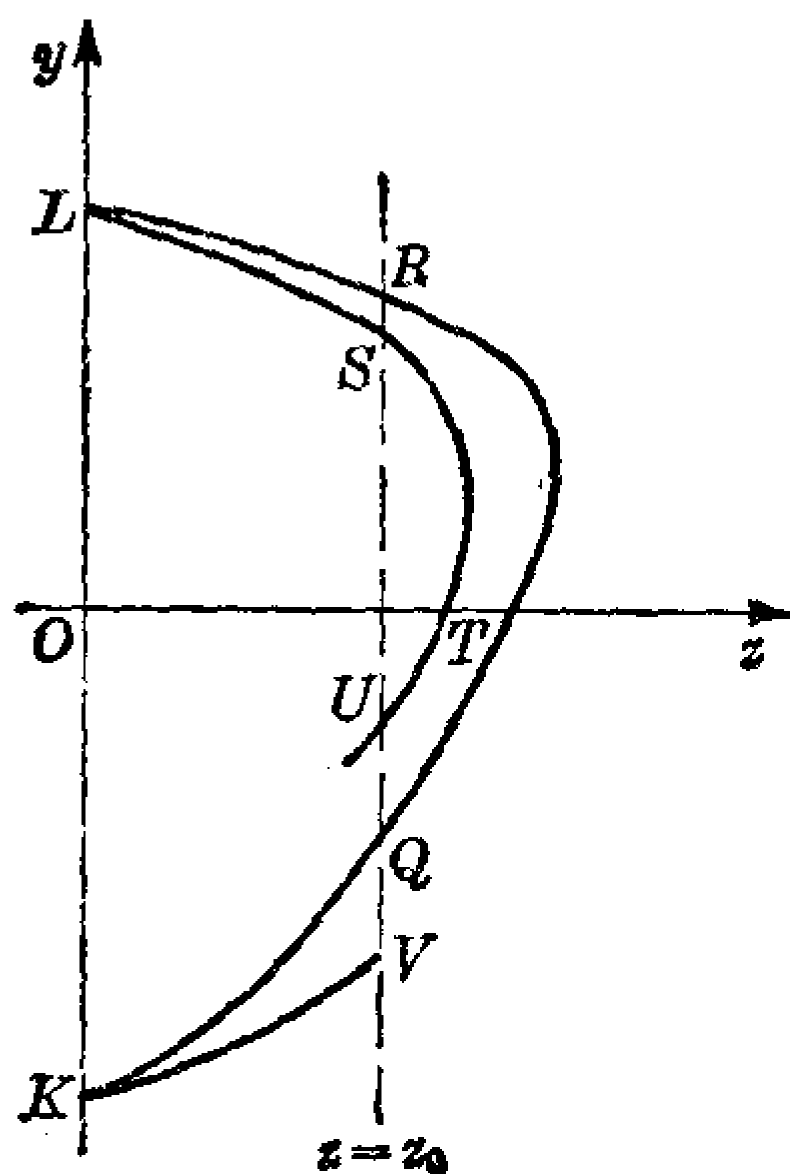


图 5·8

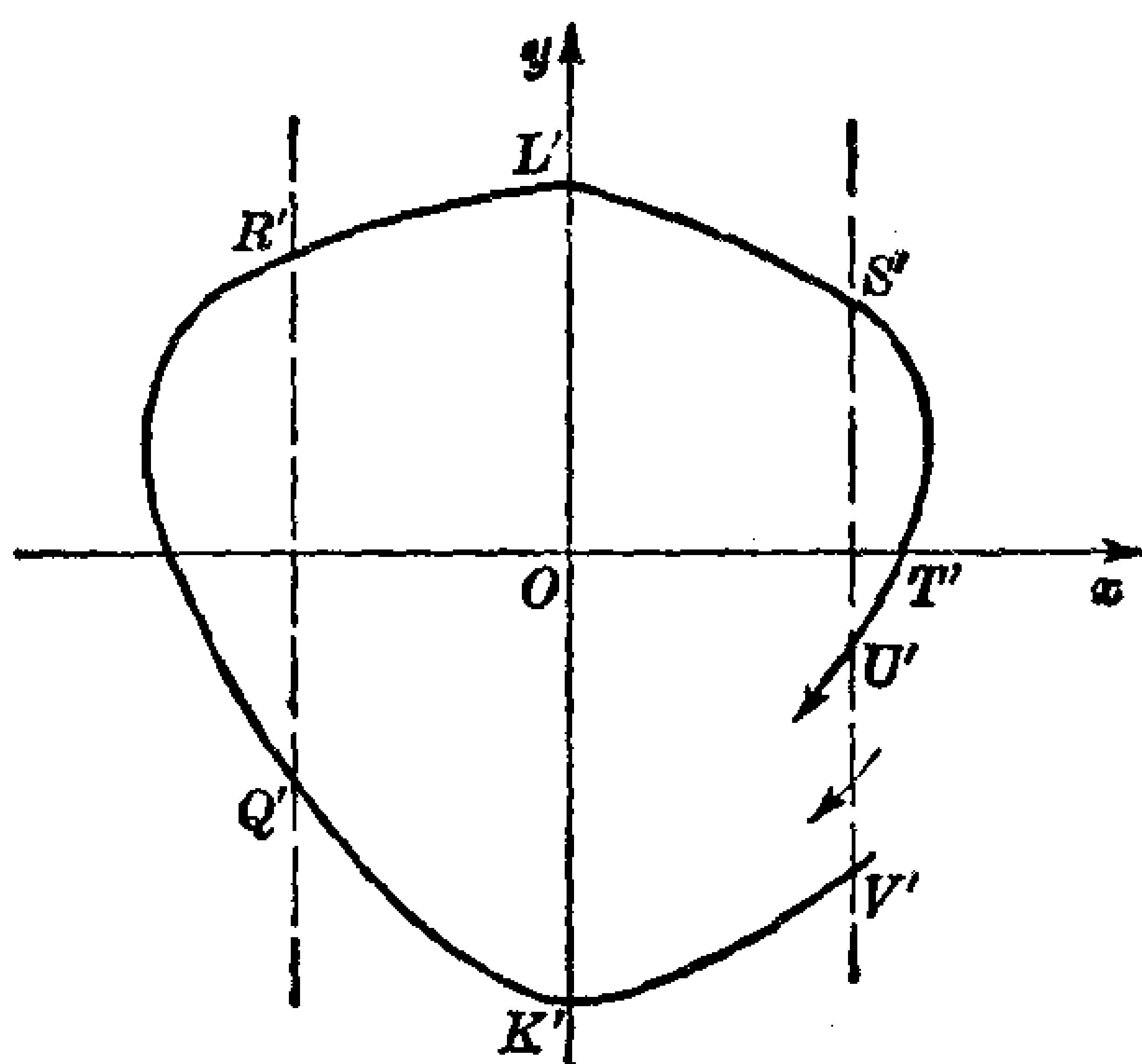


图 5·9

注意1. 如果对 $(0, \delta)$ 中的一切 z 有

$$-a\sqrt{z}<F_2(z)\equiv F_1(z)<a\sqrt{z},$$

则易见方程(5·10)以原点为中心点, 这是§1对称原理的推广.

注意2. 容易证明定理5·1是定理5·3的特例, 因此在定理5·1中也只须假定 $f(x)$ 与 $g(x)$ 连续, 就可以保证解的存在与唯一性. 事实上, 即使比 Филиппов 这一结果更迟数年发表的 R. P. de Figueiredo[63] 的定理也是它的特例.

此外, 由定理5·3的条件1)可以看出成立下一判别闭轨线不存在的法则:

定理5·4 若对一切 $z>0$ 有 $F_1(z)\leqslant F_2(z)$, 且对任一 $\delta>0$, 在 $(0, \delta)$ 中 $F_1(z)\not\equiv F_2(z)$, 则方程(5·10)无闭轨线.

推论 若 $g(x)=x$, $F(x)=s(x)+r(x)$, 其中 $s(x)$ 为偶次多项式, $s(0)=0$, $r(x)$ 为奇次多项式且 $xr(x)\geqslant 0$, 则方程 (5·10) 无闭轨线[1].

III. 下面转而研究方程(5·4). 注意: 此方程只能用通常的方法化为一阶方程组, 不能用 Liénard 变换化为一阶方程组. 对于这种方程的极限环问题首先是 N. Levinson 与 O. K. Smith [64] 进行研究, 但这里介绍的是 Драгилёв[65] 的结果, 其中的假设条件较 Levinson 与 Smith 的条件为轻, 证明方法也有所改进, 且不同于前面已介绍过的那两种方法.

定理 5·5 若在方程(5·4)中的 $f(x, v)$ 与 $g(x)$ 满足条件:

1) $xg(x)>0$ 当 $|x|>0$, $G(\pm\infty)=+\infty$;

2) $f(0, 0)<0$;

3) 存在 $x_0>0$, 使当 $|x|\geqslant x_0$ 时 $f(x, v)\geqslant 0$; 又存在 $M>0$ 使当 $|x|\leqslant x_0$ 时有 $f(x, v)>-M$;

4) 存在 $x_1>x_0$, 使对 x 的任一减少正函数 $v(x)$ 都有

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, v)dx\geqslant 4Mx_0+\alpha \quad (\alpha>0), \tag{5·24}$$

则方程(5·4)存在稳定极限环.

【证】 考虑与(5·4)等价的方程组

$$\frac{dx}{dt}=v, \quad \frac{dv}{dt}=-f(x, v)v-g(x), \tag{5·25}$$

和定理 5.1 中一样记

$$\lambda(x, v)=\frac{1}{2}v^2+G(x)=\frac{1}{2}v^2+\int_0^x g(x)dx,$$

由条件 1)知 $\lambda(x, v)=C$ 表示一系包含原点的单闭曲线; 由条件 2)知在原点附近有

$$\frac{d\lambda}{dt}=v\frac{dv}{dt}+g(x)\frac{dx}{dt}=-v^2 f(x, v)\geqslant 0,$$

1) 比较§3 习题 13.

故可取一很小的 $C_1>0$, 使在 $\lambda(x, v)=C_1$ 上处处有 $\frac{d\lambda}{dt}\geqslant 0$, 此闭曲线可以取做环域的内境界线(图 5·10).

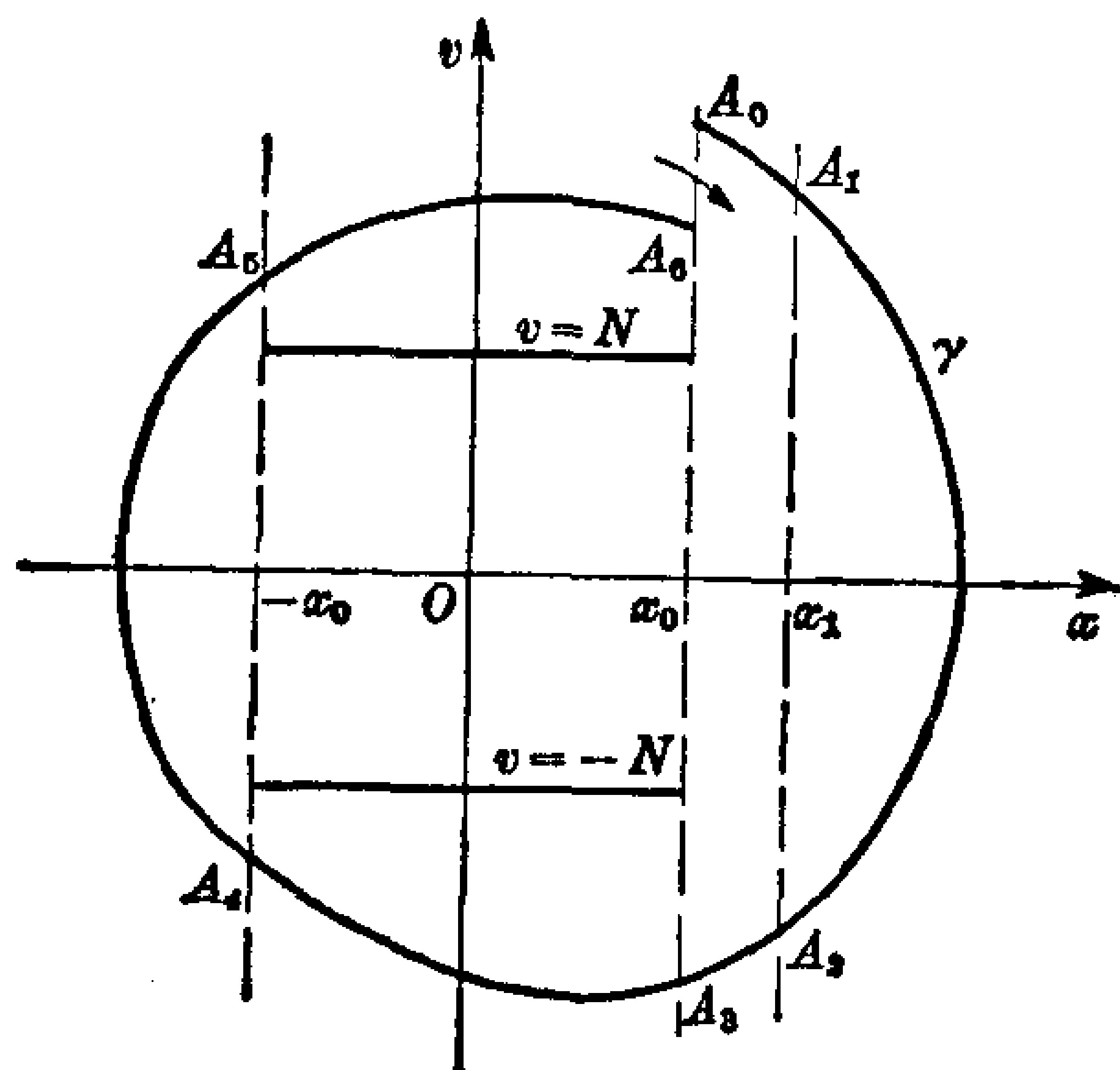


图 5·10

现在研究从直线 $x=x_0$ 上一点 $A_0(x_0, a)\,(a>0)$ 出发的轨线 γ. 由条件 3) 知在 $x=x_0$ 右方有 $\frac{d\lambda}{dt}\leqslant 0$. 但奇点是唯一的, 故 γ 必与 x 轴相交, 然后回头再与 $x=x_0$ 交于一点 A_3. 由于以后 a 要取得很大, 不妨设 γ 也与 $x=x_1$ 交于两点 A_1, A_2. 当 $|x|\leqslant x_0$ 时由条件 3) 知

$$\frac{dv}{dx}=-f(x, v)-\frac{g(x)}{v}\leqslant M+\frac{\max\limits_{|x|\leqslant x_0}|g(x)|}{|v|}<M+1,$$

当 $|v|>\max\limits_{|x|\leqslant x_0}|g(x)|$. 另一方面, 由前面已做出的环域的内境界线以及

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{v=0}=-g(x),$$

可知 γ 在 A_3 以后必将与负 v 轴相交而进入左半平面. 此后它或是在 $x=-x_0$ 的右方穿过负 x 轴而进入第二象限, 或是在 A_4 穿过 $x=-x_0$. 但在 $x=-x_0$ 左方又有 $\frac{d\lambda}{dt}\leqslant 0$, 故 γ 后来仍应与负 x 轴相交, 然后回头再交 $x=-x_0$ 于 A_5, 与下半平面同样的论证可知 γ 将穿过正 v 轴, 然后再与 $x=x_0$ 交于一点 A_6.

现在我们来证明: 只要 $a>0$ 取得足够大, 就可使 A_6 位于 A_0 的下方, 这时 γ 上从 A_0 到 A_6 的弧段以及直线段 $\overline{A_0A_6}$ 就构成了我们所需要的环域的外境界线. 首先证明对于任一已给的正数 N, 总可取 A_0 的纵坐标 $a>N$ 足够大, 使得弧 $\widehat{A_0A_1\cdots A_6}$ 能与

$x=x_1$相交，并且它的位于带域 $-x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 中的部分都在直线 $v=N$ 的上方或 $v=-N$ 的下方．事实上，若γ自 A_0 以后不与 $x=x_1$ 相交，则可改取从 $A_1'(x_1, a')$，$a'>a$，出发的轨线γ'以代替γ，当 t 增加时γ'仍将与γ一样绕着原点打圈子．如果γ'当 t 减少时能与 $x=x_0$ 相交最好，否则，γ'的负半轨必在 $x=x_0$ 右方趋向无限远$\left(因为 \frac{dx}{dt}>0, \frac{dv}{dt}<0\right)$，这时可以算作 $A_0'=\infty$，而 A_6' 必在 A_0' 的下方，定理已得证明了．仿此，例如，若 A_3 位于 $v=-N$ 的上方，那末就可以取从 $A_3''(x_0, -N-1)$出发的轨线γ''以代替γ，等等．

以 v_i 记 A_i 的纵坐标，现在来估计 v_6．利用(5·24)可得

$$\begin{aligned}v_1-v_0&=-\int_{x_0}^{x_1}f(x, v)dx-\int_{x_0}^{x}\frac{g(x)}{v}dx\\&<-\int_{x_0}^{x_1}f(x, v)dx\leqslant-4Mx_0-\alpha.\end{aligned}\tag{5·26}$$

其次，沿着 $\widehat{A_1A_2}$，$\lambda(x, v)$随 t 的增加而减少，但 $G(x)$在 A_1 与 A_2 有相同的数值，故知

$$|v_2|-v_1\leqslant 0.\tag{5·27}$$

沿着 $\widehat{A_2A_3}$，$\lambda(x, v)$仍继续减少，故

$$\frac{1}{2}v_3^2+G(x_0)\leqslant\frac{1}{2}v_2^2+G(x_1),$$

从而

$$|v_3|-|v_2|\leqslant\frac{2[G(x_1)-G(x_0)]}{|v_3|+|v_2|}<\frac{G(x_1)-G(x_0)}{N}.\tag{5·28}$$

对于弧 $\widehat{A_3A_4}$ 有

$$\begin{aligned}v_4-v_3&=-\int_{x_0}^{-x_0}f(x, v)dx-\int_{x_0}^{-x_0}\frac{g(x)}{v}dx\\&=\int_{-x_0}^{x}f(x, v)dx+\int_{-x_0}^{0}\frac{g(x)}{v}dx+\int_{0}^{x_0}\frac{g(x)}{v}dx.\end{aligned}$$

利用条件 3)可得

$$|v_4|-|v_3|<\int_0^{x_0}\frac{g(x)}{N}dx+\int_{-x_0}^{x_0}M\,dx=2Mx_0+\frac{G(x_0)}{N}.\quad(5\cdot29)$$

沿着 $\widehat{A_4A_5}$ 有 $\frac{d\lambda}{dt}\leqslant0$, 故

$$v_5-|v_4|\leqslant0.\quad(5\cdot30)$$

最后,对于 $\widehat{A_5A_6}$ 与 $\widehat{A_3A_4}$, 类似的估计可得

$$v_6-v_5<2Mx_0+\frac{G(-x_0)}{N}.\quad(5\cdot31)$$

把(5·26)到(5·31)各式相加,可得

$$v_6-v_0<-\alpha+\frac{G(x_1)+G(-x_0)}{N},$$

因此只要取 $$N\geqslant\frac{1}{\alpha}[G(x_1)+G(-x_0)],$$

就有 $v_6-v_0<0$. 定理证毕.

IV. 在证明定理5·5的过程中我们已经看到,如果在适当的条件下能证明存在一条轨线 γ, 它的负半轨趋向无限远,同时沿着正半轨线极角随 t 的增加而无限增加,那末环域定理中的外境界线就可以非常容易地作出来. 这种思想首先见于伍卓群 [66] 中,借此也可以和定理5·2一样把 $G(\pm\infty)=+\infty$ 的条件取消. 下面就来介绍这个定理.

定理5·6 若

1) $xg(x)>0$ 当 $x\neq0$;

2) $f(0,0)<0$;

3) 记 $F(x)=\inf\limits_{v}f(x,v)$, 设 $\int_0^{\infty}F(x)\operatorname{sgn}x\,dx$ 存在且有下界, 又

$$\varlimsup_{|x|\to\infty}\int_0^x(g(x)+F(x)\operatorname{sgn}x)\,dx=+\infty;$$

4) 存在 $C>0$ 及 $M>0$ 使

$$\int_0^x(Cg(x)-F(x)\operatorname{sgn}x)\,dx<M\quad(x>0),$$

则方程(5·25)存在稳定极限环.

【证】 象定理5·5一样,不难作出环域的内境界线,现在来作外境界线. 先证从第一象限中任一点(x_0, v_0)出发的轨线γ当t增加时若不与x轴相交,则必有$x(t)\to+\infty$. 假如不然,由于$\frac{dx}{dt}=v>0$,故γ应保持在区域$x_0\leqslant x\leqslant x_1<\infty$, $v>0$中. 由于$O(0, 0)$是方程(5·25)的唯一奇点,所以这时$v(t)$必为无界,即

$$\overline{\lim_{t\to T^*}}\, v(t)=+\infty,$$

这里T^*是沿着γ的正半轨t可以延拓的上界,它可能是$+\infty$. 但当$T<t<T^*$($x(T)=x_0$, $v(T)=v_0$)时有

$$v(t)=v(T)-\int_{x(T)}^{x} f(x, v)dx-\int_{x(T)}^{x}\frac{g(x)}{v}\,dx$$
$$\leqslant v(T)-\int_{x(T)}^{x} F(x)dx,$$

上式右边当$t\to T^*$时有界,而左边无界,不可能.

再证γ不能保持在第一象限中使$x(t)\to+\infty$. 因为

$$v\leqslant v_0-\int_{x_0}^{x} F(x)dx-\int_{x_0}^{x}\frac{g(x)}{v}\,dx<v_0-\int_{x_0}^{x} F(x)dx, \qquad (5\cdot32)$$

故必

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\int_{x_0}^{x} F(x)dx<+\infty,$$

否则,上式左边不可能保持恒大于零. 然后由条件3)可知应有

$$\int_{0}^{+\infty} g(x)dx=+\infty,$$

于是由v的有界性知(5·32)式的中间三项之和能取负值,这也是不可能的.

总之,从第一象限中任何点(x_0, v_0)出发的轨线γ后来必与x轴相交而进入第四象限. 注意在第四象限中当γ穿过$v=-\delta$以后,沿着γ有$v\leqslant-\delta<0$(参考定理5·5中相应部分的证明),且$\frac{dx}{dt}<0$,即x保持有界,故由

$$v-v_0\geqslant-\int_{x_0}^{x}F(x)\,dx-\int_{x_0}^{x}\frac{g(x)}{x}\,dx\quad(x<x_0)$$

可知 v 有下界，于是 γ 也必与负 v 轴相交. 由于定理中的条件 3) 与 x 的正负无关，所以 γ 在第三象限中的行为与在第一象限中相类似，在第二象限中的行为与在第四象限中相类似，亦即 γ 后来必绕原点一周重新进入第一象限. 这就证明了在条件 1), 2), 3) 之下，沿着 γ 随着 t 的增加轨线上点的极角将无限增大.

现在要用条件 4) 来证明存在一条趋向无穷远的负半轨线[1]. 考虑当 $t=t_0$ 时经过 $(0, v_0)$ 的轨线 γ，这里 $v_0=-M-\frac{2}{C}$. 设 γ 可向负方向延拓的最大时间为 $T<t\leqslant t_0$，今证在这区间上必有 $v(t)<-\frac{1}{C}$. 首先，这个不等式在 $t=t_0$ 附近是成立的. 如果存在 $t_1>T$ 使

$$v(t)<-\frac{1}{C}\text{ 当 }t_1<t\leqslant t_0,\ \text{而 }v(t_1)=-\frac{1}{C},$$

则在区间 $t_1<t\leqslant t_0$ 上有

$$v(t)<v_0-\int_0^x F(x)dx+C\int_0^x g(x)dx<-\frac{2}{C}\quad(x>0).$$

令 $t\to t_1$，得到

$$v(t_1)\leqslant-\frac{2}{C}<-\frac{1}{C},$$

与假设相矛盾. 既然 γ 的负半轨永远保持在 $v=-\frac{1}{C}$ 下方，而奇点又是唯一的，故此负半轨必为无界. 定理证毕.

推论 在定理 5·6 的条件 1), 2), 3) 之下，若存在 $a>0$ 使得在区间 $(-\infty, -a)$ 或 (a, ∞) 上 $\frac{g(x)}{F(x)}\operatorname{sgn}x$ 有上界 M，又 $F(x)>0$，则方程 (5·25) 有稳定极限环.

【证】 显见这时若取 $C=\frac{1}{2M}$，则

1) 此法最先见于 Н. Н. Красовский 的文章[29].

$$\int_a^{\infty}(Cg(x)-F(x))dx<0$$

或
$$\int_{-a}^{-\infty}(Cg(x)+F(x))dx<0,$$

于是和定理一样可证经过$(a, -4M)$或$(-a, 4M)$的轨线当t减少时无界.

例 2 对 van der Pol 方程 $\ddot{x}+\mu(x^2-1)\dot{x}+x=0(\mu>0)$有

$$\frac{g(x)}{F(x)}\operatorname{sgn} x=\frac{|x|}{\mu(x^2-1)}\to 0 \quad 当\ |x|\to\infty,$$

满足推论的要求,故必存在稳定极限环.

V. 在以上四段中读者看到,在作环域时外境界线都比较难做,而且除了Филиппов方法以外,由于对奇点所加的条件较强,环域的内境界线却非常容易做. 和前面相反,如果我们要用类似于§3定理3·7的办法来证明存在极限环,那末困难的事情就不在外境界而在内境界了. 当然,如果所讨论的方程的唯一奇点是个初等奇点,那末要判别它的稳定性,以及如果方程含参数,要知道参数取什么值时这个初等奇点会改变它的稳定性,都是很容易的事. 问题出在当奇点是所谓“细焦点”时,要判别其稳定性就必须计算“焦点量”,而这一工作有时是非常费事的,虽然在微分方程定性理论中早已有熟知的Poincaré方法了. 下面仅举一个例子来说明之,大量的使用这种方法将是本书后半部的事.

例 3 证明方程组

$$\frac{dx}{dt}=y-\delta x-\frac{1}{2}x^3,\quad \frac{dy}{dt}=-x+3x^2y-\frac{1}{2}y^3$$

当$0<\delta\ll 1$时有稳定极限环.

【证】 此方程在$\delta=0$时以$O(0, 0)$为不稳定焦点[1],而当

1) 例如,见[67]第二篇第二章§1.

$0<\delta\ll 1$ 时$(0, 0)$改变稳定性，成为稳定焦点，故由§3 定理 3·7 知道在$(0, 0)$外围将出现稳定极限环.

VI. 除了以上五种构造环域的方法以外，还有一种方法就是以分析无限远奇点的性质来代替构造环域的外境界线. 如果能够证明：在 Poincaré 半球面[1] 上一切异于赤道且经过无限远奇点的轨线都是从赤道上的奇点向有限远处跑，同时在有限远处又只有唯一的负向渐近稳定奇点 O，那末全平面除去 O 就是我们所需要的环域. 但此法一般只适用于右方为多项式的动力系统，因为这时可以借引进齐次坐标来研究赤道上奇点的性质. 当然，有时也可以不用 Poincaré 球面，而只给平面添上一个唯一的无限远点，使之成为 Gauss 球面，如果这样做了以后有可能分析那无限远奇点的性质的话. 早在五十年代 S. Lefschetz[69] 和董金柱[70] 就已分别用上面两种方法分析了 van der Pol 方程的无限远奇点的性质，从而得出极限环外部任何一点出发的轨线都以极限环为 ω 极限集的结论. 近年来较好的结果是证明所谓 Bruslator 的微分方程：

$$\frac{dx}{dt}=A-(1+B)x+x^2y,\quad \frac{dy}{dt}=Bx-x^2y,\quad A>0,\ B>0, \tag{5·33}$$

当 $B>1+A^2$ 时有唯一的稳定极限环，当 $B\leqslant 1+A^2$ 时有渐近稳定奇点$\left(A, \dfrac{B}{A}\right)$，而且这里是全局稳定性.

这一工作在国内由秦元勋、曾宪武[71]与张棣、陈治融、湛垦华[72]几乎同时独立完成. 现在简单介绍[71]的证法.

首先分析有限远奇点. 令 $u=x+y$，则(5·33)变为

$$\frac{du}{dt}=A-x,\ \frac{dx}{dt}=A-(1+B)x+x^2(u-x). \tag{5·34}$$

---

1) 参考[68]第九章§5.

由此可见方程只有唯一的有限远奇点：

$$\left(x=A,\ u=A+\frac{B}{A}\right)\quad 或\quad \left(x=A,\ y=\frac{B}{A}\right).$$

把原点移到此奇点去，令

$$x=A+\xi,\ u=A+\frac{B}{A}+\eta,$$

得到

$$\frac{d\eta}{dt}=-\xi,\ \frac{d\xi}{dt}=(B-1-A^2)\xi+A^2\eta$$
$$+\frac{B-2A^2}{A}\xi^2+2A\xi\eta-\xi^3+\xi^2\eta. \quad (5\cdot35)$$

显见当 $B>1+A^2$ 时原点为不稳定焦点或结点，当 $B<1+A^2$ 时原点为稳定焦点或结点．为了判别在哪一情况存在极限环，根据§3定理3·7，我们必须确定在 $B=1+A^2$ 时原点的稳定性．但是如果能够把无限远奇点的性质分析清楚，并证明赤道能起环域定理中的外境界线的作用，那末也能判别何时可以存在极限环．

为此目的，以 $\frac{x}{z}$ 与 $\frac{y}{z}$ 分别代替(5·33)中的 x, y(即引进齐次坐标)，得到：

$$z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}=Az^2-(1+B)xz+\frac{x^2y}{z},$$
$$z\frac{dy}{dt}-y\frac{dz}{dt}=Bxz-\frac{x^2y}{z}.$$

为了研究不在 y 轴上的奇点，可在上式中令 $x=1$，$\frac{dt}{d\tau}=z^2$，于是得到：

$$\frac{dz}{d\tau}=-yz+(1+B)z^3-Az^4,$$
$$\frac{dy}{d\tau}=Bz^2-y-Ayz^3+(1+B)yz^2-y^2. \quad (5\cdot36)$$

由此可得两奇点(1, 0, 0)与(1, −1, 0)．

对于(1, 0, 0)，我们用熟知的 Ляпунов 方法来判别其性质．令

(5·36)第二式右边等于零，可解出 $y=Bz^2+\cdots$，代入第一式右边，得到

$$\frac{dz}{d\tau}=z^3+\text{高次项},$$

故知(1, 0, 0)为鞍点[1]. 由于 $z=0$ 是轨线，故由(5·36)的第二式看出进入(1, 0, 0)的两条分界线是赤道，而另两分界线则从(1, 0, 0)离开，其中之一进入上半 Poincaré 球面，即相当于(x, y)有限平面.

对(1, −1, 0)，只须令 $y=-1+u$，便可由(5·36)得到

$$\frac{dz}{d\tau}=z+\text{高次项},\ \frac{du}{d\tau}=u+\text{高次项}.$$

所以(1, −1, 0)是不稳定结点，轨线(除赤道外)都是从它出发跑向有限平面.

同样可证与上述两奇点直径相对的奇点(−1, 0, 0)与(−1, 1, 0)的稳定性性质也与它们完全一样.

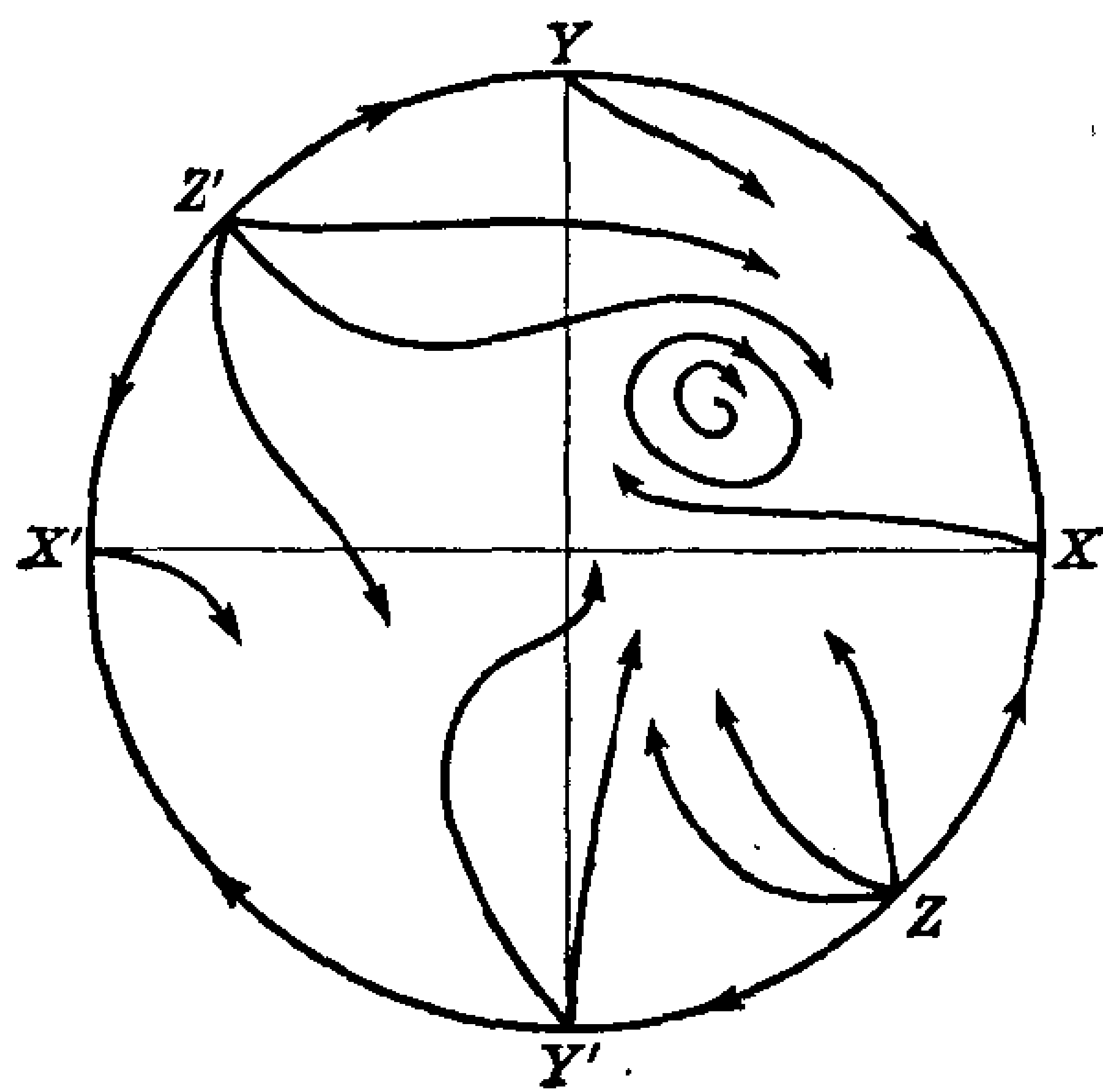


图 5·11

仿此，对于 y 轴上的无限远奇点(0, ±1, 0)，可证它是指标为零的半鞍结点，这样，就可画出 Poincaré 上半球面中的相图(图 5·11). 于是即知：当 $B>1+A^2$ 时方程(5·33)存在稳定极限环. 至于它的唯一性则留待下一节再去证明.

为了要证明当 $B\leqslant 1+A^2$ 时无环，注意，如果把(5·35)中的 B 看成参变量，那末立刻可算出

1) 参考[67]上册，146 页.

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ \frac{\partial P}{\partial B} & \frac{\partial Q}{\partial B} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (B-1-A^2)\xi+A^2\eta+\frac{B-2A^2}{A}\xi^2+2A\xi\eta-\xi^3+\xi^2\eta & -\xi \\ \xi+\frac{1}{A}\xi^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\xi^2\left(1+\frac{\xi}{A}\right)>0$$

当 $\xi>-A$. 故(5·35)在半平面 $\xi>-A$ 中关于 B 构成旋转向量场. 另一方面, 在直线 $\xi=-A$ 上有

$$\frac{d\xi}{dt}=-A(B-1-A^2)+A^2\eta+AB-2A^3$$
$$-2A^2\eta+A^3+A^2\eta=A>0,$$

所以闭轨线如果存在的话也只能全部位于直线 $\xi=-A$ 的右侧.

但是已知当 $B>1+A^2$ 时半平面 $\xi>-A$ 中存在极限环, 当 B 变动时这些极限环随着 B 的增大而不断扩大, 它们所遮盖的区域的边界上应该有奇点, 由图 5·11 看出这个奇点只可能是无限远奇点(1, 0, 0)或(0, 1, 0). 最后, 由§3的不相交定理 3·2 即知(5·35)当 $B\leqslant 1+A^2$ 时不存在闭轨线.

以上介绍了证明极限环存在的六种主要方法, 除此以外还有其他较少见的方法. 例如 G. Seifert[47]利用旋转向量场的理论由方程

$$\frac{dx}{dt}=v, \quad \frac{dv}{dt}=-g(x)-f_1(x,v,a)v$$

(其中 $f_1(x,v,a)=-a(x^2+v^2)+f(x,v)v$)当 $a<0$ 时存在极限环推出方程(5·25)也存在极限环, 代替大位移下衰减的条件(即定理5·5条件3)的前半部), 他只要求: 存在常数 $\mu>0$ 以及连续函数 $h(v)$, 使对一切 x, v 有

$$f(x,v)>\mu\int_0^x g(x)dx-h(v),$$

这表示对于每一固定的 v, 当 $|x|$ 足够大时有 $f(x,v)>0$, 但不一定能找到 $|x|$ 的下界 x_0 使适用于一切 v. 例如, 若

$$f(x,v)=\frac{x^4}{|v|+1}-1,\ \ g(x)=\frac{x}{2},$$

则定理5·5中的条件3)便不成立，而Seifert的条件成立。

此外，当方程(5·10)中的$g(x)$有多于一个的零点时，代替定理5·2那种避开原点(奇点)以外的其他奇点的办法，G. Sansone与R. Conti [73]直接研究了有两个奇点的方程中经过鞍点的两条分界线包向原点时的相对位置，并给出条件以保证原点外围存在极限环。后来余澍祥[74]、周毓荣[75]又改进了他们的条件。但总的说来，分析经过鞍点的两条分界线以确定它们的相对位置，即使对于多项式微分方程也是相当困难的，除了在极其特殊的情况以外。

关于证明方程(5.10)或多项式系统存在极限环的文章很多，仅国内近数年来就有三四十篇之多，下面按本节所述六种主要方法归类分别给以简单的介绍，详情请读者查阅原作。

1．关于用折线来作出环域外境界线的有廖晓昕、梁肇军[76]，张棣、陈治融[77]，李继彬[78]等工作，[76]特别研究了二拍振荡器方程

$$\ddot{x}+\rho(e^x-2)\dot{x}+x=0, \tag{5·37}$$

证明相应的方程组当$0<\rho\leqslant 1$时存在稳定极限环、后来，[79]又证明了环的唯一性．[77]所研究的是与(5·33)类似的、出现于三分子化学反应理论中的方程组：

$$\dot{x}=A-Bx-xy^2,\ \ \dot{y}=Bx+xy^2-y. \tag{5·38}$$

[78]则研究了形如(5·14)的方程，并用于解决机械切削理论中的二阶非线性方程

$$\ddot{x}+(a|\dot{x}|^\lambda+b|\dot{x}|^\mu\dot{x}+c)\dot{x}+x=0 \tag{5·39}$$

的周期解问题。

2．关于用Филиппов方法来构造环域外境界线的，除了较早的余澍祥[74]以外，近年来东北师范大学黄启昌，史希福，陈秀东等同志做了不少工作[80, 81, 82, 83, 84]，其中[83]把本节引理5·2的方法上升为特征轨线，特征点和特征区间等概念，不但推广了Филиппов的结果，而且得到构造具有n个极限环的Liénard方程的新方法．

3．直接用方程的轨线段和它的截线来构作环域的外境界线的有Dean A. Neumann与L. D. Sabbagh[85]，叶彦谦[86]，吴葵光[87]，林立聪[88]，杨宗培[89]等工作．[85]推广了Драгилёв的定理5·1，[87]指出R. M. Cooper[90]证明方程

$$\frac{dx}{dt}=P(y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y)$$

在一定的条件下存在极限环的结果是错误的,并给以修正. [89] 推广了 Д. Жительзейф[91]关于 Liénard 方程(其中 $g(x)\equiv x$)存在极限环的定理,并给出了方程至少存在两个环的充分条件.

4. 用轨线一端跑向无限远的办法来构作环域外境界线的有余澍祥[92],陈广卿[93],周毓荣[94],王现[95]等工作. [92]对 Liénard 方程所给出的较为广泛的条件推广了定理 5·1, 5·3, 5·4 的结果. [93]又给[92]的结果作进一步的推广. [95]所给出的充分条件与定理 5·4 有出入,加强了条件 4)而减弱了条件 3),使之更便于检验. 作为特例,他得到硬弹簧系统

$$\frac{dx}{dt}=y-F(x),\qquad \frac{dy}{dt}=-x(k+Cx^2)$$

(其中 $k>0, C>0, F(x)$ 为分段多项式, $F(0)=0$)存在极限环的充分条件. [94]研究了方程(5·14)的极限环的存在唯一性和唯二性.

5. 用改变奇点的稳定性以及分析无限远奇点的办法来证明极限环的存在性的有陈兰荪, 井竹君的[96, 97, 98]和王现[99]等工作. [96]研究免疫反应中的方程

$$\frac{dx}{dt}=x(-a-bx+cy-dxy),\quad \frac{dy}{dt}=y(1-x+y),$$

其中 a,b,c,d 为正常数. [98]研究生存竞争方程

$$\frac{dx}{dt}=x(a_1+a_2x+a_3x^2)-xy,\quad \frac{dy}{dt}=-y+xy.$$

[97]研究催化反应系统:

$$\frac{dx}{dt}=-x-a_1x^2+a_2xy+a_4x^2y,\qquad \frac{dy}{dt}=a_0+a_1x^2-a_2xy-a_4x^2y.$$

[99]研究软弹簧系统

$$\frac{dx}{dt}=y-F(x),\qquad \frac{dy}{dt}=-x(k-Cx^2),$$

其中 $k>0, C>0, F(x)$ 为二次,三次或四次多项式, $F(0)=0$.

注意: 关于方程组存在代数曲线(特别是闭曲线)解的工作, 关于二次,三次多项式存在极限环的条件, 以及关于方程组存在多个极限环的工作这里都没有提,我们将在以后各节再介绍.

习　题

1. 详细解释定理 5·1 中诸条件的物理意义.

2. 试由定理 5·1 的条件成立推出定理 5·3 的条件亦成立.

3. 试由 $xg(x)>0(x\neq 0)$ 及 $f(x)$, $g(x)$ 连续, 直接证明方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{g(x)}{F(x)-y}$$

的解存在且唯一(除 $(0,0)$ 点以外).

4. 证明若在定理 5·5 中 $f(x, v)\equiv f(x)$, 则定理 5·5 可由定理 5·3 推出[100].

5. 设在方程(5·4)中 $f(x,v)$ 与 $g(x)$ 满足 Lipschitz 条件, $f(0,0)<0$, $xg(x)>0$ 当 $x\neq 0$; 当 $|x|>x_0$ 时有 $|g(x)|+f(x, v)|v|>\varepsilon>0$; 又存在 $R>0$, 使当 $|x|+|v|\geqslant R$ 时有 $f(x,v)+f(x, -v)\geqslant 0$, 则方程存在稳定极限环. (A. de Castro.)

6. 若在方程(5·10)中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为奇函数, $xg(x)>0$ 当 $x\neq 0$, 又存在 $\delta>0$ 使当 $0<x<\delta$ 时有 $g(x)\geqslant\left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right)|f(x)F(x)|$, $\varepsilon>0$, 则方程(5·10)以原点为中心点[101].

7. 对方程(5·25), 记

$$f_0(x)=\max_{|v|\leqslant\delta} f(x,v),\ f_1(x)=\min_{v} f(x,v),$$

设方程 $\ddot{x}+f_0(x)\dot{x}+g(x)=0$ 满足定理 5·3 的条件 1), $\ddot{x}+f_1(x)\dot{x}+g(x)=0$ 满足定理 5·3 的条件 2), $g(x)$ 满足定理 5·1 的条件 1), 则方程(5·25)存在稳定极限环(Филиппов).

8. 设在方程(5.10)中 $xg(x)>0$ 当 $x\neq 0$, $g(0)=0$, $G(-\infty)=+\infty$; $xF(x)>0$ 当 $x\neq 0$, 且 $|x|$ 充分小; 又存在 $C>0$ 及常数 $M>0$, 使

$$F(x)+C\int_0^x g(x)dx<M\quad(x>0),$$

存在 $x_0>0$ 及 $K>0$, 使当 $x<-x_0$ 且 $M+\frac{1}{C}-F(-x_0)<\frac{1}{K}$ 时有

$$-f(x)/g(x)\leqslant K;$$

又 $F(+\infty)=-\infty$. 则方程(5·10)存在不稳定极限环[92].

9. 已给方程 $\ddot{x}+F(\dot{x})+G(x)=0$, F, G 连续且能保证解的唯一性, 又 $yF(y)\leqslant 0$ 对 $|y|\leqslant\eta_1(>0)$, $F(y)\operatorname{sgn} y\geqslant C>0$ 对 $|y|\geqslant\eta_2>\eta_1$; $\max|F(y)|=M>0$ 对 $|y|\leqslant y_2$; $G(x)\operatorname{sgn} x\geqslant M+\varepsilon$ 对 $|x|\geqslant\delta(\varepsilon>0,\delta>0)$. 则方程存在稳定极限环[102].

10. 若在方程 $\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=0$ 中 f, g 为一次连续可微, $yf(x,y)\geqslant 0$, $xg(x)>0$ 当 $x\neq 0$, 又 $\int_0^{+\infty} g(x)dx=+\infty$, 则方程的可延拓到 $t\to+\infty$ 的

解必为有界，它或是振动或是趋于零. (W. R. Utz.)

11. 证明：若在方程 $\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0$, $F(x)=\int_0^x f(z)dz$, 若 $g(x)F(x)<0$ 对 $x\neq 0$, 则不存在闭轨线.

12. 用分析无限远奇点的方法证明在方程

$$\frac{dx}{dt}=-x+a_1xy+a_2x^2y,\quad \frac{dy}{dt}=1-a_1xy-a_2x^2y$$

中如果 $a_2\geqslant(a_1+a_2)^2$, 则必存在稳定极限环，它位于第一象限[97].

13. 证明若 $a_1>0$, $a_3<0$, $a_1+a_2+a_3>0$, $a_2+2a_3>0$, 则方程

$$\frac{dx}{dt}=x(a_1+a_2x+a_3x^2)-xy,\ \frac{dy}{dt}=-y+xy$$

必有稳定极限环，它位于第一象限[98].

14. 若在方程(5·10)中 $F(x)$, $g(x)$ 满足条件：

1) 存在 $\delta_2<0<\delta_1$, 使当 $\delta_2<x<\delta_1$ 时 $f(x)<0$, 而当 $x>\delta_1$ 和 $x<\delta_2$ 时 $f(x)>0$, 且 $F(+\infty)=+\infty$;

2) 存在 $\lambda_1<\delta_2$, 使当 $x<\lambda_1$ 时 $g(x)>0$, 当 $\lambda_1<x<0$ 及 $x>0$ 时有 $xg(x)>0$, $g(\lambda_1)=g(0)=0$, 且 $g'(\lambda_1)<0$;

3) 存在 $C>0$ 及 $M>0$ 使

$$\int_0^x(Cg(x)-f(x))dx<M\quad(x>0);$$

4) $F(\lambda_1)\leqslant-\left(M+\dfrac{1}{C}+\varepsilon\right)$, $\varepsilon>0$,

则方程(5·10)存在稳定极限环[75].

15. 设在方程 $\ddot{x}+\varphi(\dot{x})+\psi(\dot{x})\eta(x)=0$ 中 $\psi(y)>0$, $\int_0^{\pm\infty}\dfrac{dy}{\psi(y)}=\pm\infty$, $x\eta(x)>0$ 当 $x\neq 0$, 且 φ, ψ, η 都连续，并能保证初值问题的解的存在性和唯一性. 试证：

a) 若 $y\varphi(y)\leqslant 0$, 但当 $0<y\ll 1$ 时 $\varphi(y)\not\equiv 0$, 则对应的方程组不存在闭轨线

b) 若 $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)<0$, $\eta(\pm\infty)=\pm\infty$, 又存在常数 $M>0$, $k'<k$ 使

$$\varphi(y)\geqslant\psi(y)[\eta(k-x)-\eta(-x)],\quad 当\quad y>M,\ |x|<+\infty;$$

$$\varphi(y)\leqslant\psi(y)[\eta(k'-x)-\eta(-x)],\quad 当\quad y<-M,\ |x|<+\infty,$$

则方程组至少存在一个极限环[103].

16. 用上题证明 $\ddot{x}+\alpha\dot{x}(1-\gamma\dot{x}^2)+(1+\beta|\dot{x}|)x=0$ $(\alpha<0, \gamma, \beta>0)$ 存在周期解.

§6. 极限环的唯一性

研究极限环的唯一性的工作不如研究存在性的那样多。究其原因，大概有两个：第一，唯一性问题比存在性问题困难些，不容易得到好的结果；第二，唯一性问题在微分方程定性理论中的重要性以往未被人们所注意。近二十多年来由于国内和苏联数学家对右方为二次多项式的方程开展了大量的研究工作，促使人们对唯一性问题逐渐重视起来，而且也出现了不少优秀的成果。下面将按所用方法的不同，分成几段来介绍这方面较重要的工作。

I. 点变换法

对于在非线性振动理论中经常会遇到的分区线性方程[1)]，人们常用点变换法来证明极限环的存在性，这时极限环就对应于点变换中的不动点，读者在§1中已见到过。如果在肯定不动点存在时还能证明它是唯一的，那末也就证明了极限环的唯一性。下面举一个比§1例3更为复杂的例子来说明这一方法[2)]。

例1 考虑栅极电路中带有振荡回路的电子管发生器(图6·1)，略去阳极反作用，栅流和电子管中的电容，根据Kirchhoff定律可以写出振荡方程为

$$LC\frac{d^2u}{dt'^2}+[RC-Mf(u)]\frac{du}{dt'}+u=0, \tag{6·1}$$

其中$f(u)$表示特性曲线$i_a=i_a(u)$的斜率。今近似地取$i_a(u)$为分段线性函数(图6·2)[3)]

1) 读者在例1中可以看出，这实际上是为了避免出现不能求通解的非线性方程而采用的一种近似方法，但它有时也能得出基本上正确的结论。

2) 取自 A. A. Андронов, A. A. Витт 与 C. Э. Хайкин[104]第八章。

3) 注意，如果改取$i_a(u)=r_0+r_1u+r_2u^2+r_3u^3$，再把图6·2中的坐标原点移到特性曲线的变曲点去，则上式右边只剩下一次和三次项，而(6·1)这时便成为 van der Pol 方程。

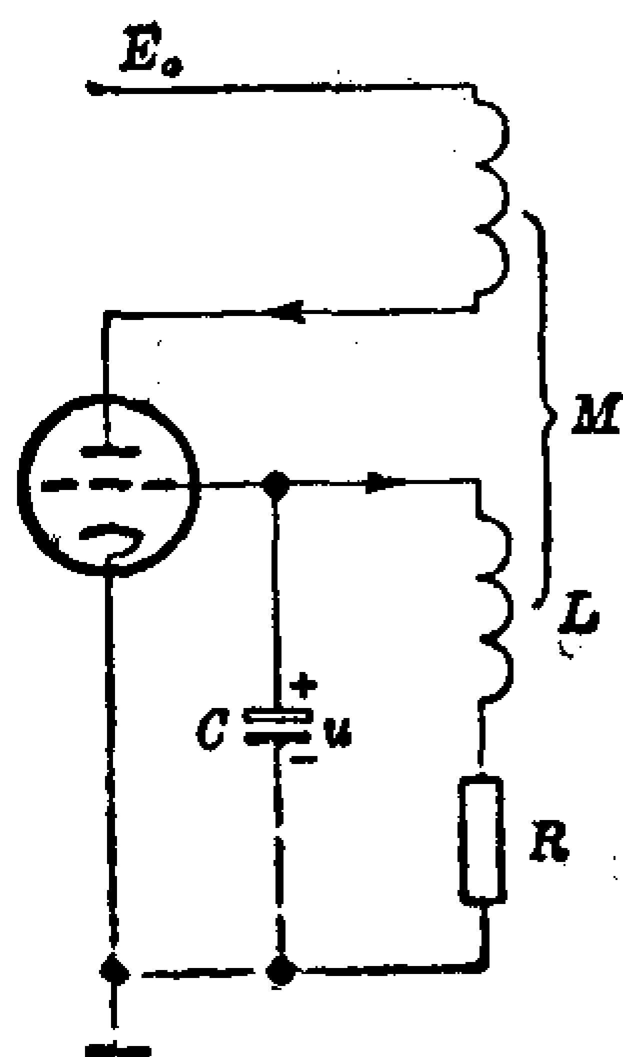


图 6·1

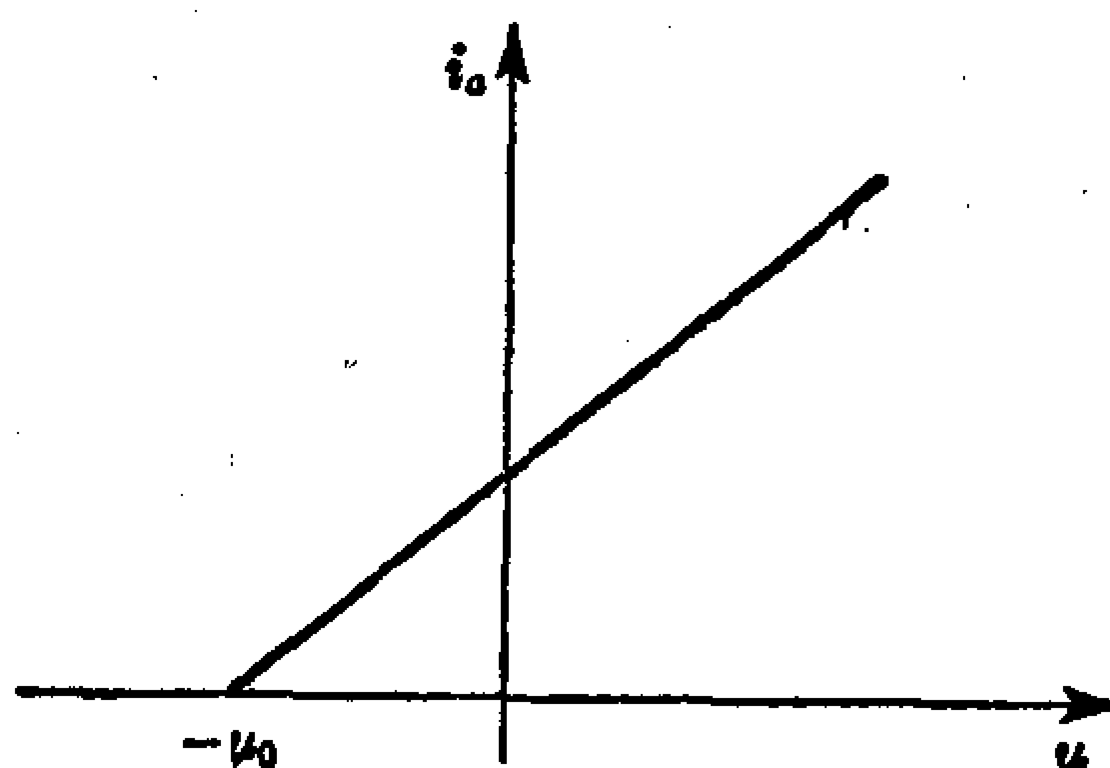


图 6·2

$$i_a=\begin{cases}0, & \text{当}\quad u\leqslant -u_0\\ S(u+u_0), & \text{当}\quad u>-u_0,\end{cases}\tag{6·2}$$

并且引进无量纲变数

$$x=\frac{u}{u_0},\quad t=\omega_0 t',\quad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}},\tag{6·3}$$

则方程(6·1)可改写为

$$\begin{aligned}&\ddot{x}+2h_1\dot{x}+x=0,\ \text{当}\quad x<-1;\\ &\ddot{x}-2h_2\dot{x}+x=0,\ \text{当}\quad x>-1,\end{aligned}\tag{6·4}$$

其中 $h_1=\frac{1}{2}RC\omega_0,\quad h_2=\frac{\omega_0}{2}[MS-RC].$

化为方程组，得到

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=\begin{cases}-x-2h_1y, & \text{当}\quad x<-1\\ -x+2h_2y, & \text{当}\quad x>-1.\end{cases}\tag{6·5}$$

直线 $x=-1$ 分 (x, y) 平面为两个区域 (I)：$x<-1$ 与 (II)：$x>-1$. 方程(6·5)的唯一奇点 $(0, 0)$ 位于区域 (II) 中，由 $h_1>0$ 知 $(0, 0)$ 对 (I) 中的轨线来说是稳定焦点或结点.

若 $h_2\geqslant 1$，则 $(0, 0)$ 对 (II) 中的轨线来说是不稳定结点，有两条积分直线(斜率一正一负)离开原点，各在第一或第四象限中跑向无限远，故不可能存在极限环. 同理可知 $h_2<0$ 时也不可能存在极限环. 若 $h_2=0$，则在 $(0, 0)$ 附近有一系闭轨线，这在物理学

上是不可能实现的. 因此今后不妨设 $0<h_2<1$, 这时 $(0, 0)$ 对 (II) 中的轨线来说是不稳定焦点. 今再假设 $0<h_1<1$, 则 (I) 中的轨线是螺线. 我们来研究从直线 $x=-1$ 下半部上的一点 $(-1, -s)$ 出发的轨线(图 6·3). 当 t 增加时它应与 $x=-1$ 的上半部交于一点 $(-1, s')$. 易见此轨线的参数方程是

$$x=-e^{-h_1t}\left[\cos\omega_1 t+\frac{s+h_1}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right],$$
$$y=e^{-h_1t}\left[-s\cos\omega_1 t+\frac{1+h_1 s}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right], \tag{6·6}$$

其中 $\omega_1=\sqrt{1-h_1^2}$. 假设运动在 $(-1, -s)$ 的时刻为 $t=0$, 而在 $(-1, s')$ 的时刻为 $t_1=\tau_1/\omega_1$, 则有

$$-1=-e^{-\frac{h_1\tau_1}{\omega_1}}\left[\cos\tau_1+\frac{s+h_1}{\omega_1}\sin\tau_1\right],$$
$$s'=e^{-\frac{h_1\tau_1}{\omega_1}}\left[-s\cos\tau_1+\frac{1+sh_1}{\omega_1}\sin\tau_1\right]. \tag{6·7}$$

由此可解出 s 与 s':

$$s=\frac{e^{\gamma_1\tau_1}-\cos\tau_1-\gamma_1\sin\tau_1}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\sin\tau_1},\quad s'=\frac{e^{-\gamma_1\tau_1}-\cos\tau_1+\gamma_1\sin\tau_1}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\sin\tau_1}, \tag{6·8}$$

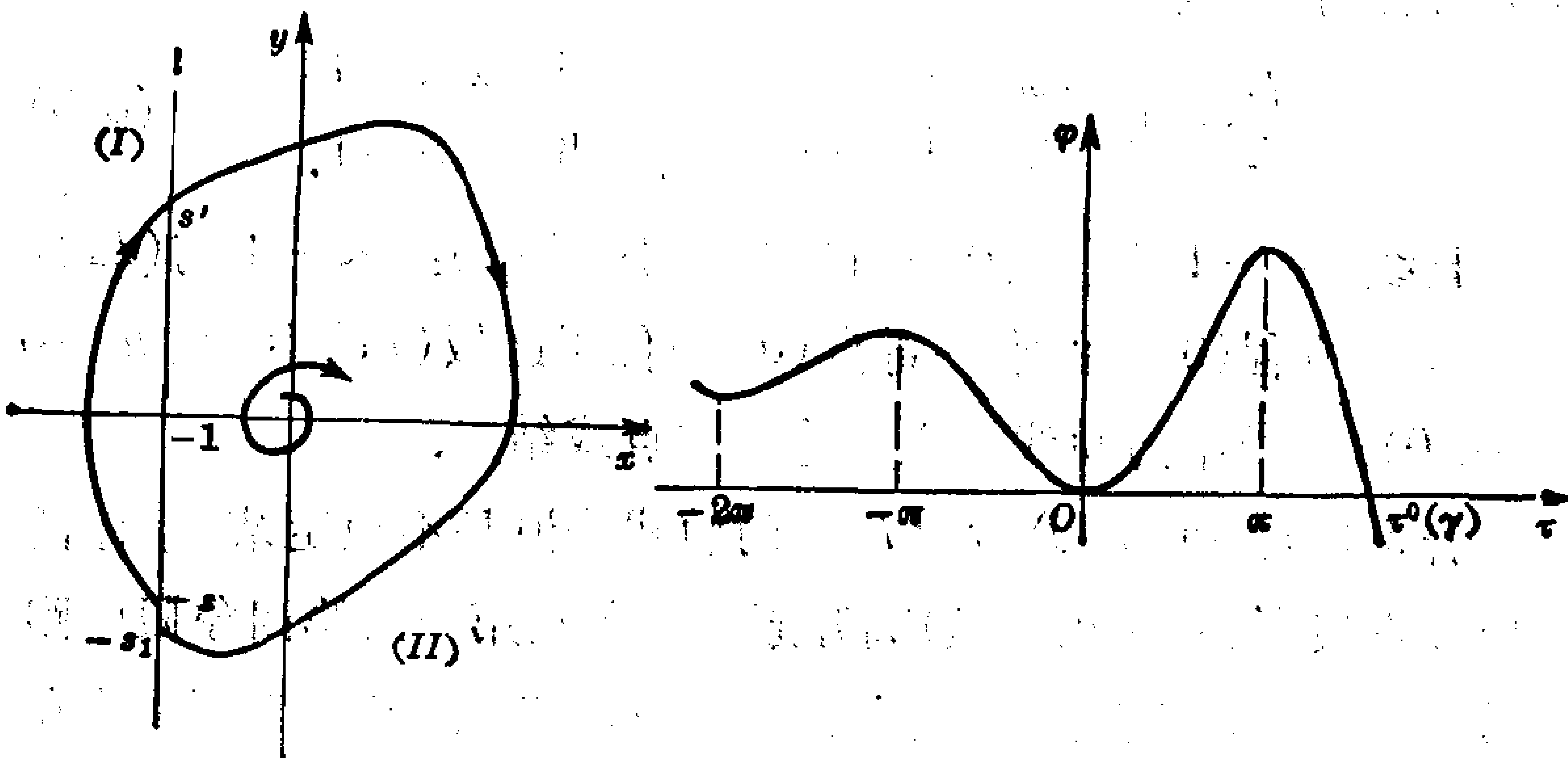


图 6·3

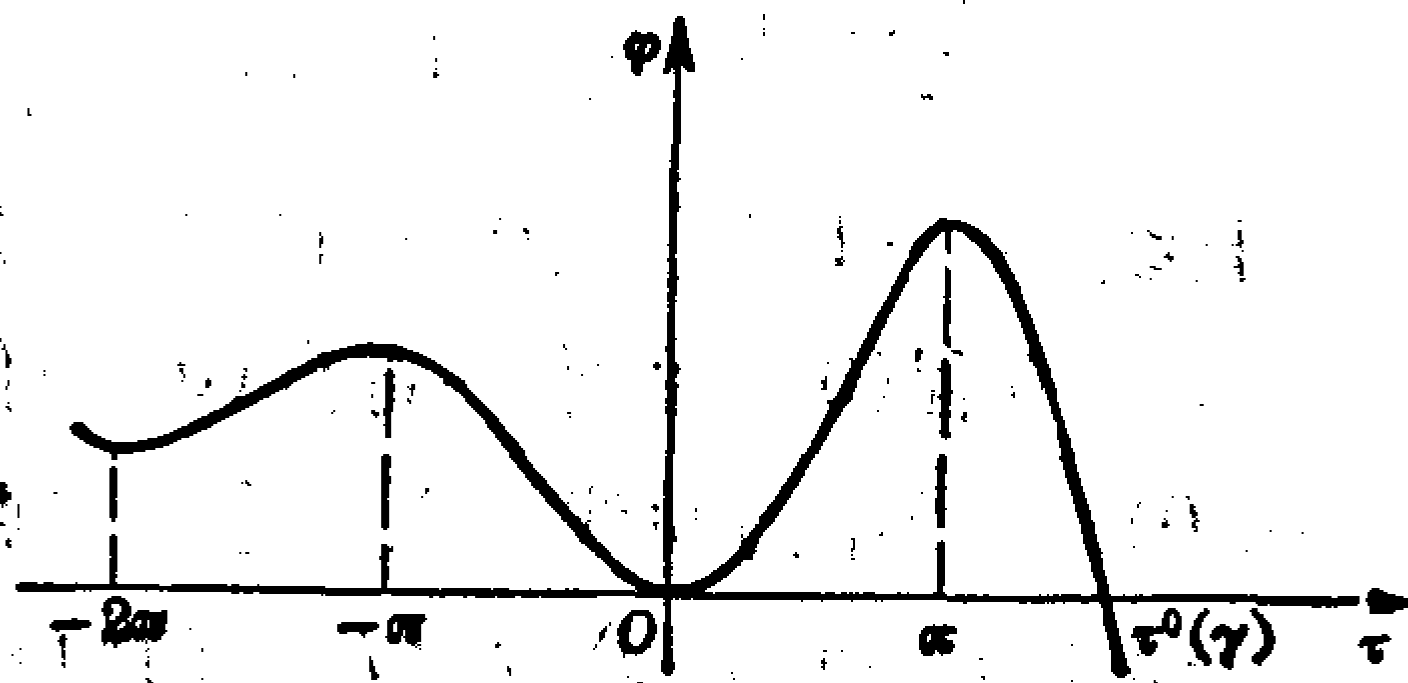


图 6·4

其中 $\gamma_1=\frac{h_1}{\omega_1}=h_1/\sqrt{1-h_1^2}$. 现在要在$(s, s')$平面上研究曲线(6·8)的性质,这里把 τ_1 看成参数. 为此,引进辅助函数

$$\varphi(\tau, \gamma)=1-e^{\gamma\tau}(\cos\tau-\gamma\sin\tau), \tag{6·9}$$

易证它具有下列性质:

1. $\varphi(-\tau, -\gamma)=\varphi(\tau, \gamma)$, $\varphi(0, \gamma)=0$;

2. $\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}=(1+\gamma^2)e^{\gamma\tau}\sin\tau$;

3. 当 $\gamma>0$ 时 $\varphi(\tau, \gamma)$ 对 τ 有零点 $\tau^0(\gamma)$ 介于 π 与 2π 之间,当 $\tau<\tau^0(\gamma)$ 时有 $\varphi(\tau, \gamma)>0$ (图 6·4).

利用 $\varphi(\tau, \gamma)$ 可将(6·8)写为

$$s=\frac{e^{\gamma_1\tau_1}\varphi(\tau_1, -\gamma_1)}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\sin\tau_1},\quad s'=\frac{e^{-\gamma_1\tau_1}\varphi(\tau_1, \gamma_1)}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\sin\tau_1}. \tag{6·10}$$

由此又可求出

$$\frac{ds}{d\tau_1}=\frac{\varphi(\tau_1,\gamma_1)}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\sin^2\tau_1},\quad \frac{ds'}{d\tau_1}=\frac{\varphi(\tau_1, -\gamma_1)}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\sin^2\tau_1}. \tag{6·11}$$

根据(6·10), (6·11)以及 $\varphi(\tau, \gamma)$ 的性质可以看出,当 τ_1 从 0 变到 π 时, s 与 s' 都从 0 单调增加而趋于 $+\infty$, 不难在(s', s)平面上作出曲线(6·10)的图形(图 6·5). 它在原点有斜率1, 当 τ_1 从 0 增加到 π 时曲线 $s=f(s')$ 的斜率单调增加,最后以直线

$$s=e^{\gamma_1\pi}s'+a \tag{6·12}$$

为渐近线,其中

$$a=\lim_{\tau\to\pi-0}[s-e^{\gamma_1\pi}s']=-\frac{2\gamma_1(1+e^{\gamma_1\pi})}{\sqrt{1+\gamma_1^2}}<0.$$

曲线 $s=f(s')$ 就确定了点$(-1, -s)$与$(-1, s')$之间的对应关系.

和上面一样, 可以讨论由区域(II)中的轨线所确定的, 从点$(-1, s')$到点$(-1, -s_1)$的对应关系. 为方便计, 假设运动在时刻 $t=-\frac{\tau_2}{\omega_2}<0$ 位于$(-1, s')$, 而在 $t=0$ 到达$(-1, -s_1)$. 要得到 s_1 与 s' 的类似于(6·10)的表达式,只须注意方程(6·5)在(II)

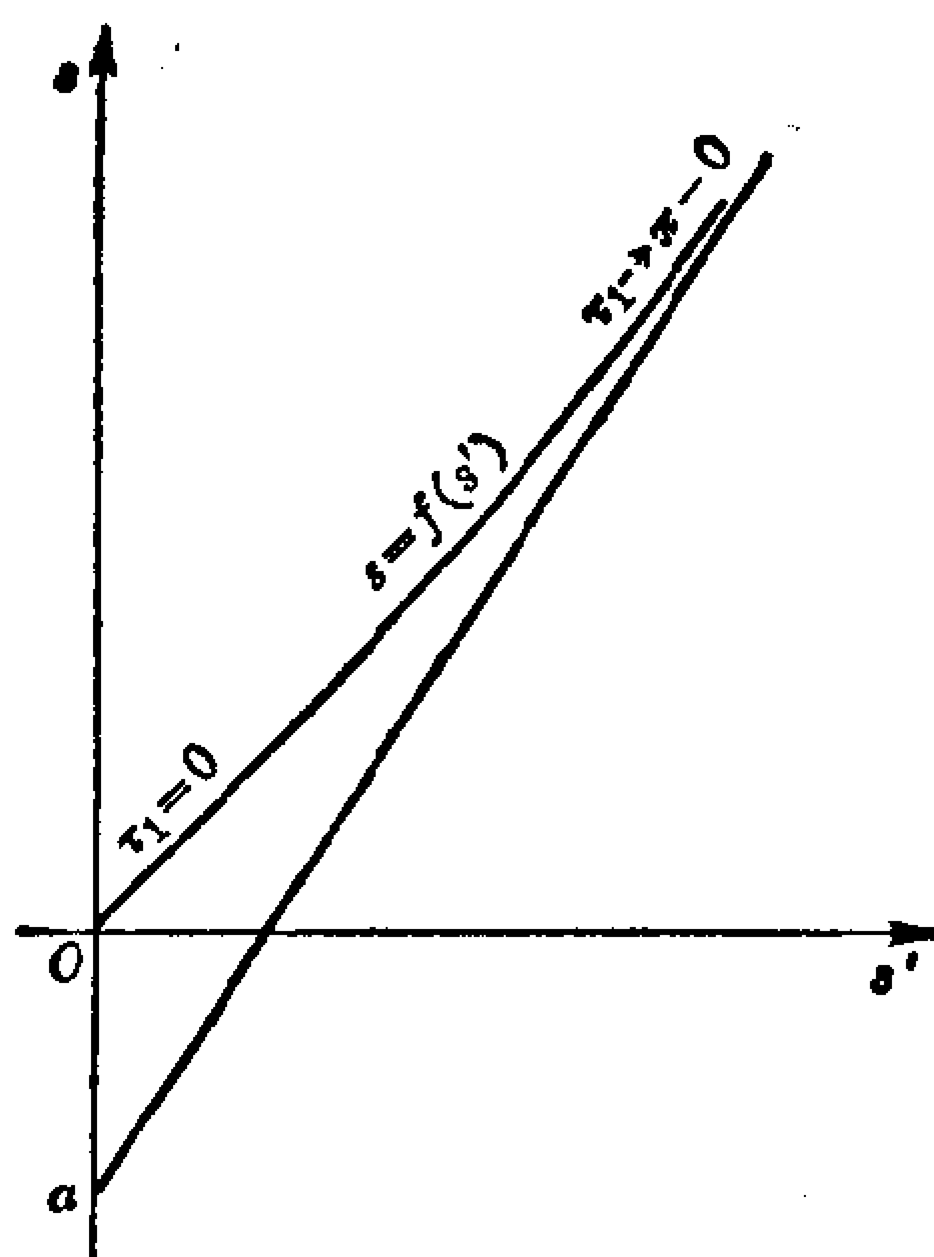


图 6·5

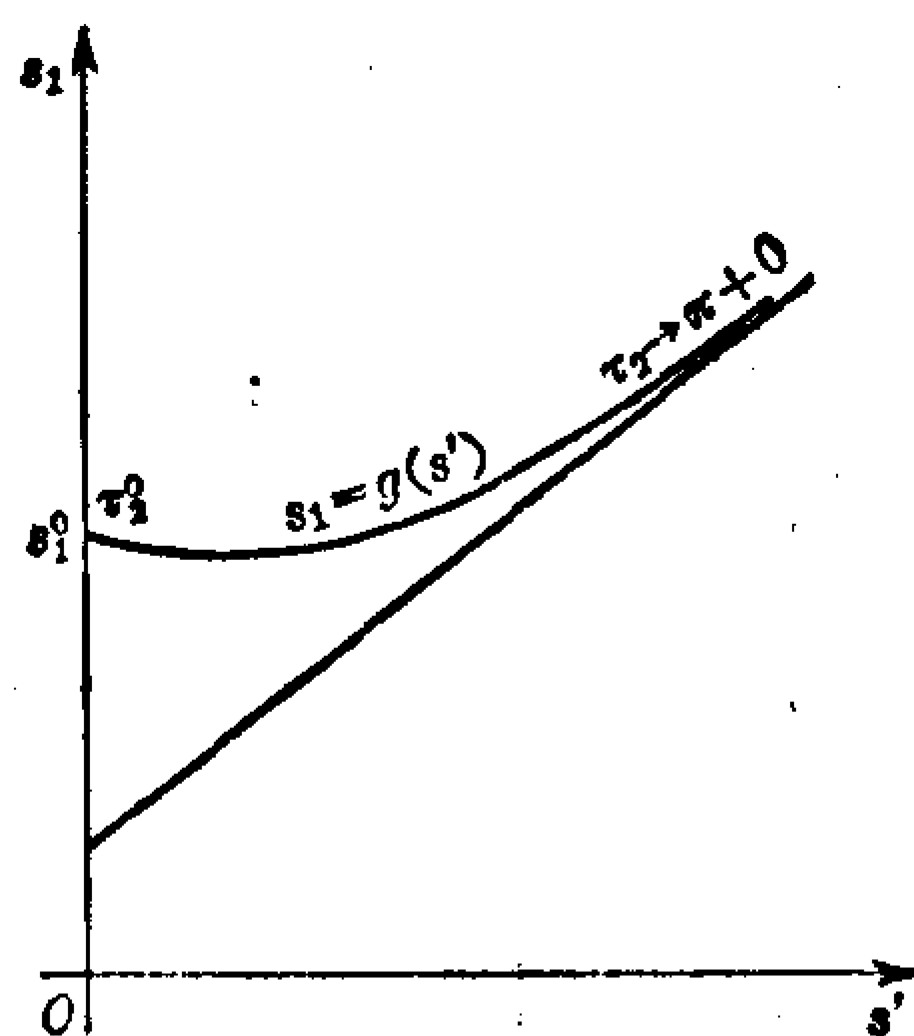


图 6·6

中的轨线方程可由(6·6)中的式子改 h_1 为 $-h_2$, ω_1 为 $\omega_2=\sqrt{1-h_2^2}$ 而得到. 这样, 只要再在(6·8)中改 s 为 s_1, τ_1 为 $-\tau_2$, 就可得到 s_1 与 s' 的参数表示式

$$s_1=\frac{-e^{\gamma_2\tau_2}+\cos\tau_2+\gamma_2\sin\tau_2}{\sqrt{1+\gamma_2^2}\sin\tau_2},$$

$$s'=\frac{-e^{-\gamma_2\tau_2}+\cos\tau_2-\gamma_2\sin\tau_2}{\sqrt{1+\gamma_2^2}\sin\tau_2},$$

其中 $\gamma_2=\dfrac{h_2}{\omega_2}$. 上式又可改写为

$$s_1=-\frac{e^{\gamma_2\tau_2}\varphi(\tau_2,\ -\gamma_2)}{\sqrt{1+\gamma_2^2}\sin\tau_2},\quad s'=-\frac{e^{-\gamma_2\tau_2}\varphi(\tau_2,\ \gamma_2)}{\sqrt{1+\gamma_2^2}\sin\tau_2}.\qquad(6\cdot13)$$

根据 $\varphi(\tau,\ \gamma)$ 的性质, 只要让 τ_2 在 $(\pi,\ \tau_2^0)$ 中变动, 就可得到 $(0,\ \infty)$ 中的一切 s', 这里 τ_2^0 是 $\varphi(\tau_2,\ \gamma_2)=0$ 的最小正根, $\pi<\tau_2^0<2\pi$. 容易画出由(6·13)所表示的曲线 $s_1=g(s')$ 的图形(图 6·6). 当 τ_2 从 τ_2^0 减少到 π 时 s' 从 0 增加到 $+\infty$, s_1 从定值 $s_1^0>0$ 增加到 $+\infty$. 当 $s'>0$ 时曲线 $s_1=g(s')$ 有正的斜率, 它随 s' 的增加而增加, 最后趋于极限 $e^{\gamma_2\pi}$. 渐近线的方程是

$$s_1=e^{\gamma_2\pi}s'+\frac{2\gamma_2(1+e^{\gamma_2\pi})}{\sqrt{1+\gamma_2^2}}.\qquad(6\cdot14)$$

把(6·10)与(6·13)接在一起，就可得到直线 $x=-1$ 的下半部到下半部的点变换，它把$(-1,\ -s)$变为$(-1,\ -s_1)$. 求这个点变换之下的不动点就相当于把图 6·5 与图 6·6 迭合(图 6·7)而求两曲线 $s=f(s')$ 与 $s_1=g(s')$ 的交点. 下面分两种情况来讨论:

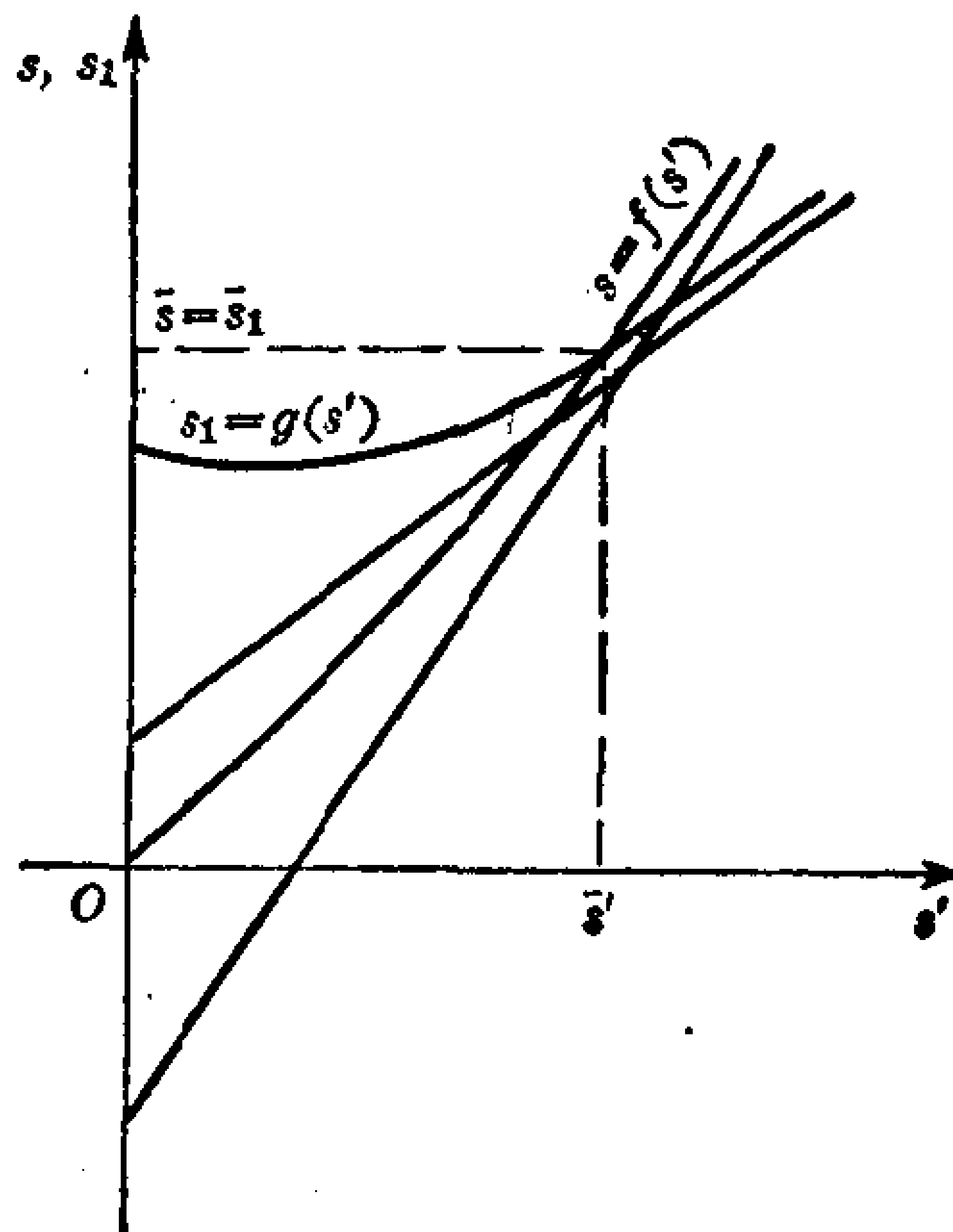


图 6·7

1. $0<h_2<h_1<1$[1].

这时直线(6·12)的斜率大于直线(6·14)的斜率，故曲线 $s=f(s')$ 与 $s_1=g(s')$ 有奇数个交点. 今证它们只有唯一的交点. 假设$(\bar{s}',\ \bar{s}=\bar{s}_1)$是两曲线的任一交点，它对应于参数 $\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2$，则由(6·10)与(6·13)得到

$$\begin{aligned}\frac{e^{\gamma_1\bar{\tau}_1}\varphi(\bar{\tau}_1,\ -\gamma_1)}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\ \sin\bar{\tau}_1}&=-\frac{e^{\gamma_2\bar{\tau}_2}\varphi(\bar{\tau}_2,\ -\gamma_2)}{\sqrt{1+\gamma_2^2}\ \sin\bar{\tau}_2},\\ \frac{e^{-\gamma_1\bar{\tau}_1}\varphi(\bar{\tau}_1,\ \gamma_1)}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\ \sin\bar{\tau}_1}&=\frac{e^{-\gamma_2\bar{\tau}_2}\varphi(\bar{\tau}_2,\ \gamma_2)}{\sqrt{1+\gamma_2^2}\ \sin\bar{\tau}_2},\end{aligned}\tag{6·15}$$

且有 $$\left.\frac{ds_1}{ds}\right|_{s=\bar{s}}=\left(\frac{ds_1}{ds'}\bigg/\frac{ds}{ds'}\right)_{s=\bar{s}}=\frac{\varphi(\bar{\tau}_2,\gamma_2)\varphi(\bar{\tau}_1,\ -\gamma_1)}{\varphi(\bar{\tau}_2,\ -\gamma_2)\varphi(\bar{\tau}_1,\ \gamma_1)}.$$

利用(6·15)可算出

$$\left.\frac{ds_1}{ds}\right|_{s=\bar{s}}=e^{2(\gamma_2\bar{\tau}_2-\gamma_1\bar{\tau}_1)}>0.\tag{6·16}$$

另一方面，由于当 s' 甚小时 $s_1>s$，故在两曲线的第一个交点 P 处应有

$$\frac{ds}{ds'}>\frac{ds_1}{ds'}>0.$$

事实上，利用(6·15)容易算出在$(\bar{s}',\ \bar{s}_1=\bar{s})$有

$$\frac{ds}{ds'}-\frac{ds_1}{ds'}=e^{2(\gamma_2\bar{\tau}_2}+\gamma_1\bar{\tau}_1)\frac{\varphi(\bar{\tau}_2,\ \gamma_2)}{\varphi(\bar{\tau}_2,\ -\gamma_2)}>0,$$

1) 这条件相当于 $2RC>MS>RC$，且 $RC<\frac{2}{\omega_0}$.

因此必定有

$$0<\left.\frac{ds_1}{ds}\right|_P<1. \tag{6·17}$$

如果两曲线还有第二个交点 Q, 则在点 Q 应有

$$\frac{ds_1}{ds'}\geqslant\frac{ds}{ds'}>0, \quad 从而 \quad \left.\frac{ds_1}{ds}\right|_Q\geqslant 1. \tag{6·18}$$

但这是不可能的, 因为由(6·16)看出, 当 $\bar{s}$ 增大时 $\bar{\tau}_1$ 增大而 $\bar{\tau}_2$ 减少, 故应有

$$\left.\frac{ds_1}{ds}\right|_Q<\left.\frac{ds_1}{ds}\right|_P,$$

与(6·17)一起就看出(6·18)不可能成立. 这就证明了不动点的唯一性, 亦即方程(6·5)只有唯一的极限环. 由(6·17)可以看出(根据 §2 定理 2·1)它应是稳定环.

2. $0<h_1\leqslant h_2<1$.

这时假如两曲线 $s=f(s')$ 与 $s_1=g(s')$ 相交, 则在第一个交点处应有

$$\frac{ds_1}{ds}=e^{2(\gamma_2\bar{\tau}_2-\gamma_1\bar{\tau}_1)}\leqslant 1,$$

但这是不可能的, 因为 $\bar{\tau}_2>\pi>\bar{\tau}_1$, 且当 $h_2\geqslant h_1$ 时有 $\gamma_2\geqslant\gamma_1$.

可以证明当 $h_1\geqslant 1>h_2>0$ 时方程(6·5)亦存在唯一的稳定极限环, 这时(0, 0)对于区域(I)中的轨线来说是稳定结点, 故(6·6)式不再能用. 证明与前类似, 从略.

对于一般的非线性方程, 由于点变换无法用解析式子明显地表达出来, 所以要和上面完全一样地证明极限环的唯一性往往是办不到的. 但是按照点变换法的精神, 也可以用下面的方法来达到证明唯一性的目的.

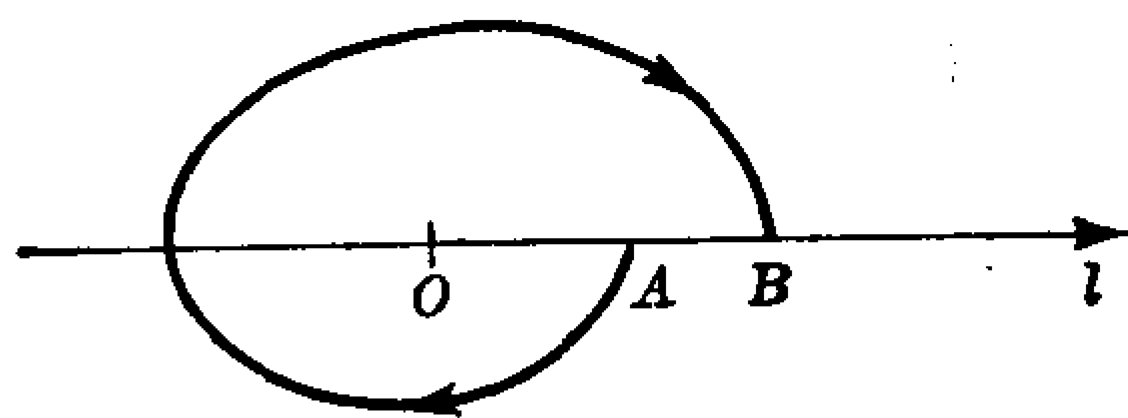


图 6·8

(a) 先用定性方法证明从过奇点 O 的半射线 l 上任一点 A 出发的轨线必定重新回头交 l 于 B (图 6·8).

(b) 证明比值$|\overline{OA}|:|\overline{OB}|$ (或差值 $|\overline{OA}|-|\overline{OB}|$) 随 $|\overline{OA}|$ 的增加而单调

增加(减少).

那末$|\overline{OA}|:|\overline{OB}|$最多只能有一次等于1($|\overline{OA}|-|\overline{OB}|$最多只能有一次等于零；这就表示极限环如果存在，必为唯一. 用此方法研究极限环的唯一性而得到较好的结果者有[63]与[64].

II. Poincaré 方法

此法见于 Poincaré 的经典论文《微分方程所定义的积分曲线》中. 先证:

引理 已给极坐标下的微分方程

$$\frac{d\rho}{d\omega}=\varphi(\rho,\ \omega), \tag{6·19}$$

它以原点 O 为奇点. 设 $\psi(\rho)$是 ρ 的任一单值连续可微函数. 如果方程(6·19)存在两条闭轨线 Γ_1 与 Γ_2, 则在 Γ_1 与 Γ_2 之间必有点使下列五个关系之一成立:

$$\frac{d\psi}{d\rho}=\infty,\ \varphi(\rho,\ \omega)=\infty,\ \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\varphi\frac{d\psi}{d\rho}\right)=0,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}=\infty,\quad \frac{d^2\psi}{d\rho^2}=\infty \tag{6·20}$$

【证】 如果 Γ_1 与 Γ_2 不是套在一起; 或是虽然套在一起, 但 O 在两者的外部或夹在两者之间; 或是套在一起, 且 O 在里面一条的内部, 但存在过 O 的半射线, 使与其中之一的交点多于一个; 在这几种情况都容易证明在 Γ_1 与 Γ_2 之间必有点使 $\varphi(\rho,\ \omega)=\infty$, 为此只须应用熟知的公式

$$\tan\tau=\rho\Big/\frac{d\rho}{d\omega},$$

其中 τ 表示过一点的向径与过此点的(6·19)的轨线的交角.

现在假设 $O\subset\Gamma_1\subset\Gamma_2$, 且从 O 出发的任一半射线 $\omega=\omega_0$ 与 Γ_i 只交于一点$(\omega_0,\ \rho_0^{(i)})(i=1,\ 2)$. 研究函数

$$\xi(\omega_0)=\psi(\rho_0^{(2)})-\psi(\rho_0^{(1)}).$$

显见它是 ω_0 的连续周期函数, 因此必有 ω_1 使 ξ 取最大值. 在 $\omega=\omega_1$ 有

$$\frac{d\xi(\omega)}{d\omega}\bigg|_{\omega=\omega_1}=0,$$

亦即

$$\left(\frac{d\psi}{d\rho}\frac{d\rho}{d\omega}\right)_{(\omega_1,\rho_0^{(2)}(\omega_1))}=\left(\frac{d\psi}{d\rho}\cdot\frac{d\rho}{d\omega}\right)_{(\omega_1,\rho_0^{(1)}(\omega_1))}. \qquad (6\cdot21)$$

今再固定 ω_1, 把 $\frac{d\psi}{d\rho}\frac{d\rho}{d\omega}$ 看成 ρ 的函数, ρ 的变动区间是 $[\rho_0^{(1)}(\omega_1),\ \rho_0^{(2)}(\omega_1)]$. 由(6·21)及 Rolle 定理知道必定存在 ρ^*,

$$\rho_0^{(1)}(\omega_1)<\rho^*<\rho_0^{(2)}(\omega_1),$$

使在点 $(\omega_1,\ \rho^*)$ 至少成立下列三个等式之一:

$$\frac{d\psi}{d\rho}\frac{d\rho}{d\omega}=\infty,\quad \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{d\psi}{d\rho}\frac{d\rho}{d\omega}\right)=0,\quad \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{d\psi}{d\rho}\frac{d\rho}{d\omega}\right)=\infty,$$

以 $\frac{d\rho}{d\omega}=\varphi(\rho,\omega)$ 代入上列各式, 即得(6·20). 引理证毕.

定理 6·1 如果对于方程(6·19)能找到函数 $\psi(\rho)$, 使在某一单连通域 G 中(6·20)的五个关系都不成立, 则在 G 中最多只能有一条闭轨线, 因而必为极限环.

由引理知道这是显然的.

推论 如果 $\varphi(\rho,\omega)$ 是两个连续函数之商, 且分母在区域 G 中不等于零; 又沿着任一半射线 $\omega=\omega_0$, $\varphi(\rho,\omega)$ 是 ρ 的单调递增(或递减)函数, 则在 G 中最多只能有一条闭轨线.

【证】 由假设知在 G 中没有点使 $\varphi(\rho,\omega)=\infty$, 故由引理的证明过程可以看出, 如果存在两条闭轨线 Γ_1, Γ_2, 则它们都应包含原点在其内部, 并且任一半射线 $\omega=\omega_0$ 只能与 Γ_i 交于一点. 注意 $\varphi(\rho,\omega)$ 关于 ρ 为单调, 即得

$$0=\oint_{\Gamma_1}\varphi(\rho_1(\theta),\theta)d\theta\underset{(<)}{>}\oint_{\Gamma_2}\varphi(\rho_2(\theta),\theta)d\theta=0,$$

矛盾. 故不可能存在两条闭轨线.

例 2 设有方程

$$\frac{dx}{dt}=-y+xF(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=x+yF(x,y), \qquad (6\cdot22)$$

其中

$$F(x,y)=\alpha[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-k],\quad \alpha\neq 0, k>0.$$

则当 $k>x_0^2+y_0^2$ 时方程(6·22)存在唯一的极限环，它当 $\alpha<0(>0)$ 时为稳定(不稳定)；若 $k\leqslant x_0^2+y_0^2$，则(6·22)没有闭轨线[105][1]。

【证】 当 $k>x_0^2+y_0^2$ 时圆 $F(x,y)=0$ 包含原点在其内部，取 $V(x, y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，则可算出

$$\frac{dV}{dt}=x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=\alpha(x^2+y^2)[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-k].$$

取 $r>0$ 甚小，可使圆 C_r: $x^2+y^2=r^2$ 全部在圆 $F(x,y)=0$ 的内部，于是在 C_r 上 $\frac{dV}{dt}$ 与 α 异号。同样，取 $R>0$ 足够大，使圆 C_R: $x^2+y^2=R^2$ 包含 $F(x,y)=0$ 在其内部，则在 C_R 上 $\frac{dV}{dt}$ 与 α 同号。因此在 C_r 与 C_R 之间必存在极限环，它当 $\alpha<0(>0)$ 时为稳定(不稳定)。

要证唯一性，可将(6·22)先化为极坐标，得到

$$\frac{d\rho}{d\omega}=\rho F(\rho\cos\omega,\rho\sin\omega)=\varphi(\rho,\omega), \tag{6·23}$$

其中

$$F(\rho\cos\omega,\rho\sin\omega)=\alpha[\rho^2-2\rho(x_0\cos\omega+y_0\sin\omega)+\rho_0^2-k],$$

$\rho_0^2=x_0^2+y_0^2$。今取 $\psi(\rho)=\frac{1}{\rho}$，则显见在 C_r 与 C_R 之间有

$$\frac{d\psi}{d\rho}\neq\infty,\ \varphi(\rho,\omega)\neq\infty,\ \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\neq\infty,\ \frac{d^2\psi}{d\rho^2}\neq\infty.$$

最后

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\varphi\frac{d\psi}{d\rho}\right)=\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\alpha\frac{k-\rho_0^2+2\rho(x_0\cos\omega+y_0\sin\omega)-\rho^2}{\rho}\right]$$

$$=\alpha\left(\frac{\rho_0^2-k}{\rho^2}-1\right)\neq 0.$$

因为 $\rho_0^2<k$，故由定理 6·1 知道极限环唯一存在。

---

1) 这个例子是§1例5的推广，但把(6·22)化为极坐标以后并不能求出通积分。

要证 $k \leqslant x_0^2+y_0^2$ 时不存在闭轨线，只须注意(6·23)的积分线关于直线 $x_0\cos\omega+y_0\sin\omega=0$ 的对称线所满足的微分方程是

$$\frac{d\bar{\rho}}{d\omega}=-\alpha\bar{\rho}[\bar{\rho}^2+2\bar{\rho}(x_0\cos\omega+y_0\sin\omega)+\rho_0^2-k],$$

由此可得(注意 $\rho_0^2 \geqslant k$)

$$\left(\frac{d\rho}{d\omega}-\frac{d\bar{\rho}}{d\omega}\right)_{\rho=\bar{\rho}}=2\alpha\rho[\rho^2+\rho_0^2-k]>0,$$

故方程(6·23)不可能存在闭轨线.

在介绍其他方法以前，让我们先说说有关 Liénard 方程

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0 \tag{6·24}$$

的极限环唯一性的研究历史. 方程(6·24)可借普通的代换化为方程组

$$\frac{dx}{dt}=v,\quad \frac{dv}{dt}=-f(x)v-g(x); \tag{6·25}$$

亦可借 Liénard 变换化为方程组

$$\frac{dx}{dt}=-y-F(x),\ \frac{dy}{dt}=g(x). \tag{6·26}$$

这个方程之所以重要，不单是因为(6·24)本身有明显的物理意义，而且还由于：有不少不属于(6·26)形状的方程组，在证明它的极限环的唯一性时，往往需要经过一些坐标变换化成(6·26)的形状以后才能达到目的. 这一事实读者在本书的后半部将可清楚地看到.

最先证明方程(6·24)的极限环的唯一性定理的是 Liénard [9]，他的结果如下：

定理 6·2　设 $g(x)\equiv x$，$f(x)$ 为偶函数，存在 $\delta>0$，使当 $|x|<\delta$ 时有 $f(x)<0$，当 $|x|>\delta$ 时有 $f(x)>0$，又

$$\int_0^{\pm\infty} f(x)dx=\pm\infty, \tag{6·27}$$

则方程(6·26)存在唯一的(稳定)极限环.

N. Levinson 与 O. K. Smith[64] 推广此定理到 $g(x)$ 为非线性连续函数的情况去，但设：

$$xg(x)>0 \quad 当 \quad x\neq 0, \quad \int_0^{\pm\infty} g(x)dx=+\infty. \tag{6·28}$$

他们也不要求 $f(x)$ 是偶函数.

G. Sansone[106] 仍设 $g(x)\equiv x$, 除去 $f(x)$ 为偶函数的条件(因而它的零点可能不对称于原点)，而改为假设 $F(x)$ 有对称于原点的零点，也证明了唯一性.

由于 $f(x)$ 表示振动系统的阻尼系数，因此上列诸定理的条件都表示：当位移很小时阻尼是负的，当位移较大时阻尼是正的，且在 $x=0$ 的左右两方阻尼恰各有一次等于零. 根据这种物理学的直观，H. Serbin[107] 试图证明：

只要当 $\delta_{-1}<x<\delta_1$ 时 $f(x)<0$; 当 $x>\delta_1>0$ 及 $x<\delta_{-1}<0$ 时 $f(x)>0$, 又 $xg(x)>0$ 当 $x\neq 0$, 且(6·28)式成立，则方程(6·26)存在唯一的极限环.

但是不久以后，G. F. D. Duff 与 N. Levinson[108] 就举例说明，即使当 $g(x)\equiv x$, 且 $f(x)$ 为多项式的情况，Serbin 的结果也是错误的. 例子如下：

例 3 考虑方程

$$\frac{dx}{dt}=y, \quad \frac{dy}{dt}=-x-\varepsilon yf(x), \tag{6·29}$$

取 $f(x)=A_3x^6-A_2x^4+A_1x^2-A_0-Cx$, 其中 $A_0=\frac{36}{\pi}$, $A_1=\frac{192}{\pi}$, $A_2=\frac{112}{\pi}$, $A_3=\frac{64}{5\pi}$, $C>0$ 足够大. 根据 §4(4·18)式可算出方程 $(6·29)_{\varepsilon=0}$ 的闭轨线族 $x^2+y^2=h^2$ 中凡能产生(6·29)的极限环者，其 h 必须满足方程

$$\int_0^{2\pi} h^2\sin^2\theta\,[A_3h^6\cos^6\theta-A_2h^4\cos^4\theta$$
$$+A_1h^2\cos^2\theta-A_0-Ch\cos\theta]\,d\theta=0,$$

即 $$\Phi(h) = -h^8+14h^6-49h^4+36h^2$$
$$= -h^2(h^2-1)(h^2-4)(h^2-9) = 0.$$

因此必须 $h=1, 2, 3$. 又因

$$\Phi'(1) = -48<0,\ \Phi'(2) = 80>0,\ \Phi'(3) = -2160<0,$$

故当 $\varepsilon>0$ 足够小时方程(6·29)确有三个极限环 Γ_1(稳定), Γ_2(不稳定)与 Γ_3(稳定). 当 $\varepsilon\to 0$ 时它们分别以半径为 1, 2, 3 的圆作为极限位置. 另一方面容易证明, 只要取 $C>0$ 足够大, 则 $f(x)=0$ 只有一个负根和一个正根, 满足 Serbin 的要求.

由此可见, 单是对 $f(x)$ 的零点与正负性加以限制, 还不能保证极限环的唯一性, 事实上, $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 的符号变化也会影响极限环的个数. 张芷芬[109]曾举例说明: 如果 $g(x)\equiv x, f'(x)>0$ 当 $x>a>0$, $f'(x)<0$ 当 $x<a$, 则适当的选取 $f(x)$, 可使方程(6·26)有任意有限个数的极限环. 在她的另一文中(下面要介绍)则证明: 只要 $f''(x)$ 定号, 便可保证极限环的唯一性. 这些事实都说明: 仅只假定 $f'(x)$ 变号一次, 而对 $f'(x)$ 的增减性不加适当的限制, 极限环的唯一性是不能保证的.

III. 比较法

证明极限环的唯一性的另一更有效的方法是由 Liénard 所首创, 以后又被 Sansone 与张芷芬所发展的比较法. Liénoard 与 Sansone 是比较某一正定函数 $\lambda(x, v)$ 的微分沿着两个极限环 $\Gamma_1\supset\Gamma_2$ 积分一周所得的数值, 而张芷芬则是比较发散量沿着两环积分一周所得的数值. 现在先介绍 Sansone 的定理.

定理 6·3 设在方程(6·24)中 $g(x)\equiv x$, $f(x)$ 连续; 存在 $\delta_{-1}<0<\delta_1$, 使当 $\delta_{-1}<x<\delta_1$ 时有 $f(x)<0$; 当 $x<\delta_{-1}$ 及 $x>\delta_1$ 时有 $f(x)>0$. 又 $F(\pm\infty)=\pm\infty$, 且存在 $\Delta>0$ 使 $F(\Delta)=F(-\Delta)=0$, 则方程(6·26)存在唯一的极限环, 它是稳定环.

【证】 极限环的存在性由 §5 定理 5·1 知之, 下面证明唯一

性. 记 $\lambda(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, 则沿着(6·26)的轨线有

$$\frac{d\lambda}{dy}=\frac{d\lambda}{dt}\frac{dt}{dy}=[x(y-F(x))-xy]\frac{1}{-x}=F(x),$$

或
$$d\lambda=F(x)dy.$$

先证(6·26)的极限环 Γ 的最右点的横坐标必大于 Δ, 最左点的横坐标必小于 $-\Delta$. 如果不是这样, 则 Γ 应整个位于带域 $|x|\leqslant\Delta$ 中. 于是沿着 Γ 逆时针跑时在 y 轴右方有 $F(x)\leqslant0, dy>0$, 在 y 轴的左方有 $F(x)\geqslant0, dy<0$, 因此恒有 $d\lambda\leqslant0$. 这样必有

$$\oint_\Gamma d\lambda<0.$$

但沿着任何闭曲线跑一周时 $\lambda(x,y)$ 应该回到原来的数值, 故上式不可能成立.

其次, 设 Γ 的最右点在 $x=\Delta$ 的右方, 但其最左点在 $x=-\Delta$ 的右方. 这时 Γ 应交负 x 轴于 $x=-\Delta$ 的右方一点 C, 又应交 $x=\Delta$ 于 x 轴下方一点 D, $|\overline{OD}|>\Delta$. 由前已知沿着 Γ 从 C 点逆时针跑到 D 点时 $d\lambda<0$, 故 $|\overline{OC}|>|\overline{OD}|>\Delta$, 与 $|\overline{OC}|<\Delta$ 相矛盾. 同理可证 Γ 的最右点在 $x=\Delta$ 左方, 最左点也在 $x=-\Delta$ 左方亦不可能.

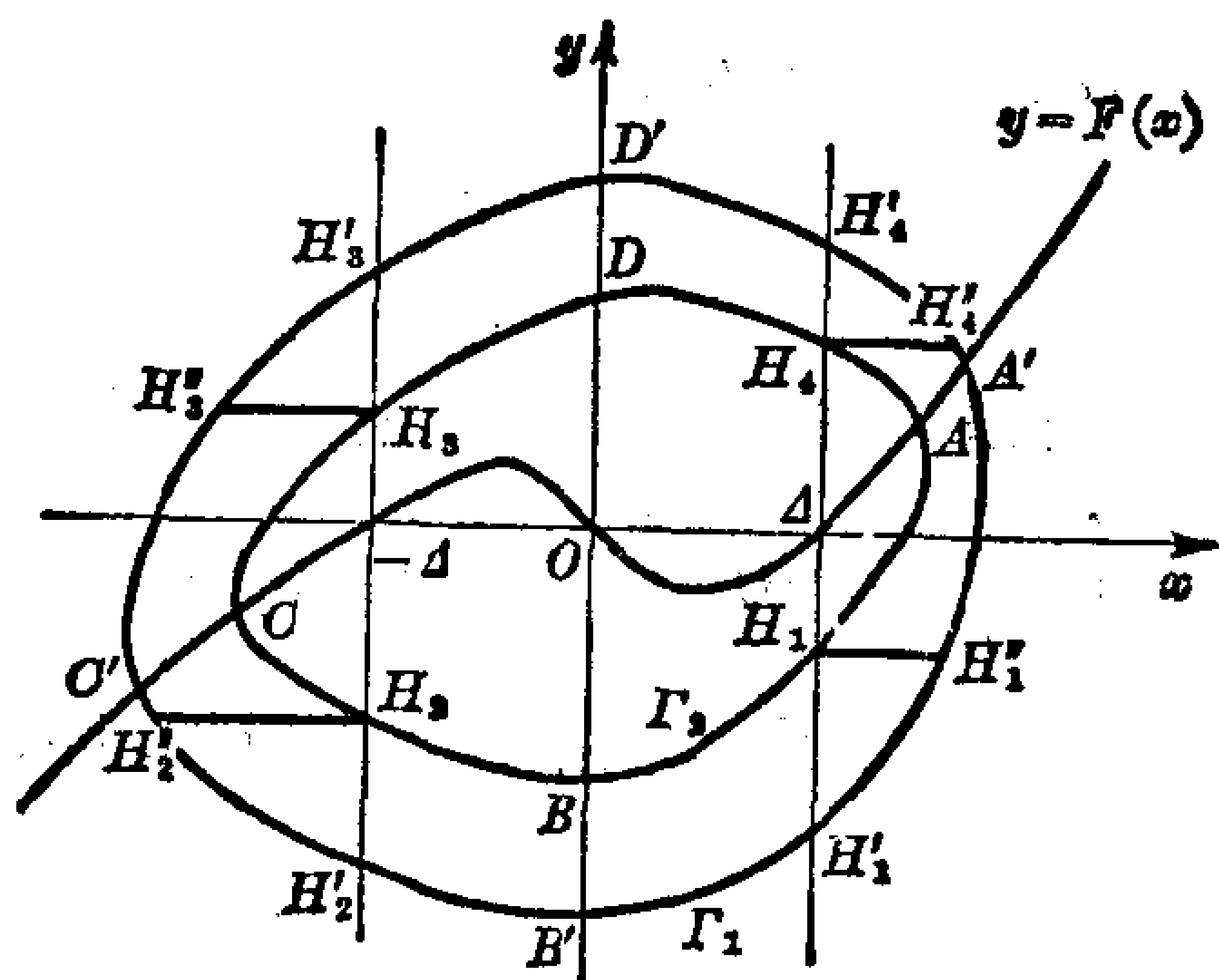


图 6·9

现在假设有两个极限环 $\Gamma_1\supset\Gamma_2$, 它们都和 $x=\pm\Delta$ 相交, 如图 6·9. 我们来比较

$$\oint_{\Gamma_1}d\lambda \quad 与 \quad \oint_{\Gamma_2}d\lambda.$$

首先有

$$\int_{H_1''H_4''} d\lambda = \int_{H_1''H_4''} F(x)dy > \int_{H_1AH_4} F(x)dy = \int_{H_1AH_4} d\lambda, \quad (6\cdot30)$$

这是因为在 $x=\Delta$ 右边有 $F(x)>0$, $dy>0$, 并且对于相同的 y, $H_1''H_4''$ 上点的横坐标大于 H_1AH_4 上点的横坐标, 且 $F(x)$ 是 x 的增函数. 同理可证:

$$\int_{H_3''C'H_2''} d\lambda > \int_{H_3CH_2} d\lambda. \quad (6\cdot31)$$

其次, 沿着 H_4DH_3 与 $H_4'D'H_3'$ 可以写

$$d\lambda = \frac{-xF(x)}{y-F(x)} dx,$$

于是易见

$$\int_{H_4'D'H_3'} d\lambda = \int_{H_4'D'H_3'} \frac{-xF(x)}{y-F(x)} dx$$

$$> \int_{H_4DH_3} \frac{-xF(x)}{y-F(x)} dx = \int_{H_4DH_3} d\lambda. \quad (6\cdot32)$$

这是因为沿着这两段弧有 $dx<0, xF(x)<0$, 且对于相同的 x, $H_4'D'H_3'$ 上点的纵坐标大于 H_4DH_3 上点的纵坐标. 同理可证

$$\int_{H_2'B'H_1'} d\lambda > \int_{H_2BH_1} d\lambda. \quad (6\cdot33)$$

最后, 对于 Γ_1 上多余的四段弧有

$$\int_{H_1'H_1''} d\lambda>0, \int_{H_4''H_4'} d\lambda>0, \int_{H_3'H_3''} d\lambda>0, \int_{H_2''H_2'} d\lambda>0. \quad (6\cdot34)$$

把(6·30)到(6·34)诸不等式相加, 即得

$$\oint_{\Gamma_1} d\lambda > \oint_{\Gamma_2} d\lambda,$$

但 $\lambda(x,y)$ 沿着任何闭曲线跑一周时应该回到原来的数值, 故 Γ_1 与 Γ_2 不能同时存在. 证毕[1].

例4 证明方程

$$\frac{dx}{dt} = y^2-(x+1)[(x-1)^2+\mu], \quad \frac{dy}{dt} = -xy \quad (6\cdot35)$$

---

1) 由证明的过程可以看出, 如果能用其他方法证明极限环必与 $x=\pm\Delta$ 相交, 则 $g(x)$ 可以是非线性函数, 只要它满足条件(6·28).

当 $0<\mu<1$ 时恰好有两个(稳定)极限环[110].

【证】 (6·35) 有三个奇点: $A(-1, 0)$, $B_1(0, \sqrt{1+\mu})$ 与 $B_2(0, -\sqrt{1+\mu})$. 由于向量场对称于 x 轴, 只须证明在 x 轴上方存在唯一的(稳定)极限环好了. 注意 x 轴是轨线, 故极限环不可能和它相遇. 首先易见极限环 Γ 应在直线 $x=-1$ 的右方, 因为在此直线上有 $\frac{dx}{dt}=y^2>0$, 并且另两奇点也在 $x=-1$ 的右方. 今作变换

$$u=x, \quad z=x^2+y^2-(1+\mu),$$

它把 (x, y) 平面中上(或下)半平面 $y\geqslant 0(\leqslant 0)$ 的点一对一地变到 (u, z) 平面上抛物线:

$$\mathscr{H}: z=u^2-(1+\mu)$$

的内部(图 6·10). 方程(6·35)被变为

$$\frac{du}{dt}=z-F_\mu(u), \quad \frac{dz}{dt}=-g_\mu(u),$$

其中 $F_\mu(u)=u^3-(1-\mu)u$,

$g_\mu(u)=2u(u+1)[(u-1)^2+\mu]$.

注意这里 $F_\mu(u)$ 满足定理 6·3 中 $F(x)$ 所满足的一切条件, 又 $g_\mu(u)$ 在直线 $u=-1$($x=-1$ 的象)的右方满足条件:

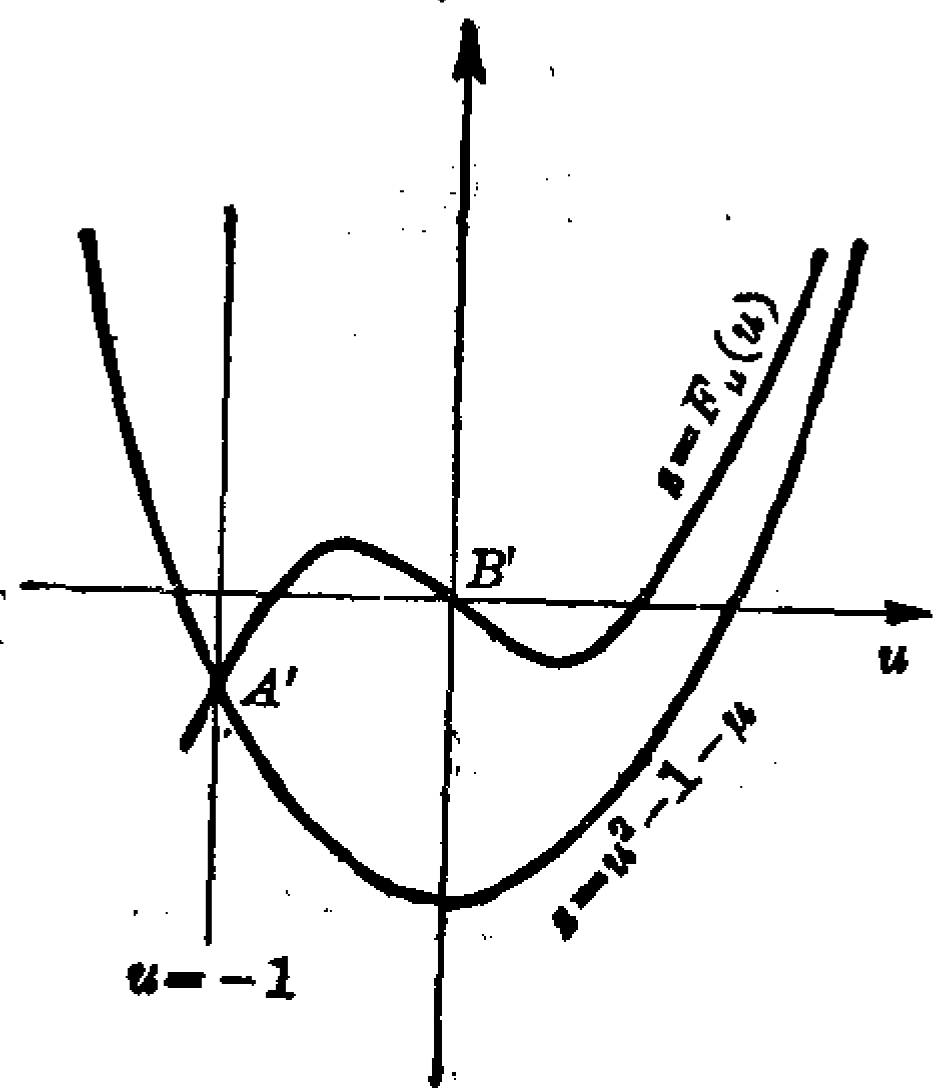


图 6·10

$$ug_\mu(u)>0 \quad 当 \quad u\neq 0, \quad \int_0^\infty g_\mu(u)du=\infty,$$

因此与定理 6·3 完全一样 (只要用 $g_\mu(u)$ 代 u, $z^2+G_\mu(u)$ 代 $\lambda(z, u)=z^2+u^2$)就可证明存在与唯一性[1].

其次介绍张芷芬[111]的方法. 为了要证明方程(6·26)存在唯一的稳定(不稳定)极限环, 她把证明分为三个步骤:

1) 参看本节末尾的习题.

1．证明方程的唯一奇点是正向(负向)远离型奇点;

2．证明若 $\Gamma_2\supset\Gamma_1$ 是两个套在一起的环,则发散量沿着 Γ_2(就 t 增加的方向)积分一周的值小(大)于它沿着 Γ_1 积分一周的值;

3．证明不存在半稳定环。

她的定理不仅适用于方程(6·26),而且适用于更一般的方程

$$\frac{dx}{dt}=-\varphi(y)-F(x),\quad \frac{dy}{dt}=g(x). \tag{6·36}$$

后来 Л. А. Черкас 等[112],又放宽了她的条件，并改进证明方法[1),使之更为简捷,下面就证明 Черкас 等的定理.

定理 6·4 设对方程(6·36)成立下列条件:

1．$xg(x)>0$ 当 $x\neq0$, $y\varphi(y)>0$ 当 $y\neq0$;

2．$\varphi(y)$为单调增加，$f(0)<0(>0)$;

3．可以找到实数 α,β, 使函数

$$f_1(x)=f(x)+g(x)[\alpha+\beta F(x)] \tag{6·37}$$

有单零点 $x_1<0<x_2$, 且 $f_1(x)\leqslant0(\geqslant0)$ 在$[x_1,x_2]$中;

4．在$[x_1,x_2]$之外函数 $f_1(x)/g(x)$ 不减少(不增加);

5．所有的环都包含 x 轴上的区间$[x_1,x_2]$.

那末系统(6·36)不能有多于一个的极限环;若存在,必为稳定环(不稳定环).

【证】 这里只就 $f(0)<0$ 的情况证明. 先设 $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(y)$为连续可微函数. 易见(6·36)有唯一的奇点 $O(0,0)$,它是不稳定的.今设存在两环 $\Gamma_2\supset\Gamma_1\supset O$, 且 Γ_1 是最靠近 O 的环,则有

$$\oint_{\Gamma_i}g(x)dt=0,\quad \oint_{\Gamma_i}g(x)\varphi(y)dt=0,$$

$$\oint_{\Gamma_i}g(x)[\varphi(y)+F(x)]dt=0\quad(i=1,2).$$

1) 原来她证明前述第二条时,其比较方法与定理 6·3 中完全一样,不用 Green 公式。

这是因为每一被积函数都可化为关于 x 或 y 的单变量积分之故.于是由(6·37)可见(6·36)的发散量 $-f(x)$ 的积分满足等式

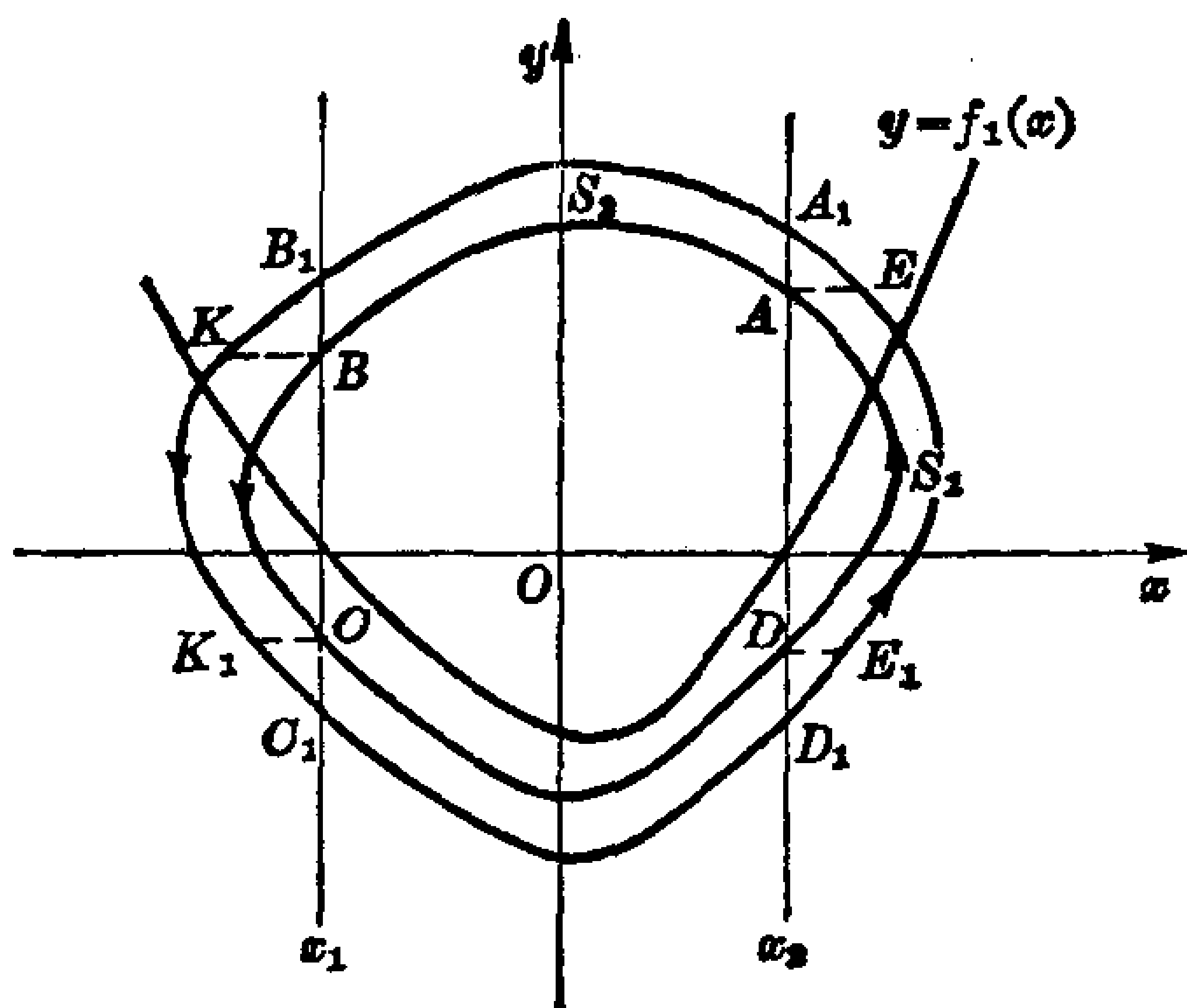


图 6·11

$$h_i \overset{\text{def}}{=\!=} -\oint_{\Gamma_i} f(x)\,dt = -\oint_{\Gamma_i} f_1(x)\,dt \quad (i=1,2).$$

现在证明必有 $h_2<h_1$. 由图6·11以及 Green 公式可知

$$\int_{E_1E} f_1(x)\,dt - \int_{DA} f_1(x)\,dt = \oint_{E_1EADE_1} \frac{f_1(x)}{g(x)}\,dy = \iint_{S_1} \frac{d}{dx}\left(\frac{f_1}{g}\right) dx\,dy \geqslant 0, \tag{6·38}$$

$$\int_{A_1B_1} f_1(x)\,dt - \int_{AB} f_1(x)\,dt = -\oint_{A_1B_1BAA_1} \frac{f_1(x)\,dx}{\varphi(y)+F(x)} = -\iint_{S_2} \frac{f_1(x)\varphi'(y)}{[\varphi(y)+F(x)]^2}\,dx\,dy \geqslant 0, \tag{6·39}$$

其中 S_1 与 S_2 是两个回路各自包围的区域. 同理可证

$$\int_{KK_1} f_1(x)\,dt - \int_{BC} f_1(x)\,dt \geqslant 0,$$

$$\int_{C_1D_1} f_1(x)\,dt - \int_{CD} f_1(x)\,dt \geqslant 0. \tag{6·40}$$

此外, 还有明显的不等式

$$\int_{B_1K} f_1(x)\,dt \geqslant 0, \quad \int_{EA_1} f_1(x)\,dt \geqslant 0,$$

$$\int_{K_1C_1} f_1(x)\,dt \geqslant 0, \quad \int_{D_1E_1} f_1(x)\,dt \geqslant 0. \tag{6·41}$$

合并(6·38)至(6·41)各式, 即得 $h_2<h_1$.

但已知 O 为不稳定，因而 Γ_1 为内侧稳定．根据 §2 定理 2·3 知道应有 $h_1\leqslant 0$，从而 $h_2<0$．如果能证明 Γ_1 不是半稳定环而是稳定环，那末 Γ_2 便不可能存在，因为当 Γ_1 是外侧稳定时，Γ_2 必须是内侧不稳定，从而应有 $h_2\geqslant 0$，与 $h_2<0$ 矛盾．

现在假设 Γ_1 是半稳定环，设 $\beta\geqslant 0$（$\beta<0$ 时证明类似）．作依赖于参数 α 的方程组

$$\frac{dx}{dt}=-\varphi(y)-\overline{F}(x),\quad \frac{dy}{dt}=g(x),\qquad (6\cdot 42)$$

其中

$$\overline{F}(x)=\begin{cases}F(x) & \text{当}\quad x\leqslant x_2,\\ F(x)+\int_{x_2}^{x}\gamma(\xi-x_2)g(\xi)d\xi, & \text{当}\quad x>x_2.\end{cases}$$

注意(6·42)与(6·36)在半平面 $x\leqslant x_2$ 中完全一致，而(6·42)在半平面 $x>x_2$ 中关于参数 γ 构成旋转向量场，因而(6·42)在全平面构成广义旋转向量场．故对足够小的 $\gamma>0$（$\gamma<0$），(6·42)在 Γ_1 外侧存在不稳定环（稳定环）$\overline{\Gamma}_1$，而在 Γ_1 内侧存在稳定环（不稳定环）$\overline{\Gamma}_1^*$．另一方面，函数 $\overline{F}(x)$ 及其导数 $f(x)+\gamma(x-x_2)g(x)$ 仍然满足本定理的一切条件，故如前可证 $\bar{h}_1^*>\bar{h}_1$（这里 $\bar{h}_1^*$ 与 $\bar{h}_1$ 分别是(6·42)的发散量沿着 $\overline{\Gamma}_1^*$ 与 $\overline{\Gamma}_1$ 积分一周的值），这是不可能的．

最后，如果 $f(x), g(x), \varphi(y)$ 仅为连续，则可按 §1 末尾所述 Еругин 的办法来处理．

注意 1．当 $\beta=0$ 并且假设 $f_1(x)/g(x)$ 当 x 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 中增加时不减少，我们就得到张芷芬的唯一性定理．

注意 2．如果定理的条件只在带域（$a<x<b, -\infty<y<\infty$）中成立，则结论也在此带域中成立．

注意 3．如果对于奇点的稳定性没有任何假设，则极限环的唯一性的结论也得不到，因为有可能 $h_2<0<h_1$，Γ_1 为不稳定而 Γ_2 为稳定．

例 5　证明§5方程(5·33)的极限环的唯一性，设其中 $B>1+A^2$.

【证】　在方程(5·35)中作变量代换

$$\eta'=\eta,\ \ \xi'=\frac{\xi}{A},\ \ ds=A(1+\xi')^2dt\quad (\text{对 } \xi'>-1, \text{即 } x>0)$$

可得
$$\frac{d\xi'}{ds}=\eta'-F(\xi'),\ \ \frac{d\eta'}{ds}=-g(\xi'),$$

其中

$$F(\xi')=\left(A\xi'^3-\frac{B-2A^2}{A}\xi'^2-\frac{B-1-A^2}{A}\xi'\right)\Big/(1+\xi')^2,$$

$$g(\xi')=\xi'/(1+\xi')^2.$$

易见

$$F'(0)=(1+A^2-B)/A<0,\ \ \xi'g(\xi')>0\quad \text{当}\quad \xi'\neq 0,$$

$$G(\xi')=\int_0^{\xi'}g(u)du\to+\infty\quad \text{当}\quad \xi'\to-1+0,$$

$$\frac{d}{d\xi'}\left(\frac{F'(\xi')}{g(\xi')}\right)=A+\frac{2}{A\xi'^2}+\frac{B-A^2-1}{A(1+\xi')^2}>0$$

对
$$\xi'\neq 0,\ \ \xi'>-1.$$

故由定理6·4便得证极限环的唯一性.

用比较法来证明方程(5·25)的极限环的唯一性，并且容许 $f(x,0)$ 只有一个零点的还有 Л. И. Жидевич[113]的工作.

IV. 地形系法

此法最早见于 H. Poincaré 的经典著作，但他只考虑一些人为地造出来的非常特殊的方程. 对于较一般的方程应用此法主要的困难在于不知如何寻找适当的地形系. 后来 J. L. Massera[114]得到较好的造地形系的方法，使他能够改进别人已有的结果；并且他的方法后来又被张芷芬和陈翔炎所运用，也得到一些好的结果. 下面就来介绍 Massera 的方法.

早在1950年 G. Sansone 在[115]中证明了一个关于 Liénard 方程的极限环的唯一性定理.

定理 6·5 设在方程(6·26)中 $g(x)\equiv x$, $f(x)$连续, $f(x)<0$ 当 $\delta_{-1}<x<\delta_1$, $f(x)>0$ 当 $x<\delta_{-1}<0$ 及 $x>\delta_1>0$. 又对$(-\infty,0)$中的 x, $f(x)$为不增函数, 对$(0,\infty)$中的 x, $f(x)$为不减函数, 最后还有$|f(x)|<2$, 则方程(6·26)存在唯一的极限环, 它是稳定环.

后来 Massera[114] 给上述定理以更简单的证明, 并且取消了条件$|f(x)|<2$. 定理 6·5 在 1952 年被 R. Conti[116] 推广而成为

定理 6·6 若在方程(6·26)中 $xg(x)>0$ 当 $x\neq 0$ (f, g 连续), $G(\pm\infty)=+\infty$. 又设经过变换 $z=\sqrt{2G(x)}\operatorname{sgn} x$ 以后函数 $\Phi(z)=F(x(z))$满足条件:

1. $\Phi(z)/z$ 当 $z<0$ 时为不增函数, 当 $z>0$ 时为不减函数;
2. $|\Phi(z)/z|<2$;

则方程(6·26)存在唯一的极限环, 它是稳定环.

用 Massera 的方法也可以把这定理中的条件 2)取消.

1954 年 A. De Castro[117] 又给出一个关于方程(5·25)的极限环的唯一性定理如下:

定理 6·7 设 $g(x)$, $f(x,v)$连续, $xg(x)>0$ 当 $x\neq 0$, $g(x)$为 x 的增函数; $f(x,v)$对 x, v 满足 Lipschitz 条件, $f(0,0)<0$. 当 $|x|>a>0$ 时 $f(x,v)>0$; 又存在 $N>0$, $\alpha>0$, 使对任意的连续函数 $v(s)$, 只要$|v(s)|>N$, $|x|>a$, 就有

$$\int_{-\infty}^{x} f(s,v(s))\,ds \geqslant \alpha>0; \tag{6·43}$$

最后假设当$|x|$, $|v|$增加时 $f(x,v)$不减少, 则方程

$$\frac{dx}{dt}=v,\quad \frac{dv}{dt}=-g(x)-f(x,v)v \tag{6·44}$$

存在唯一的极限环.

后来张芷芬[109]证明定理的结论是错误的, 她举出了反例, 又证明当 $g(x)\equiv x$ 时此定理的结论是对的, 但须补充假设: 不存在

这样的闭曲线，在它的某一邻域中 $f(x, v)$ 沿着过原点的半射线取常数值．至于条件(6·43)则可以取消．她所用的也是 Massera 方法．由于定理 6·5 是定理 6·7 的特例，我们现在就来证明定理 6·7(设其中的 $g(x)\equiv x$)．

【证】 把(6·44)化为极坐标下的微分方程，得到

$$\frac{d\rho}{dt}=-\rho\sin^2\theta f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta),$$

$$\frac{d\theta}{dt}=-1-\sin\theta\cos\theta f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta).$$

首先证明此方程的任一闭轨线，如果存在的话，则关于原点必定是星形的．就是说，从原点出发的任一半射线与闭轨线只能交于一点(可以相切地穿过)．假如不然，设半射线 $\theta=\theta_0$ 与闭轨线 L 至少相交于三点 (θ_0, ρ_i)，$i=1, 2, 3$，$0<\rho_1<\rho_2<\rho_3$．则 $\frac{d\theta}{dt}$ 在这三点的符号应交替变化，这由定理中对 $f(x, v)$ 所加的条件知道是不可能的．

现在假设在相似变换 $x'=kx$，$v'=kv(k>0)$ 之下 L 的象是 L_k，由于 L 是星形的，故当 $k>1$ 时 L_k 包含 L，而当 $k<1$ 时 L 包含 L_k，曲线族 $\{L_k\}$ 就构成我们所需要的地形系．注意 L_k 在点 $P_k(kx, kv)$ 的切线平行于 L 在点 $P(x, v)$ 的切线，故 L_k 在 P_k 的斜率为

$$\left.\frac{dv}{dx}\right|_{L_k}=-\frac{x}{v}-f(x, v),$$

但在 P_k 这一点方程(6·44)的轨线的斜率为

$$\left.\frac{dv}{dx}\right|_{(6\cdot44)}=-\frac{kx}{kv}-f(kx, kv)=-\frac{x}{v}-f(kx, kv),$$

由定理的条件知有

$$-\frac{x}{v}-f(x, v)\begin{cases}\leqslant-\dfrac{x}{v}-f(kx, kv), & \text{当}\quad k<1;\\ \geqslant-\dfrac{x}{v}-f(kx, kv), & \text{当}\quad k>1.\end{cases}\tag{6·45}$$

这样，如果当$|x|$，$|v|$增加时$f(x, v)$是严格增加的，那末任何一条$L_k(k\neq 1)$都是无切弧(图 6·12)，故 L 必为稳定环，因而是唯一的极限环.

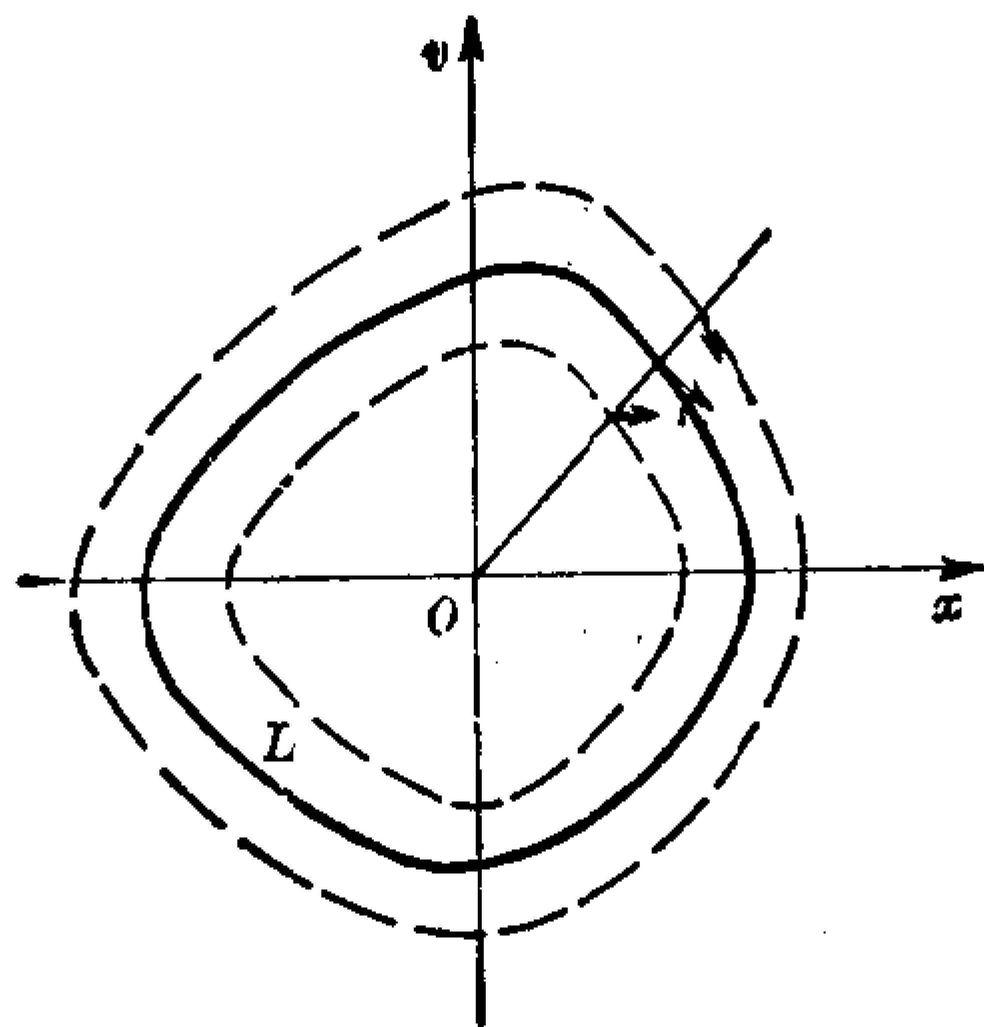


图 6·12

如果$|x|$，$|v|$增加时$f(x, v)$不是严格增加，那末根据前述的补充假设可知，方程族

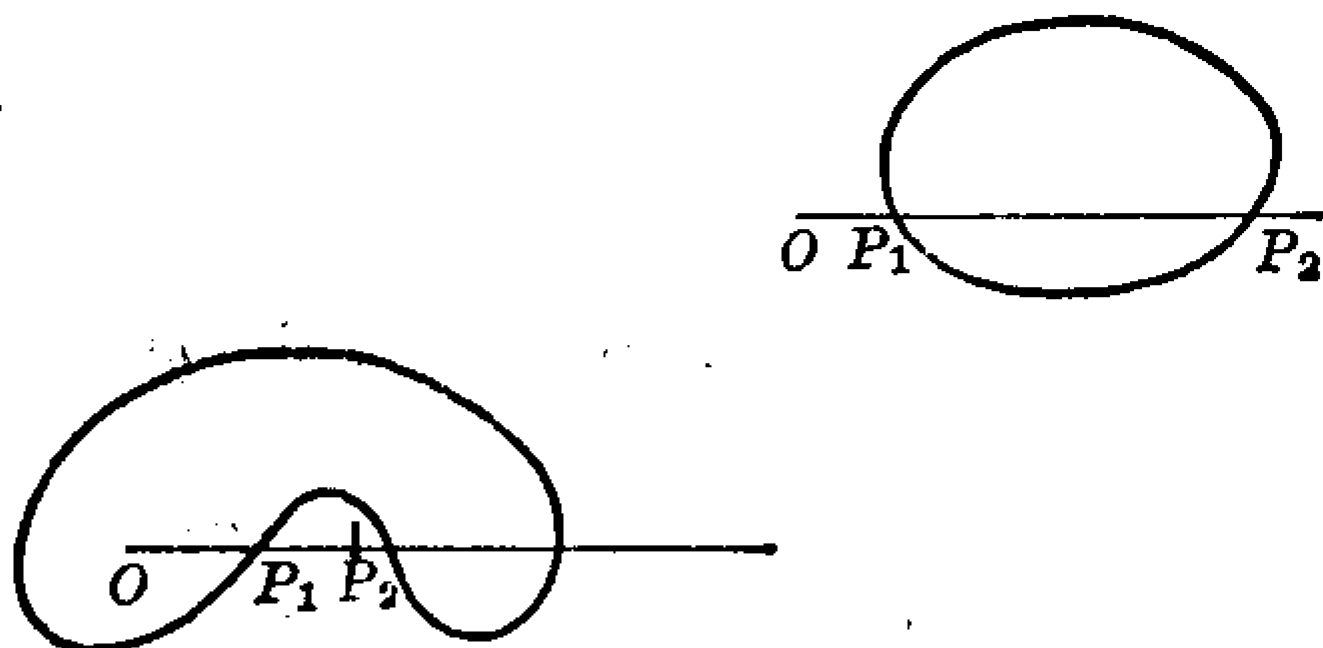


图 6·13

$$\frac{dx}{dt}=v, \quad \frac{dv}{dt}=-x-f\left(\frac{x}{k}, \frac{v}{k}\right)v \tag{6·46}$$

对参数k构成广义旋转向量场族，并且沿着任何一条闭曲线当k作微小变动时向量不能处处保持不变方向. 由§3的理论知道(6·46)中属于不同向量场的闭轨线不相交. 另一方面，易见L_k是$(6·46)_k$的闭轨线，由此即见(6·44)除L外不能有其他的闭轨线，否则它必将与某些$L_k(k\neq 1)$相交或重合，这是不可能的. 定理证毕.

注意：Sansone 与 Conti 的定理 6·5 与定理 6·6 中假定$|f(x)|<2$，就是要使化为极坐标以后的方程中$\frac{d\theta}{dt}\neq 0$，从而保证闭轨线必为星形的. 从定理 6·7 的证明可以看出，这一点可由$f(x, v)$关于x, v的单调性来保证.

仿照前述定理的证明方法可证陈翔炎[50]中的一个较为一般的结果：

定理 6·8 已知方程组

$$\frac{dx}{dt}=P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt}=Q(x, y), \tag{6.47}$$

如果对任一 $\lambda>1$ 恒有

$$P(x, y)Q(\lambda x, \lambda y)-P(\lambda x, \lambda y)Q(x, y)\geqslant 0 \quad (\text{或} \leqslant 0), \tag{6·48}$$

且使等号成立的点不充满方程(6·47)的闭轨线，则方程(6·47)至多有一个极限环；若存在必是星形的(关于原点而言)。

【证】 设(6·47)有一环 Γ，它的方程是 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. 设 Γ_λ 是由方程 $x=\lambda\varphi(t)$, $y=\lambda\psi(t)$, $\lambda\in(0, +\infty)$所确定的曲线. 易见 Γ_λ 是方程

$$\frac{dx}{dt}=\lambda P\left(\frac{1}{\lambda}x, \frac{1}{\lambda}y\right), \quad \frac{dy}{dt}=\lambda Q\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right) \tag{6·49}$$

的闭轨线. 由(6·48)以及§3中的理论知道 Γ 与 $\Gamma_\lambda(\lambda\neq 1)$是不相交的. 又易见原点也不在 Γ 上，否则 $\Gamma_\lambda(\lambda\neq 1)$将与 Γ 在原点相交. 又若 Γ 不是星形的，设它与过原点的某一射线交于两点 P_1, P_2. 记 $\lambda_0=|\overline{OP_2}|/|\overline{OP_1}|$，则 Γ_{λ_0} 与 Γ 将在 P_2 相交，这也不可能，故 Γ 必关于原点为星形的.

今设方程(6·47)还存在另一极限环 $\bar{\Gamma}$，设 Γ 与 $\bar{\Gamma}$ 与正 x 轴的交点分别为 $M(x_0, 0)$与 $\bar{M}(\bar{x}_0, 0)$，记 $\bar{\lambda}=\bar{x}_0/x_0$，则 $\bar{\Gamma}$ 将与 $\Gamma_{\bar{\lambda}}$ 相交于 $\bar{M}(\bar{x}_0, 0)$，也不可能，故 $\bar{\Gamma}$ 不存在。

推论 对于方程

$$\frac{dx}{dt}=y-F(x), \quad \frac{dy}{dt}=-x, \tag{6·50}$$

如果当 x 在$(-\infty, 0)$和$(0, +\infty)$中变化时 $\dfrac{F(x)}{x}$ 是 $|x|$ 的不减(不增)函数，且在极限环存在的带域内 $\dfrac{F(x)}{x}\neq$常数，则方程(6·50)至多只有一个极限环.

当 $F'(x)$存在时，上述保证极限环唯一性的条件相当于：

$$F'(x)-\frac{F(x)}{x}\geqslant 0 \quad (\text{或} \leqslant 0)$$

对一切 $x\neq 0$ 成立，且在极限环存在的带域内上式左边 $\neq 0$.

这一结果在更早些时候曾被罗定军用其他方法得到过。又在

[50]中还有其他的唯一性定理，它以下列 De Figueiredo[63]用点变换法得到的结果作为推论：

定理 6·9 对于方程(6·50)，若存在 $\delta>0$，使当 $|x|\leqslant\delta$ 时有 $xF(x)\leqslant0$，且在原点邻近 $F(x)\neq0$；当 $x>\delta$ 时 $F(x)\geqslant0$；又 $\frac{F(x)}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $[\delta,+\infty)$ 内是 $|x|$ 的不减函数，则方程最多只有一个极限环.

注意：方程关于相似变换参数 λ 构成旋转向量场这一条件(指(6·45)与(6·48))实在太强了，因此以上这几个定理的适用范围是不广的．在本书的后半部读者将会看到方程

$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2,\quad \frac{dy}{dt}=x$$

关于参数 δ 构成广义旋转向量场，并且对任何 δ，如果方程存在极限环，可以证明它必定是唯一的．但此方程对于相似变换 $x'=kx$, $y'=ky$ 却并不构成旋转向量场.

V. Bendixson-Dulac 方法

这里指的是 §1 定理 1·12 当 $n=2$ 时的特例，即

定理 6·10 设对方程(6·47)存在环域 G，以及一次连续可微函数 $B(x,y)$（为简单计，设 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 亦为一次连续可微），使 $\frac{\partial}{\partial x}(BP)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ)$ 在 G 中保持常号，且不在 G 的任何子区域中恒等于零，则(6·47)最多只能有一条全部位于 G 中的闭轨线.

仿此，利用 §1 中的其他类似的定理还可以得到其他类似的判别法．可是这种方法的实用价值也很小．例如，对于 §1 例 5，我们可以取包含单位圆 $x^2+y^2=1$ 的任一圆环域作为 G，并取 $B\equiv1$．但对它的推广情况，即本节的例 2，应如何来取 G 和 $B(x,y)$ 就不很清楚了．由于 Bendixson-Dulac 方法对于证明多项式微分系统不存在极限环非常有用(这一点读者将在本书下半

部看到)，因此对于它在证明极限环的唯一性方面的用处继续进行深入的探讨看来还是有必要的.

VI. Levinson 与 Smith 方法

在 N. Levinson 与 O. K. Smith 前文[64]中他们首先用"证明发散量沿着任一极限环积分一周必定恒取正值(或负值)"的办法来证明唯一性. 这里自然须假定方程只有唯一的(指标为 +1)奇点，因而每一极限环，如果存在的话，都应包含此奇点在它的内部. 然后根据相邻极限环的相邻两侧必具不同的稳定性的熟知事实就可由前述命题导出极限环的唯一性. 但是他们所得到的这方面的第一个定理不但证明有缺陷，而且要验证定理中的条件也很不容易，故而适用范围不广. 1970 年，为了二次微分系统(即方程组(6·47)右方的 P, Q 都是 x, y 的二次多项式)定性研究的需要，同时也采取证明极限环存在性的 Филиппов 方法的优点，Г. С. Рычков[118] 得到一个用 Levinson-Smith 方法证明极限环的唯一性的比较好的结果. 此定理最近又被曾宪武[119, 120]所改进和推广，使能包括许多已知的唯一性定理把它们作为特例. 为简单计，下面只介绍[118]的定理，但其证明已远较本节其他唯一性定理困难得多了.

设在带域 $d_1<x<d_2$ $(d_1d_2<0)$ 中给定方程

$$\frac{dx}{dt}=y-F(x), \quad \frac{dy}{dt}=-g(x)$$

或

$$(F(x)-y)dy=g(x)dx, \tag{6·51}$$

其中 $xg(x)>0$ 当 $x\neq 0$, $g(x)$ 连续, $F(x)$ 二次连续可微. 引进 §5 的 Филиппов 变换(5·18), (5·19), 把(6·51)变成(z, y)右半平面中的两个方程:

$$(F_i(z)-y)dy=dz, \quad 0\leqslant z<z_{0i} \quad (i=1,2), \tag{6·52}$$

其中 $z_{0i}=\lim\limits_{x\to(d_i)} z_i(x)$, $z_i(x)$ 见(5·18), (5·19). 方程(6·51)的每一

条闭轨线 L 对应于唯一的一对曲线 L_1, L_2, 它们分别为(6·52)两方程的解, 从正 y 轴上同一点出发, 进入负 y 轴上的同一点, 且(顺时针方向)

$$\oint_L\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dt=\oint_L\frac{F'(x)}{g(x)}dy$$

$$=\int_{L_1}F_1'(z)dy-\int_{L_2}F_2'(z)dy \qquad (6\cdot53)$$

以 $y_1(z)$ 与 $y_2(z)$ 分别记 L_1 与 L_2 的方程, y_{11}, y_{21} 分别记这两曲线在对应的方程的铅直等倾线的上方的弧段; y_{12}, y_{22} 分别记它们在铅直等倾线下方的弧段(图 6·14). 以 A, B 分别记 L_1 与 L_2 与两等倾线的交点. 在曲线 $y=F_1(z)$ 上取一点 C, 使与 B 有相等的纵坐标, 即 $y_C=y_B=F_2(z_B)=F_1(z_C)$. 作方程 $(6\cdot52)_1$ 的过 C 点的积分线 $y=y_3(z)$, 把它向两方延长, 使与 $z=z^*$ 直线相交, 这里 z^* 是两等倾线 $y=F_1(z)$ 与 $y=F_2(z)$ 的交点的横坐标, 这种交点后面将假定是唯一存在的. 记

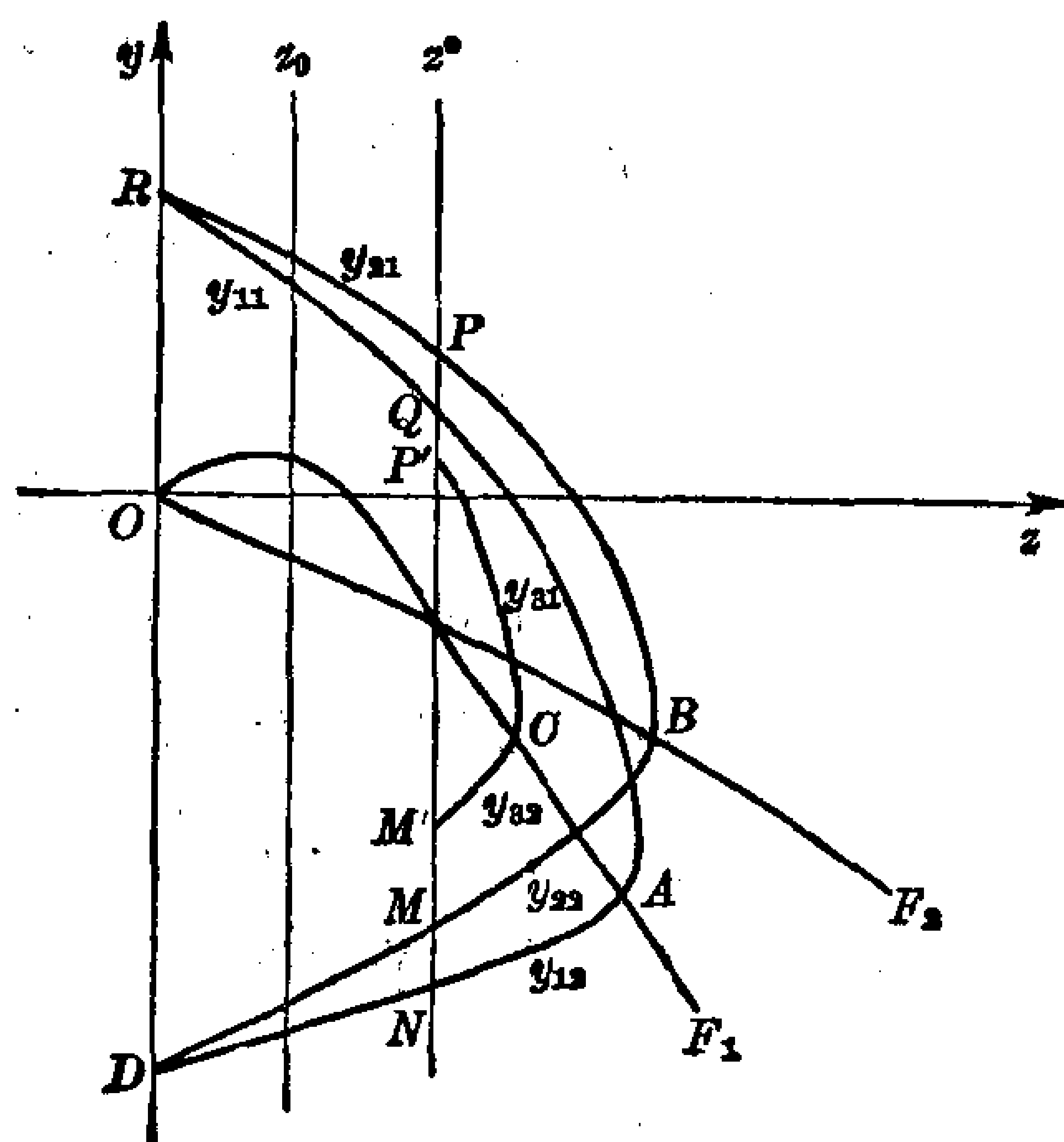


图 6·14

$$Y_{ij}(z)=y_{ij}(z)-F_i(z) \quad (i, j=1, 2),$$

又记 $y_i(z)$ 的反函数为 $z_i(y)$, 即 $y_i=F_i(z)$ 的反函数为 $z_i=\overline{F}_i(y)$.

定理 6·11 假设存在唯一的 z_0, z^*, $0<z_0<z^*<z_{01}$, 使下列条件成立:

1) $F_2'(z)<0$ 当 $0<z<z_{02}$[1];

1) 相当于 Liénard 方程的 $f(x)<0$ 当 $0<|x|<\delta$.

2) $(z_0-z)F'_1(z)>0$ 当 $z\neq z_0,\ 0<z<z_{01},\ F_1(z^*)=F_2(z^*)$;

3) $F''_1(z)<0$ 当 $0<z<z_{01}$[1];

4) $\frac{d}{dy}(\bar{F}_1(y)-\bar{F}_2(y))>0$, 即 $\frac{F'_2-F'_1}{F'_1F'_2}>0$, 当 $\beta<y<F_1(z^*)$,其中

$$\beta=\max_{i=1,2}(\lim_{z\to z_{0i}}F_i(z)),$$

则方程(6·51)不能有多于一个的极限环;如果存在,必为单重环.

此定理的证明将分成九个小段[2],其中要用到:

$$z_A>z^*,\quad z_B>z^*,$$

这一事实可由§5的定理5·4看出,因为在带域 $|z|\leqslant z^*$ 中不可能存在闭轨线.此外,如果 $F(0)\neq0$, 则可将 y 平移以使 $F(0)=0$.

(一) $y_A<y_B$, 即 L_1 的最右点低于 L_2 的最右点.

【证】 在 $y=F_2(z)$ 上取一点 A' 使 $y_{A'}=y_A$, A' 应在 A 的右方(图6·15). 现在把 $(6{\cdot}52)_1$ 的积分线 $y=y_{12}(z)$ 连同等倾线 $y=F_1(z)$ 一起向右平移,使 A 重合于 A' 而得 $y=y_{12}(z-\varDelta)$ 和 $y=F_1(z-\varDelta)$ (虚线),这里 $\varDelta=z_{A'}-z_A$. 这时 D 移到 D'. 若 $z_G=z_{D'}$, G 是 $y=y_{22}(z)$ 上的点,则 y_G 显然大于 $y_{D'}$, 即 G 在 D' 上方.又易见曲线 $\widehat{O'K'H'A'}$ 整个位于 $y=F_2(z)$ 的上方,亦即 $F_1(z-\varDelta)\geqslant F_2(z)$ 当 $z\in[\varDelta,z_{A'}]$. 由此可见,如果 $y_{A'}\geqslant y_B$, 则对两方程

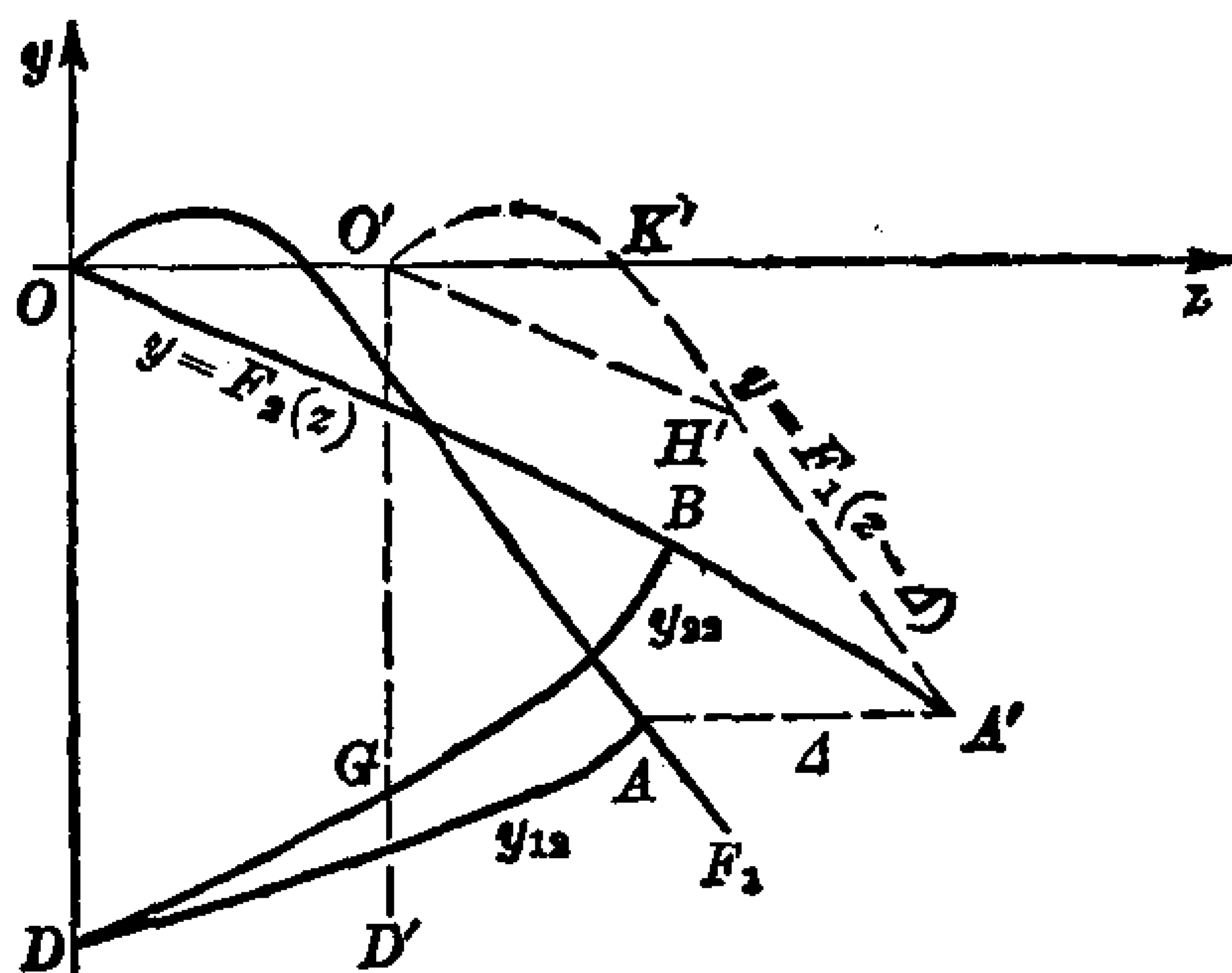


图 6·15

$$(F_2(z)-y)dy=dz \quad 和 \quad (F_1(z-\varDelta)-y)dy=dz,$$

应用微分不等式将得到 $y_{D'}\geqslant y_G$, 不可能;故必 $y_{A'}=y_A<y_B$.

1) 相当于定理6·4中的条件4),但成立的范围较小.

2) 请先看定理证明后面的注意.

（二） $Y_{21}<|Y_{22}|$ 当 $0<z<z_B$，几何意义很明显.

【证】 由 $Y_{21}=y_{21}-F_2, Y_{22}=y_{22}-F_2$ 易见 Y_{21} 与 $|Y_{22}|$ 分别是方程

$$\frac{dY}{dz}=-\frac{1+YF_2'(z)}{Y} \tag{a}$$

与

$$\frac{dY}{dz}=-\frac{1-YF_2'(z)}{Y} \tag{b}$$

的解，注意 $F_2'(z)<0$ 当 $0<z<z_B$，可知在同一点 (z, Y) 有

$$\left.\frac{dY}{dz}\right|_{(a)}-\left.\frac{dY}{dz}\right|_{(b)}=-2F_2'(z)>0.$$

现在如果存在 $z_3, 0<z_3<z_B$，使 $Y_{21}(z_3)\geqslant|Y_{22}(z_3)|$，则由微分不等式知必有 $Y_{21}>|Y_{22}|$ 在 (z_3, z_B) 上，从而

$$\frac{d}{dz}(Y_{21}(z)-|Y_{22}(z)|)$$
$$=-2F_2'(z)+(Y_{21}(z)-|Y_{22}(z)|)(|Y_{22}(z)|Y_{21}(z))^{-1}>0,$$

即 $Y_{21}(z)-|Y_{22}(z)|$ 随 z 的增加而增加，对 $z\in[z_3, z_B)$. 取极限，得

$$\lim_{z\to z_B}(Y_{21}(z)-|Y_{22}(z)|)=Y_{21}(z_B)-|Y_{22}(z_B)|>0,$$

与 $Y_{21}(z_B)=|Y_{22}(z_B)|$ 相矛盾，故 $Y_{21}(z)<|Y_{22}(z)|$ 当 $0<z<z_B$.

（三） $|Y_{12}|>|Y_{22}|>Y_{21}>Y_{11}$, $y_{21}-y_{11}>y_{22}-y_{12}$[1)] 当 $0<z\leqslant z^*$.

【证】 在 $(0, z^*)$ 上有 $F_2(z)<F_1(z)$，故由微分不等式知有 $y_{21}>y_{11}$，再由 Y_{21} 与 Y_{11} 的定义即得 $Y_{21}>Y_{11}$. 同理可证 $|Y_{12}|>|Y_{22}|$. 再用（二）中的结果即得（三）的前面一半.

其次，注意

$$\frac{d}{dz}(y_{21}-y_{11})=\frac{1}{F_2(z)-y_{21}}-\frac{1}{F_1-y_{11}}$$
$$=\frac{(y_{21}-y_{11})+(F_1-F_2)}{Y_{21}Y_{11}},$$

---

1) 此式即 $Y_{21}+|Y_{22}|>Y_{11}+|Y_{12}|$. 又此式本身表示 y_{21} 与 y_{11} 所构成的弯曲角域较宽，而 y_{22} 与 y_{12} 所构成的弯曲角域较窄.

由此可解出

$$y_{21}-y_{11}=\int_0^z \frac{F_1(u)-F_2(u)}{Y_{21}(u)Y_{11}(u)} \exp\left\{\int_u^z \frac{d\xi}{Y_{21}(\xi)Y_{11}(\xi)}\right\}du,$$

仿此可得

$$y_{22}-y_{12}=\int_0^z \frac{F_1(u)-F_2(u)}{Y_{22}(u)Y_{12}(u)} \exp\left\{\int_u^z \frac{d\xi}{Y_{22}(\xi)Y_{12}(\xi)}\right\}du.$$

注意 $F_1(u)-F_2(u)>0$ 以及

$$[Y_{22}(u)Y_{12}(u)]^{-1}<[Y_{21}(u)Y_{11}(u)]^{-1},$$

即得(三)的后面一半.

(四) $Y'_{11}(z)<0$.

【证】 $Y'_{11}=y'_{11}-F'_1=\dfrac{-1}{y_{11}-F_1}-F'_1(z)$. 当 $0<z\leqslant z_0$ 时 $F'_1(z)\geqslant 0$, 故 $Y'_{11}<0$. 当 $z_0<z\leqslant z_A$ 时记 $\alpha(z)=F_1-(F'_1)^{-1}$, 则

$$[F_1-\alpha(z)]^{-1}=F'_1>F'_1+F''_1(F'_1)^{-2}=\alpha'(z).$$

要证 $Y'_{11}<0$, 即证 $\dfrac{1}{F_1-y_{11}}<F'_1=\dfrac{1}{F_1-\alpha}$. 今 $\alpha'<\dfrac{1}{F_1-\alpha}$ 而 $y'_{11}=\dfrac{1}{F_1-y_{11}}$, 又 $y_{11}(z_A)=F_1(z_A)<F_1(z_A)-[F'_1(z_A)]^{-1}=\alpha(z_A)$, 故由比较定理知道当 $0<z<z_A$ 时 $y_{11}(z)$ 应位于 $\alpha(z)$ 的下方, 即 $y_{11}<\alpha$, 从而 $\dfrac{1}{F_1-y_{11}}<\dfrac{1}{F_1-\alpha}$, 亦即 $Y'_{11}<0$.

(五) $[(Y_{11})^{-1}+|Y_{12}|^{-1}]'_z>0$.

【证】 若 $0<z\leqslant z_0$, 则由 $F'_1>0$ 与(三)中的不等式可得

$$[(Y_{11})^{-1}+|Y_{12}|^{-1}]'_z=Y_{11}^{-3}+|Y_{12}|^{-3}$$
$$+F'_1(Y_{11}^{-2}-|Y_{12}|^{-2})>0.$$

又当 $z_0<z<z_A$ 时有 $|Y_{12}|'_z=-\dfrac{1}{|Y_{12}|}+F'_1<0$, 由此式以及(四)中的不等式即得

$$[(Y_{11})^{-1}+|Y_{12}|^{-1}]'_z=-(Y_{11})^{-2}Y'_{11}$$
$$-|Y_{12}|^{-2}\cdot|Y_{12}|'>0,$$

（六）
$$\Phi=-\int_0^{z^*}F_1'\left(\frac{1}{Y_{11}}+\frac{1}{|Y_{12}|}\right)dz+\int_0^{z^*}F_2'\left(\frac{1}{Y_{21}}+\frac{1}{|Y_{22}|}\right)dz>0.$$

我们先证明一个引理.

引理　设 $a>b>c>d>0$, 且 $b+c>a+d>0$, 则

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{d}>\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

【证】　因为 $(a-d)^2>(b-c)^2$, $b+c>a+d>0$, 故

$$\frac{(a-d)^2}{2(a+d)}>\frac{(b-c)^2}{2(b+c)}.$$

又易见　$$\frac{(b-c)^2}{2(b+c)}=\frac{(b+c)^2-4bc}{2(b+c)}>\frac{(a+d)(b+c)-4bc}{2(b+c)}.$$

合在一起,即得

$$\frac{(a-d)^2}{2(a+d)}=\frac{(a+d)^2-4ad}{2(a+d)}=\frac{a+d}{2}-\frac{2ad}{a+d}$$
$$>\frac{(a+d)(b+c)-4bc}{2(b+c)}=\frac{a+d}{2}-\frac{2bc}{b+c},$$

从而　$$\frac{bc}{b+c}>\frac{ad}{a+d}$$

即　$$\frac{b+c}{bc}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{a+d}{ad}=\frac{1}{a}+\frac{1}{d}.$$

【(六)的证明】　由(三)及引理推得

$$\frac{1}{Y_{11}}+\frac{1}{|Y_{12}|}>\frac{1}{Y_{21}}+\frac{1}{|Y_{22}|}.$$

注意 $F_2'<0$, 故知 $\Phi>\int_0^{z^*}(F_2'-F_1')\left(\frac{1}{|Y_{12}|}+\frac{1}{Y_{11}}\right)dz$. 由于(五)成立,故对上式右边应用中值定理即得

$$\Phi>[(Y_{11}(z^*))^{-1}+|Y_{12}(z^*)|^{-1}]\cdot[F_1(\xi)-F_2(\xi)]$$
$$\geqslant 0,\quad 0\leqslant\xi\leqslant z^*,$$

因为 $F_1>F_2$ 在 $(0,z^*)$ 上.

（七）
$$\int_{y_{22}(z^*)}^{y_{21}(z^*)}F_1'(z_3(y))dy\geqslant\int_{y_{12}(z^*)}^{y_{11}(z^*)}F_1'(z_1(y))dy.$$

【证】 考虑一确定的 y_0. 因为图 6·14 中的 $y_0=y_B>y_A$, 又 $F_1'(z)<0$, 故 C 在 A 的左上方, 积分曲线 $y_3(z)$ 在 $y_1(z)$ 左方, 于是 $z_3(y_0)<z_1(y_0)$. 由于 $F''(z)<0$, 故 $F_1'(z_3(y_0))>F_1'(z_1(y_0))$, 从而

$$\int_{y_{32}(z^*)}^{y_{31}(z^*)} F_1'(z_3(y))dy>\int_{y_{32}(z^*)}^{y_{31}(z^*)} F_1'(z_1(y))dy,$$

但
$$\int_{y_{12}(z^*)}^{y_{11}(z^*)} F_1'(z_1(y))dy=\int_{y_{32}(z^*)}^{y_{31}(z^*)} F_1'(z_1(y))dy$$

$$+\int_{y_{12}(z^*)}^{y_{32}(z^*)} F_1'(z_1(y))dy+\int_{y_{31}(z^*)}^{y_{11}(z^*)} F_1'(z_1(y))dy,$$

其中右边后两积分之值为负, 故(七)得证.

(八) $$\int_{y_{32}(z^*)}^{y_{31}(z^*)} F_1'(z_3(y))dy\leqslant\int_{y_{12}(z^*)}^{y_{11}(z^*)} F_2'(z_2(y))dy.$$

【证】 函数 $y_3(\overline{F}_1(F_2(z)))$ 与 $y_2(z)$ 依次为方程

$$(F_1-y)dy=\beta^*(z)dz \quad 及 \quad (F_2-y)dy=dz$$

的解, 其中

$$\beta^*(z)=F_2'(z)[F_1'(\overline{F}_1(F_2(z)))]^{-1}.$$

由定理的条件 4)并注意 $F_i'<0\ (i=1,2)$ 当 $z\in(z^*,z_C)$, 知道 $\beta^*(z)<1$. 又

$$y_3(\overline{F}_1(F_2(z_B)))=y_2(z_B)=F_2(z_B).$$

故当 $z^*\leqslant z<z_B$ 时必有

$$(-1)^i y_{3i}(\overline{F}_1(F_2(z)))>(-1)^i y_{2i}(z) \quad (i=1,2).$$

这可以象(二)中一样用反证法证得. 令 $z=\overline{F}_1(F_2(\xi))$, 则[1)]

$$F_1'(z)dz=F_1'(\overline{F}_1(F_2(\xi)))\cdot(\overline{F}_1(F_2(\xi)))'d\xi$$

$$=\frac{d}{d\xi}\{F_1(\overline{F}_1(F_2(\xi)))\}d\xi=F_2'(\xi)d\xi,$$

---

1) 注意: 这一技巧在本定理的证明中起了重要的作用, 在下一节中也将经常用到它.

因此
$$\int_{y_{32}(z^*)}^{y_{31}(z^*)} F_1'(z_3(y))dy = -\sum_{i=1}^{2}\int_{z^*}^{z_0}\frac{|F_1'(z)dz|}{|y_{3i}(z)-F_1(z)|}$$
$$=-\sum_{i=1}^{2}\int_{z^*}^{z_0}\frac{|F_2'(\xi)|d\xi}{|y_{3i}(F_1^{-1}(F_2(\xi)))-F_2(\xi)|}$$
$$\leqslant-\sum_{i=1}^{2}\int_{z^*}^{z_0}\frac{F_2'(z)dz}{|y_{2i}(z)-F_2(z)|}=\int_{y_{22}(z^*)}^{y_{21}(z^*)}F_2'(z_2(y))dy.$$
证毕.

(九) 由(六)到(八)便可容易地导出(6·53)式右边大于零. 因为由(七)与(八)可得
$$\int_{y_{22}(z^*)}^{y_{21}(z^*)}F_2'(z_2(y))dy\geqslant\int_{y_{12}(z^*)}^{y_{11}(z^*)}F_1'(z_1(y))dy,$$
即
$$L_2\int_{\overrightarrow{PBM}}F_2'dy\leqslant L_1\int_{\overrightarrow{QAN}}F_1'dy. \tag{6·54}$$
又(六)的不等式中间的第一项等于
$$\int_{\overrightarrow{RQ}}\frac{F_1'(z)dz}{F_1(z)-y}+\int_{\overrightarrow{ND}}\frac{F_1'(z)dz}{F_1(z)-y}$$
$$=\int_{\overrightarrow{RQ}}F_1'(z)dy+\int_{\overrightarrow{ND}}F_1'(z)dy; \tag{6·55}$$
(六)的不等式中间的第二项等于
$$-\int_{\overrightarrow{MD}}F_2'(z)dy-\int_{\overrightarrow{RP}}F_2'(z)dy,$$
而(六)相当于
$$\int_{\overrightarrow{MD}}F_2'(z)dy+\int_{\overrightarrow{RP}}F_2'(z)dy<\int_{\overrightarrow{RQ}}F_1'(z)dy+\int_{\overrightarrow{ND}}F_1'(z)dy. \tag{6·56}$$
把(6·54)与(6·56)相加, 即得
$$\int_{L_1}F_1'(z)dy>\int_{L_2}F_2'(z)dy \quad (顺时针方向),$$
而这就表示(6·53)式右方大于零. 定理证毕.

注意: 本定理的证明相当困难, 总结起来, 可以分为三段. 从(一)到(三)研究轨线弧 L_1 与 L_2 的几何性质及其相对位置; (四),

(五)为证明(六)作准备，因为对(六)中的积分应用第二中值定理时要用到(五)；最后，(六)到(八)的三个不等式都是比较 L_1 与 L_2 上相应弧段上的积分，在这里为了要比较 $\overset{\frown}{PM}$ 与 $\overset{\frown}{QN}$ 上的积分值，需要以过 C 点的方程$(6 \cdot 52)_1$ 的积分线段 $\widehat{M'P'}$ 上的积分值为媒介，而这也就是证明的关键所在.

曾宪武[120]容许 $y=F_2(z)$不是单调[1)]，而是可以有任何有限个极值点. 因而证明时又要更困难些.

虽然估计发散量沿极限环积分一周的值是正还是负，一般来说并不容易，但对某些方程却能较容易地作出这种估计. 今以下述 H. B. Медведев[121] 的定理为例.

定理 6·12 设在方程

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}^{k+1}+g(x)=0 \tag{6·57}$$

中 k 为偶数，$xg(x)>0$ 当 $x\neq 0$，又存在 $x_1<0<x_2$ 使 $f(x_1)=f(x_2)=0, f(x)<0$ 当 $x\in(x_1, x_2)$，$f(x)>0$ 当 $x<x_1$ 及 $x>x_2$. 又 $G(x_1)=G(x_2), G(\pm\infty)=+\infty$，则方程组

$$\frac{dx}{dt}=y, \quad \frac{dy}{dt}=-f(x)y^{k+1}-g(x) \tag{6·58}$$

不能有多于一个的极限环. 如果有，必为稳定单重环.

【证】 取 $\lambda(x, y)=y^2+2G(x)$，则 $\lambda(x, y)=C$ 表示闭曲线族，且

$$\frac{d\lambda}{dt}=-2f(x)y^{k+2},$$

故知闭轨线若存在，必位于闭曲线 $\lambda(x, y)=2\alpha=2G(x_1)$的外部，即沿着任一闭轨线恒有 $\lambda(x, y)-2\alpha>0$. 又由假设条件知道恒有 $y^k(G-\alpha)f\geqslant 0$. 现在把不等式

$$0\leqslant\frac{4y^k(G-\alpha)f}{\lambda-2\alpha}=2y^kf(x)+\frac{d}{dt}\ln(\lambda(x, y)-2\alpha)$$

---

1) 注意，[120]中的 y 相当于定理 6·11 中的 $-y$，故两铅直等倾线的画法与图 6·14 不同.

沿着闭轨线积分一周(t 增加的方向)，即得

$$\int_0^T y^k f(x)\,dt = -\oint \operatorname{div}(P, Q)\,dt > 0,$$

于是立刻得到我们所需要证明的.

用直接估计发散量的积分的办法来证明唯一性的还有[16, 106, 110, 123, 124]等工作,这将在§14中再介绍.

VII. Андронов 与 Леонтович 的方法

此法类似于 Ляпунов 判别中心点与焦点的方法，它只适用于焦点的小邻域;实际上,它是§3定理3·7的推广.

研究含参数 λ 的解析系统,假设它的一次近似方程当 $\lambda=0$ 时以原点为中心点,那末经过仿射变换以后可将方程化为

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=a(\lambda)x-b(\lambda)y+P_2(x,y,\lambda),\\ \frac{dy}{dt}&=b(\lambda)x+a(\lambda)y+Q_2(x,y,\lambda),\end{aligned}\tag{6·59}$$

其中 P_2, Q_2 是二次以上的项. 一次近似方程的特征根为 $a(\lambda)\pm ib(\lambda)$, $a(0)=0$. 不妨设 $b(0)>0$, $b(0)<0$ 的情况可类似地讨论. 引进极坐标,消去 dt,并且把方程右边展开为 r 的幂级数，得到

$$\frac{dr}{d\theta}=rR_1(\theta,\lambda)+r^2R_2(\theta,\lambda)+r^3R_3(\theta,\lambda)+\cdots,\tag{6·60}$$

其中 $R_1(\theta,\lambda)=\dfrac{a(\lambda)}{b(\lambda)}$, $R_i(\theta, \lambda)$是 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 的多项式. 今求(6·60)的形如

$$\begin{aligned}r&=r_0u_1(\theta,\lambda)+r_0^2u_2(\theta,\lambda)+r_0^3u_3(\theta,\lambda)+\cdots\\ &=f(\theta,r_0,\lambda)\end{aligned}\tag{6·61}$$

的解，这里 r_0 是 r 的初值; 我们得到诸函数 $u_k(\theta,\lambda)$ 所满足的方程

$$\frac{du_1}{d\theta}=u_1R_1(\theta,\lambda),\quad \frac{du_2}{d\theta}=u_2R_1(\theta,\lambda)+u_1^2R_2(\theta,\lambda),\cdots\tag{6·62}$$

以及初值条件

$$u_1(0,\lambda)=1,\quad u_k(0,\lambda)=0\quad(k=2,3,\cdots).\tag{6·63}$$

由(6·61)看出 $r=f(\theta,r_0,\lambda)$ 为周期解的充要条件是

$$f(2\pi,r_0,\lambda)-r_0=[u_1(2\pi,\lambda)-1]r_0$$
$$+u_2(2\pi,\lambda)r_0^2+u_3(2\pi,\lambda)r_0^3+\cdots=0,$$

约去因子 $r_0\neq 0$, 并改记上面的超越方程为

$$\varphi(\lambda,r_0)=v_1(\lambda)+v_2(\lambda)r_0+v_3(\lambda)r_0^2+\cdots=0.\tag{6·64}$$

要研究当 λ 变动时原点附近是否出现闭轨线, 就是要研究 $\varphi(\lambda,r_0)=0$ 对 r_0 有无实根. 把 $\varphi(\lambda,r_0)=0$ 看成是 (λ,r_0) 平面上的曲线, 显然它必通过原点. 又由 $u_2(\theta,\lambda)$ 所满足的方程易见 $v_2(0)=u_2(2\pi,0)=0$. 现在假设

$$a'(0)\neq 0,\quad v_3(0)\neq 0,\tag{6·65}$$

我们来证明: 当 $\lambda\neq 0$ 而取适当的符号时, 方程(6·59)在原点附近存在唯一的极限环. 注意,

$$v_1(\lambda)=u_1(2\pi,\lambda)-1=e^{\frac{a(\lambda)}{b(\lambda)}2\pi}-1,$$

$$v_1'(\lambda)=2\pi\frac{b(\lambda)a'(\lambda)-a(\lambda)b'(\lambda)}{b^2(\lambda)}e^{2\pi\frac{a(\lambda)}{b(\lambda)}},$$

可知
$$v_1'(0)=\frac{2\pi a'(0)}{b(0)}\neq 0,$$

从而
$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right|_{(0,0)}=v_1'(0)\neq 0,$$

故在原点附近可由(6·64)解出 λ 为 r_0 的单值函数 $\lambda=\lambda(r_0)$. 其次,

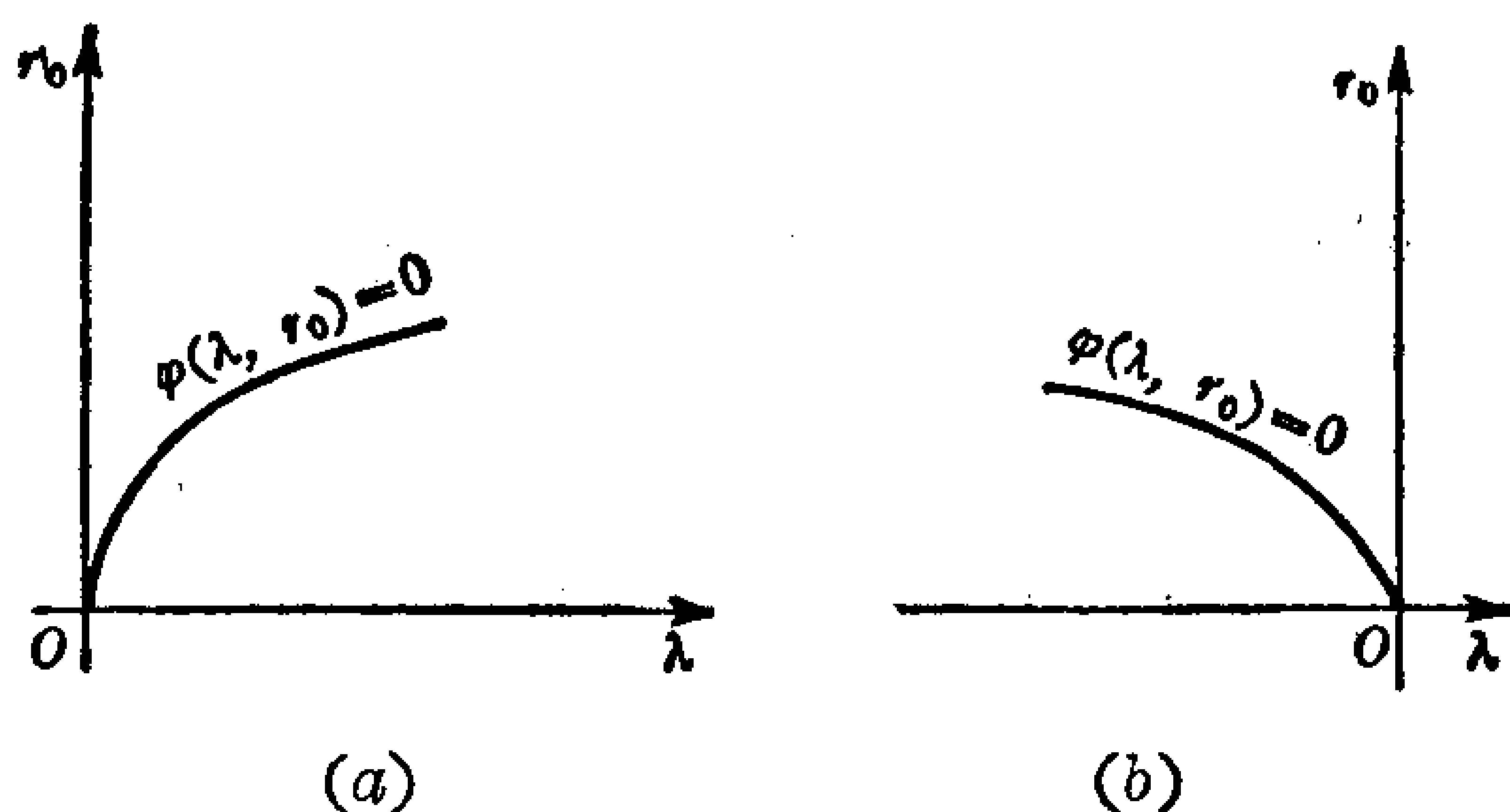
$$\left.\frac{d\lambda}{dr_0}\right|_{(0,0)}=\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial r_0}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right]_{(0,0)}=-\frac{v_2(0)}{v_1'(0)}=0,$$

$$\left.\frac{d^2\lambda}{dr_0^2}\right|_{(0,0)}=-2v_3(0)/v_1'(0)=-b(0)v_3(0)/\pi a'(0)\neq 0.$$

故 $\lambda=\lambda(r_0)$ 在 $(0,0)$ 取到极值.

下面就 $a'(0)$ 与 $v_3(0)$ 的不同符号分为四种情况来讨论:

1. $a'(0)>0$, $v_3(0)<0$, 则 $\lambda(r_0)$ 在原点有极小值(图6·16(a)). 由于这时 $\left.\frac{d^2\lambda}{dr_0^2}\right|_{(0,0)}>0$, 故 $\frac{d\lambda}{dr_0}$ 在 $r_0=0$ 的上方附近



(a)　　　　(b)

图 6·16

增加，故$\lambda=\lambda(r_0)$的反函数在第一象限中原点附近亦为单值，即对每一$\lambda>0$足够小，有唯一的$r_0>0$满足$\varphi(\lambda, r_0)=0$，即方程(6·59)在原点附近有唯一的极限环．又由$a'(0)>0$, $a(0)=0$知当$\lambda<0$时$a(\lambda)<0$，原点为稳定焦点；$\lambda(0)>0$时$a(\lambda)>0$，原点为不稳定焦点，所以极限环是稳定的．

2．$a'(0)>0$, $v_3(0)>0$，这时$\lambda(r_0)$在原点有极大值（图6·16(b)），当$\lambda>0$时原点为不稳定焦点，$\lambda<0$时为稳定焦点，故极限环应为不稳定，在$\lambda<0$时出现．

3．$a'(0)<0$, $v_3(0)>0$，当$\lambda>0$出现不稳定极限环．

4．$a'(0)<0$, $v_3(0)<0$，当$\lambda<0$时出现稳定环．

在这里我们只讨论了含一个参变量的方程(6·59)在原点附近出现极限环的条件．以后在§9中还要研究含多个参变量的方程的同一问题．

习　题

1．证明：当$h_1\geqslant1>h_2>0$时方程(6·5)存在唯一的(稳定)极限环．

2．若在方程(6·44)中$g(x)\equiv x$, $f(x, v)=0$表示实椭圆，其中心到原点的距离小于原点到椭圆的距离，则方程存在唯一的极限环．

3．证明若在方程(6·26)中$g(x)\equiv x$, $F(x)$为不高于三次的多项式，则或是不存在极限环，或是存在唯一的极限环．

4．试研究定理6·11能包含它前面的那些定理作为其特例．

5. 证明当 $0<\mu<1$ 时方程(6·35)的极限环必与两直线 $x=\pm\sqrt{1-\mu}$ 相交,又当 $\mu\leqslant 0$ 或 $\mu\geqslant 1$ 时方程无闭轨线.

6. 证明方程(6·29)中的函数 $f(x)$ 当 $C>0$ 足够大时有一个正零点和一个负零点.

7. 证明方程 $\ddot{x}+h\dot{x}+x=k$, 当 $\dot{x}>0$; $=0$, 当 $\dot{x}<0$ (其中 $h>0$, $k>0$ 为常数)有唯一的周期解,它是稳定的.

8. 设方程(6·19)右方的 $\varphi(\rho, \omega)$ 为连续,若在某一区域中存在连续函数 $\Psi(\rho)$, 使对每一 $\omega=\omega_0$, $\varphi(\rho, \omega_0)\Psi(\rho)$ 是 ρ 的单调函数,则在此区域内方程(6·19)的闭轨线不多于一条.

9. 试用上题证明:若在方程

$$\frac{dx}{dt}=-y-F(x), \quad \frac{dy}{dt}=x$$

中 $F(x)$ 连续可微, $F(0)=0$, 且当 $x\neq 0$ 时 $F'(x)-\dfrac{F(x)}{x}\geqslant 0$ (或 $\leqslant 0$), 则方程最多只有一条闭轨线. 试解释这些条件的几何意义.

10. 设 $f(x, y)$, $F(x, y)$ 在矩形 R: $c\leqslant x\leqslant c+a$, $|y-\beta|\leqslant b$ 中有定义,且 $f(x, y)<F(x, y)$. 设 $y(x)$ 与 $Y(x)$ 在 $(c, c+\delta)$, $0<\delta<a$ 中为可微函数,且满足方程

$$y'(x)=f(x, y(x)) \quad 与 \quad Y'(x)=F(x, Y(x))$$

以及初始条件

$$y(c)=\beta, \ Y(c)=\beta,$$

求证 $y(x)<Y(x)$ 当 $c<x\leqslant c+\delta$. [125].

11. 设在方程 $\ddot{x}+\varphi(\dot{x})+\psi(\dot{x})x=0$ 中 φ, ψ 为连续,且能保证初值问题的解的存在唯一性. 又 $\psi(y)>0$, $\displaystyle\int_0^{\pm\infty}\frac{dy}{\psi(y)}=\pm\infty$, $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)<0$, 且当 y 在 $(-\infty, 0)$ 与 $(0, +\infty)$ 中增加时 $\dfrac{\psi}{y}\left(\dfrac{\varphi}{\psi}\right)'$ 不减少,则方程至多存在一个极限环[103].

12. 证明 $\ddot{x}+\rho(e^x-2)\dot{x}+x=0$ 当 $0<\rho<1$ 时存在唯一的极限环,它是稳定环,当 $\rho\geqslant 1$ 时方程不存在周期解[79].

§7. 多个极限环的存在性

如果一方程组存在多于一个极限环，则它们自然可能有许多不同的分布方式。例如若存在三个极限环，便可能有如图7·1所绘的四种不同分布方式。本节所讨论的是第一种方式，因为我们研究的方程都只有唯一的奇点，而极限环内部必须包含奇点。关于其他几种分布方式将在本书的后半部对二次微分系统来进行讨论。

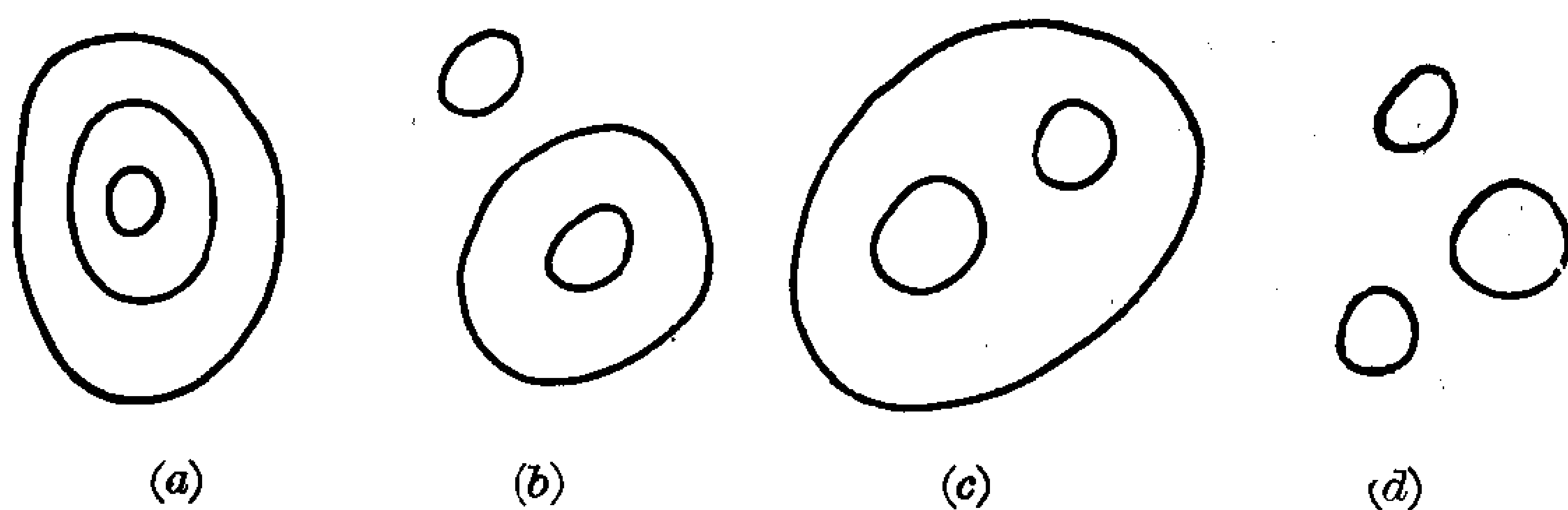


图 7·1

早在1958年 М. И. Войлоков[127] 已指出，对函数 $y=F(x)$ 的几何图形加以适当要求时，就能保证方程

$$\frac{dx}{dt}=y-F(x),\quad \frac{dy}{dt}=-x \tag{7·1}$$

恰有 n 个极限环，n 是任意给定的正整数。不过，由于方程中出现的参数过多，该文对于判别一个具体给定的方程(7·1)是否恰有 n 个极限环，是比较困难的。1966年 Г. С. Рычков[128] 也给出一个保证方程

$$\frac{dx}{dt}=y-F(x),\quad \frac{dy}{dt}=-g(x) \tag{7·2}$$

至少存在 n 个极限环的条件. 然而就极限环问题来说, 更有价值的工作是: 当方程给定时, 如何来判别它有无极限环, 如果有的话, 到底有几个? 1975 年, Рычков[129]证明: 当(7·1) 中的 $F(x)=a_2x^5+a_1x^3+a_0x$ 时, 方程最多只有两个极限环, 并指出, 如果 $F(x)=\varepsilon(x^5-\mu x^3+x)$, 其中 $\varepsilon>0$, $\mu>2.5$, 则(7·1)便满足他的前一文[128]中的条件, 因而此时方程恰好存在两个极限环. 这一结果可说是极限环唯二性的最早的结果. 其证明思想是研究发散量沿着一条环绕奇点(0, 0)的螺线 L 从(例如正 y 轴上)一点 a_1 重又回到正 y 轴上另一点 a_2 的积分值 $h(L)$ 关于 a_1 的纵坐标的变化率 $\frac{dh}{da_1}$, 并证明 $\frac{dh}{da_1}$ 定号, 例如恒正. 于是根据相邻两环的相邻两侧应有不同的稳定性立刻知道这时方程最多只能存在两个环, 发散量沿着内部一环的积分值 <0(或 $\leqslant 0$), 沿着外部一环的积分值 $\geqslant 0$(或 >0). 证明时用到 §6 证明定理 6.11 第八段所用的技巧.

自 1979 年以后, 我国黄克成[130], 张芷芬, 何启敏[131, 132], 陈秀东[133], 黄启昌, 杨思讱[134], 丁孙荭[135]等先后给出方程(7·2)至多或至少有 n 个极限环的充分条件, 其中张芷芬[131]的结果解决了前人未解决的一个猜想.

在以下的讨论中都假设 $F(x)\in C^1$, $F(0)=0$; $g(x)\in C$, $xg(x)>0$ 当 $x\neq 0$. 易见这时(0, 0)为(7.1)的唯一奇点. 如前记 $F'(x)=f(x)$, $G(x)=\int_0^x g(\xi)d\xi$. 现在先介绍[130]的工作.

引理 7·1 设存在常数 a, a', b, b' ($b'<a'<0<a<b$), 使

1) $F(x)\geqslant F(a)$ 当 $0\leqslant x\leqslant a$, 且在 $[a, b]$ 上 $F(x)$ 单调不增;

2) $F(x)\leqslant F(a')$ 当 $a'\leqslant x\leqslant 0$, 且在 $[b', a']$ 上 $F(x)$ 单调不增;

3) $F(x)\neq 0$ 当 $a'\leqslant x\leqslant a$;

则在带域 $b'\leqslant x\leqslant b$ 内方程(7·2)最多只有一个极限环能同时与直线 $x=a$, $x=a'$ 相交.

【证】 假设在带域 $b'\leqslant x\leqslant b$ 中有两个极限环 $\Gamma_1\subset\Gamma_2$，它们都同时和直线 $x=a$, $x=a'$ 相交(图 7·2)，其中 Γ_1 与 $y=F(x)$ 的交点为 P_1 与 P_1'. 设 $y_{P_1}=-N$, $y_{P_1'}=M$. 记

$$\lambda_1(x,\ y)=\frac{(y+N)^2}{2}+G(x),\quad \lambda_2(x,\ y)=\frac{(y-M)^2}{2}+G(x),$$

且以后简记 $\lambda_i(x,\ y)=\lambda_i(A)$，如果 $(x,\ y)$ 是 A 的坐标.

分别计算 $\lambda_1(x,\ y)$, $\lambda_2(x,\ y)$ 关于 t(沿着(7·2)的轨线)的全导数:

$$\frac{d\lambda_1}{dt}=-g(x)\left[N+F(x)\right],\tag{7·3}$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt}=g(x)\left[M-F(x)\right].\tag{7·4}$$

由条件 2) 可知: $F(x)\leqslant M$ 当 $x_{P_1'}\leqslant x\leqslant 0$; $F(x)\geqslant M$ 当 $b'\leqslant x\leqslant x_{P_1'}$. 考察 Γ_1 与 Γ_2 位于左半平面的部分，因为

$$\begin{aligned}\int_{\overset{\frown}{B_2'A_2}}d\lambda_2&=\int_{\overset{\frown}{B_2'A_2}}\frac{g(x)\left[M-F(x)\right]}{y-F(x)}\,dx\\&\geqslant\int_{\overset{\frown}{P_1'A_1}}\frac{g(x)\left[M-F(x)\right]}{y-F(x)}\,dx=\int_{\overset{\frown}{P_1'A_1}}d\lambda_2.\end{aligned}\tag{7·5}$$

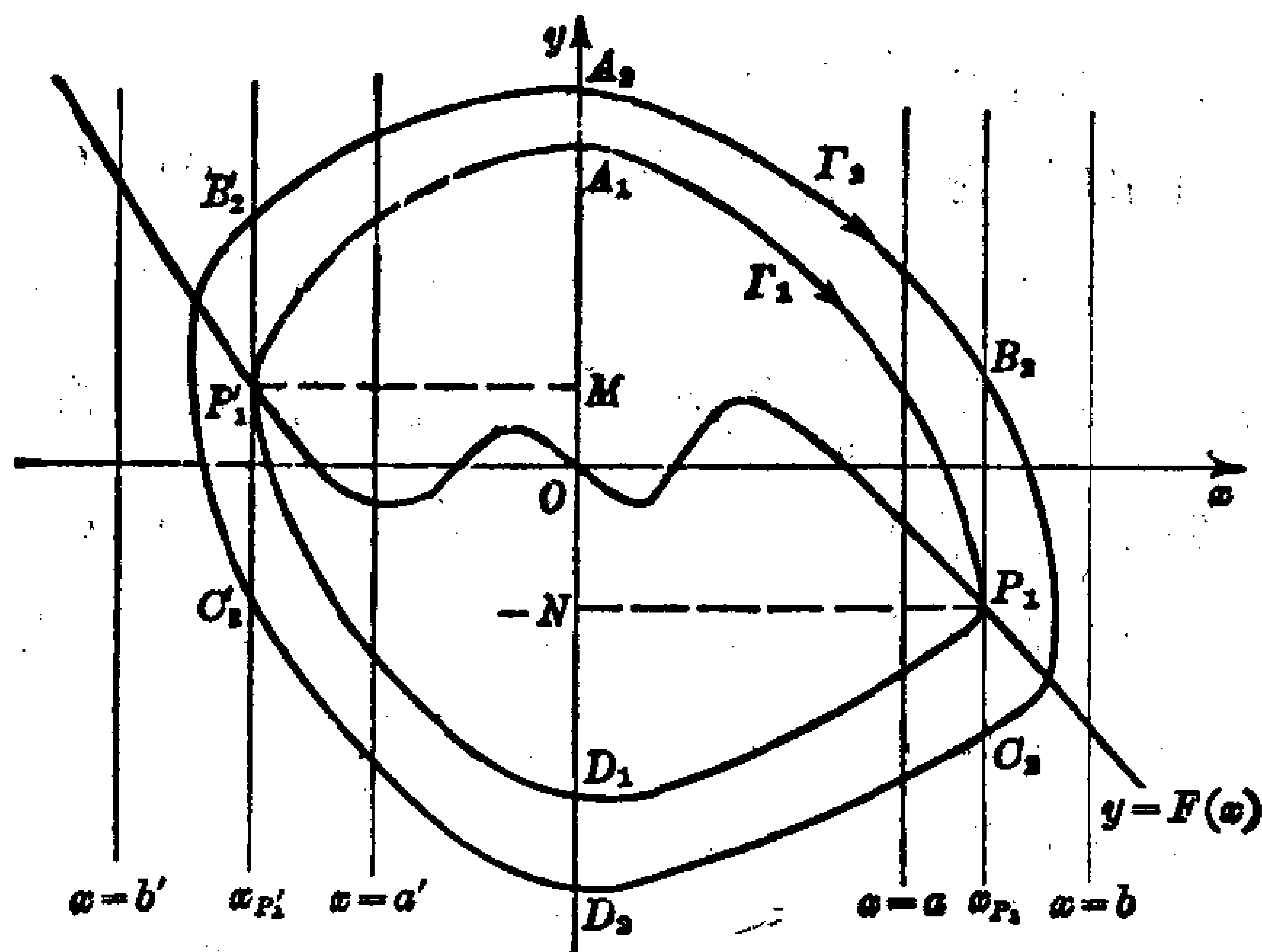


图 7·2

同理可见
$$\int_{\overset{\frown}{D_2C_2'}} d\lambda_2 \geqslant \int_{\overset{\frown}{D_1P_1'}} d\lambda_2,$$
又
$$\int_{\overset{\frown}{C_2'B_2'}} d\lambda_2 = \int_{\overset{\frown}{C_2'B_2'}} [F(x)-M]\,dy \geqslant 0. \tag{7·6}$$
由(7·5)及(7·6)立刻看出
$$\lambda_2(A_2)-\lambda_2(D_2) \geqslant \lambda_2(A_1)-\lambda_2(D_1),$$
即
$$(y_{A_2}-M)^2-(y_{D_2}-M)^2 \geqslant (y_{A_1}-M)^2-(y_{D_1}-M)^2. \tag{7·7}$$
类似地可证
$$\lambda_1(D_2)-\lambda_1(A_2) \geqslant \lambda_1(D_1)-\lambda_1(A_1),$$
即
$$(y_{D_2}+N)^2-(y_{A_2}+N)^2 \geqslant (y_{D_1}+N)^2-(y_{A_1}+N)^2. \tag{7·8}$$
由条件 3) 可知(7·7)与(7·8)两不等式中的等号不能同时成立. 把这两不等式相加, 并经过简化, 可得
$$(y_{A_1}-y_{A_2})(M+N) > (y_{D_1}-y_{D_2})(M+N).$$
但 $M+N\geqslant 0$, $y_{A_1}-y_{A_2}<0$, $y_{D_1}-y_{D_2}>0$, 这是个矛盾. 引理证毕.

对应于引理 7·1, 我们显然有

引理 7·2 设存在常数 $b'<a'<0<a<b$, 使

1) $F(x)\leqslant F(a)$ 当 $0\leqslant x\leqslant a$, 且在$[a, b]$上 $F(x)$单调不减;

2) $F(x)\geqslant F(a')$当 $a'\leqslant x\leqslant 0$, 且在$[b', a']$上 $F(x)$单调不减;

3) $F(x)\neq 0$ 当 $a'\leqslant x\leqslant a$;

则在带域 $b'\leqslant x\leqslant b$ 内方程 (7·2) 最多只有一个极限环能同时与直线 $x=a$, $x=a'$ 相交.

现在再证明另一引理.

引理 7·3 设存在常数 $N\geqslant 0$, $a>0$, $b'<0$, 使

1) $F(x)\geqslant -N$ 当 $0\leqslant x\leqslant a$;

2) $F(b')\leqslant -N-\sqrt{2G(a)}$,

则方程(7.2)的与直线 $x=b'$ 相交的极限环必与直线 $x=a$ 相交.

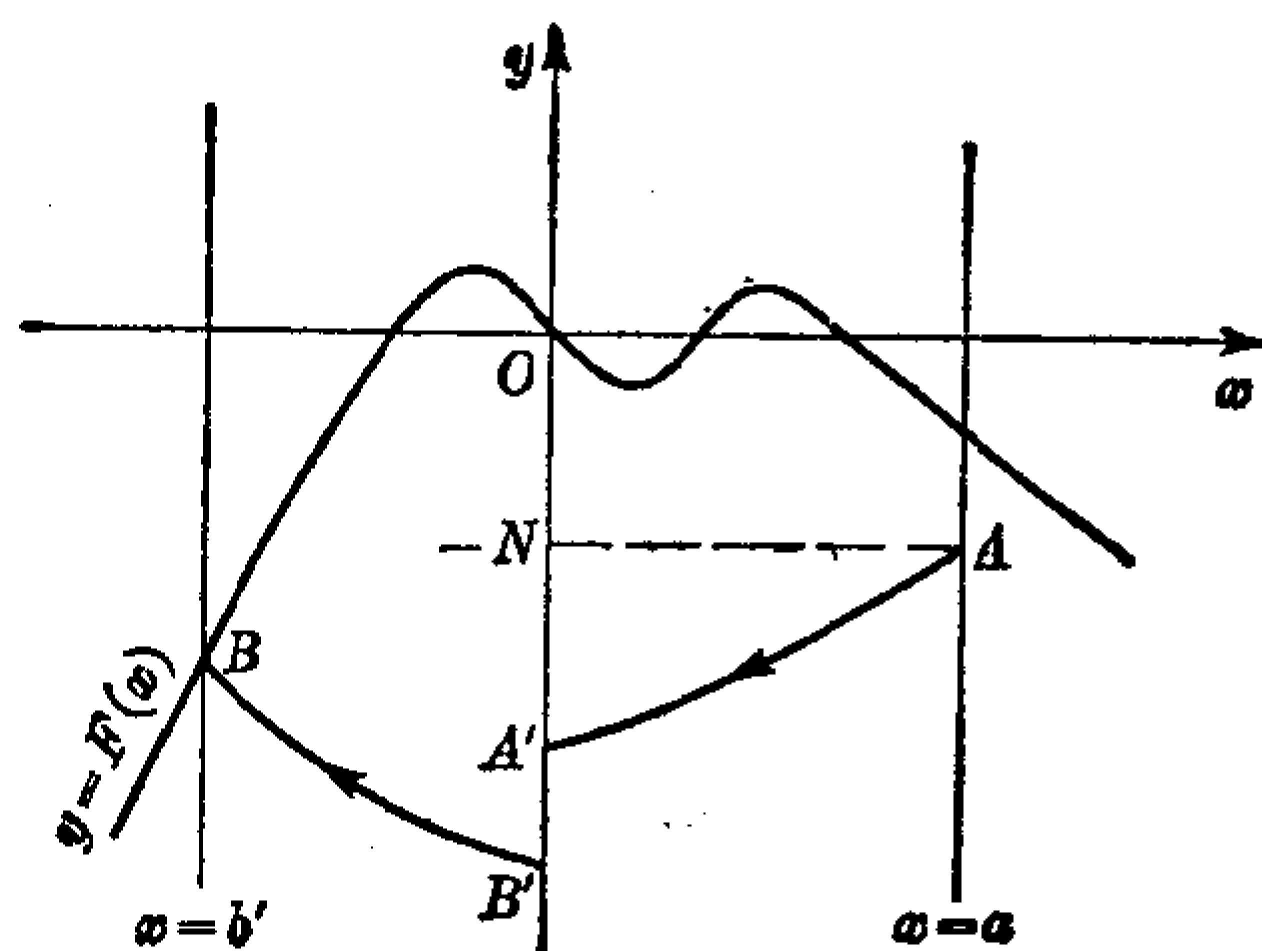


图 7·3

【证】 设由 $A(a, -N)$ 出发的轨线当 t 增加时与负 y 轴交于 A', 由 $B(b', F(b'))$ 出发的轨线当 t 减少时与负 y 轴交于 B'(图 7·3). 由条件 1) 及 (7·3) 式可知 $y_{A'} \geqslant -N-\sqrt{2G(a)}$, 而 $y_{B'}<y_B=F(b')$, 因此 $y_{B'}<y_{A'}$, 即 B' 在 A' 下方. 由此立刻看出引理的结论成立.

与此类似,还成立下面三个引理.

引理 7·4 设存在常数 $M\geqslant 0$, $a>0$, $b'<0$, 使

1) $F(x)\leqslant M$ 当 $0\leqslant x\leqslant a$;

2) $F(b')\geqslant M+\sqrt{2G(a)}$;

则方程(7.2)的与直线 $x=b'$ 相交的极限环必与直线 $x=a$ 相交.

引理 7·5 设存在常数 $N\geqslant 0$, $a'<0$, $b>0$, 使

1) $F(x)\geqslant -N$ 当 $a'\leqslant x\leqslant 0$;

2) $F(b)\leqslant -N-\sqrt{2G(a')}$,

则方程(7·2)的与直线 $x=b$ 相交的极限环必与直线 $x=a'$ 相交.

引理 7·6 设存在常数 $M\geqslant 0$, $a'<0$, $b>0$, 使

1) $F(x)\leqslant M$ 当 $a'\leqslant x\leqslant 0$;

2) $F(b)\geqslant M+\sqrt{2G(a')}$,

则方程(7·2)的与直线 $x=b$ 相交的极限环必与直线 $x=a'$ 相交.

由上列引理不难给出方程(7·2)至多有 n 个极限环的充分条件, 例如

定理 7·1 设在方程(7·2)中 $F(x)$ 与 $g(x)$ 满足条件:

1) $F(-x)=-F(x)$, $g(-x)=-g(x)$;

2) 在区间$(0, b)$中$f(x)$仅有n个零点：$0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n<b$，且

$$F(\alpha_0)=0,\ F(\alpha_1)<0,\quad F(\alpha_k)F(\alpha_{k+1})<0\quad(k=1, 2, \cdots, n),$$

其中$\alpha_{n+1}=b$；

3) $$(-1)^k F(\alpha_k)<(-1)^k F(\alpha_{k+2}),$$

$$(-1)^{k+1}F(\alpha_{k+1})\geqslant(-1)^k F(\alpha_k)+\sqrt{2G(\beta_{k+1})}$$

$$(k=0, 1, 2, \cdots, n-1),$$

其中
$$\beta_{k+1}\in(\alpha_{k+1},\ \alpha_{k+2}),$$
且
$$F(\beta_{k+1})=F(\alpha_k),$$
则在带域$|x|\leqslant b$内方程(7·2)最多只有n个环.

【证】 由于$F(x)$，$g(x)$均为奇函数，故方程(7·2)的闭轨线关于坐标原点对称. 由定理的条件可知

$$\left.\begin{aligned}&(-1)^{k+1}F(x)\text{单调增加，当}x\in[\beta_k,\ \alpha_{k+1}],\\ \text{且}\quad&(-1)^k F(x)\geqslant(-1)^k F(\beta_k),\ \text{当}x\in[0,\ \beta_k],\end{aligned}\right\}\qquad(7\cdot9)$$

其中$k=1, 2, \cdots, n$；$\beta_1\in(\alpha_1,\ \alpha_2)$且$F(\beta_1)=0$.

易见在带域$|x|\leqslant\beta_1$内(7·2)无极限环. 由(7·9)式，条件3)以及引理7·1—7·4可知：在带域$|x|\leqslant\alpha_2$内，(7·2)最多只有一个极限环. 与直线$x=\alpha_k$相交的极限环必与直线$x=-\beta_k$相交($k=2, 3, \cdots, n$)，在带域$|x|\leqslant\alpha_{k+1}$中最多只有一个极限环能与直线$x=-\beta_k$相交，因而在带域$|x|\leqslant\alpha_{k+1}$中最多只有一个极限环与直线$x=\alpha_k$相交. 由此可见在带域$|x|\leqslant b$中最多有方程(7·2)的n个极限环.

在§5中已指出，方程

$$\frac{dx}{dt}=y+x^2\sin x,\quad \frac{dy}{dt}=-x$$

及
$$\frac{dx}{dt}=y+x^2\sin x,\quad \frac{dy}{dt}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

在带域$|x|\leqslant n\pi+\frac{\pi}{2}$内都至少有$n$个极限环. 现在由定理7·1

又知道上述每一方程在 $|x|\leqslant n\pi+\frac{\pi}{2}$ 中最多只有 n 个极限环. 因此,每一方程在这带域中恰有 n 个极限环.

由引理 7·1—7·6 知道,即使 $F(x)$, $g(x)$ 不是奇函数,要得到 (7·2) 至多存在 n 个极限环的充分条件也是不难的.

下面再介绍 Рычков[129] 及张芷芬[254],先证几个引理.

引理 7·7　若存在常数 $0\leqslant\alpha<\xi<\beta$, 使

1) $F(\alpha)=F(\beta)$;

2) $f(x)>0(f(x)<0)$ 当 $x\in(\alpha,\ \xi)$,

　$f(x)<0(f(x)>0)$ 当 $x\in(\xi,\ \beta)$,

则沿着方程

$$\frac{dx}{dt}=v,\quad \frac{dv}{dt}=-x-f(x)v \tag{7·10}$$

的任一位于带域 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 中的轨线弧 s: $v=v(x)\geqslant 0,\ x\in[\alpha,\ \beta]$ 有

$$\int_s -f(x)dt>0\quad\left(\int_s -f(x)\,dt<0\right).$$

【证】　我们只考虑括号外的情况. 记 $z=F(x)$, $x\in[\alpha,\ \beta]$. 设 $F(\alpha)=F(\beta)=a$, $F(\xi)=b$. 由条件 2) 知存在反函数

$$x=x_1(z)\in[\alpha,\ \xi],\ x=x_2(z)\in[\xi,\ \beta],$$

且 $x_1(a)=\alpha$, $x_1(b)=\xi$; $x_2(a)=\beta$, $x_2(b)=\xi$. 于是得

$$\begin{aligned}\int_s f(x)\,dt&=\int_\alpha^\beta\frac{f(x)dx}{v(x)}=\int_\alpha^\xi\frac{f(x)}{v(x)}\,dx+\int_\xi^\beta\frac{f(x)dx}{v(x)}\\&=\int_a^b\frac{dz}{v(x_1(z))}+\int_b^a\frac{dz}{v(x_2(z))}\\&=\int_a^b\left[\frac{1}{v(x_1(z))}-\frac{1}{v(x_2(z))}\right]dz<0,\end{aligned} \tag{7·11}$$

因为

$$v(x_2(z))-v(x_1(z))=\int_{x_1(z)}^{x_2(z)}\frac{dv}{dx}\,dx=\int_{x_1(z)}^{x_2(z)}-\frac{x}{v(x)}\,dx<0$$

$$\text{当 } z\in[a,\ b]. \tag{7·12}$$

引理证毕.

同理可证

引理 7·8 若存在常数 $\alpha<\xi<\beta\leqslant 0$ 使

1) $F(\alpha)=F(\beta)$;

2) $f(x)>0 \quad (f(x)<0)$ 当 $x\in(\alpha, \xi)$,

$f(x)<0 \quad (f(x)>0)$ 当 $x\in(\xi, \beta)$,

则沿着方程(7·10)的任一位于带域 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 中的轨线弧 s: $v=v(x)\geqslant 0$, $x\in[\alpha, \beta]$, 有

$$-\int_s f(x)dt<0 \quad \left(-\int_s f(x)dt>0\right).$$

再证:

引理 7·9 若引理 7·7 的条件成立, 则沿着方程(7·10)的任意两条位于带域 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 中的轨线弧 s_1: $v=v_1(x)$ 与 s_2: $v=v_2(x)$, 且设 $v_2(x)>v_1(x)\geqslant 0$ 当 $x\in[\alpha, \beta]$, 必有

$$\int_{s_1}-f(x)dt>\int_{s_2}-f(x)dt \quad \left(\int_{s_1}-f(x)dt<\int_{s_2}-f(x)dt\right). \tag{7·13}$$

【证】 考虑括号外的情况. 由(7·11)式得

$$\begin{aligned}\int_{s_1}-f(x)dt-\int_{s_2}-f(x)dt&=\int_a^b\left[\frac{1}{v_1(x_2(z))}-\frac{1}{v_1(x_1(z))}\right]dz\\&\quad-\int_a^b\left[\frac{1}{v_2(x_2(z))}-\frac{1}{v_2(x_1(z))}\right]dz\\&=\int_a^b\left[\left(\frac{1}{v_1(x_2(z))}-\frac{1}{v_2(x_2(z))}\right)\right.\\&\quad\left.-\left(\frac{1}{v_1(x_1(z))}-\frac{1}{v_2(x_1(z))}\right)\right]dz,\end{aligned}$$

而

$$\frac{d(v_2(x)-v_1(x))}{dx}=-\frac{x}{v_2(x)}+\frac{x}{v_1(x)}=x\frac{v_2(x)-v_1(x)}{v_1(x)v_2(x)}>0,$$
$$\text{当 } x\in(\alpha, \beta).$$

再注意到(7·12)式, 即得(7·13). 证毕.

同理有

引理 7·10　若引理 7·8 的条件成立，则沿着方程(7·10)的任意两条位于带域 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 的轨线弧 s_1: $v=v_1(x)$ 与 s_2: $v=v_2(x)$，且 $v_2(x)>v_1(x)\geqslant0$ 当 $x\in[\alpha,\beta]$，必有

$$\int_{s_1}-f(x)dt<\int_{s_2}-f(x)dt\quad\left(\int_{s_1}-f(x)dt>\int_{s_2}-f(x)dt\right).$$

下面再证两个引理:

引理 7·11　设 $f(x)\leqslant0\,(f(x)\geqslant0)$，且 $f(x)\not\equiv0$ 当 $x\in[\alpha,\beta]$，则沿着方程(7·10)的两条位于带域 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 的轨线弧 s_1: $v=v_1(x)$ 与 s_2: $v=v_2(x)$，且 $v_2(x)>v_1(x)\geqslant0$ 当 $x\in[\alpha,\beta]$，必有

$$\int_{s_1}-f(x)dt>\int_{s_2}-f(x)dt\quad\left(\int_{s_1}-f(x)dt<\int_{s_2}-f(x)dt\right).$$

【证】 由

$$\begin{aligned}\int_{s_1}-f(x)dt-\int_{s_2}-f(x)dt&=\int_\alpha^\beta\frac{-f(x)}{v_1(x)}dx-\int_\alpha^\beta\frac{-f(x)}{v_2(x)}dx\\&=-\int_\alpha^\beta f(x)\left[\frac{1}{v_1(x)}-\frac{1}{v_2(x)}\right]dx,\end{aligned}$$

即知引理成立.

引理 7·12　设当 $x\in[\alpha,\beta]\,(\alpha>0)$ 时有

1) $f(x)>0\,(f(x)<0)$;

2) $f(x)$ 单调不减 ($f(x)$ 单调不增);

则沿着方程 (7·10) 的任意两条通过点 $(\beta_i^*,0)$ $(i=1,2)$，并且和直线 $x=\alpha$ 两次相交的轨线弧 $\gamma_i\,(i=1,2)$ 有

$$\int_{\gamma_1}-f(x)dt>\int_{\gamma_2}-f(x)dt$$

$$\left(\int_{\gamma_1}-f(x)dt<\int_{\gamma_2}-f(x)dt\right),$$

其中 $\alpha<\beta_1^*<\beta_2^*\leqslant\beta$.

【证】 考虑括号外的情况. 如图 7·4 所示，$\gamma_1=\widehat{A_1B_1}$，$\gamma_2=\widehat{AB}=\widehat{AA_2}\cup\widehat{A_2B_2}\cup\widehat{B_2B}$. 由条件 1)得

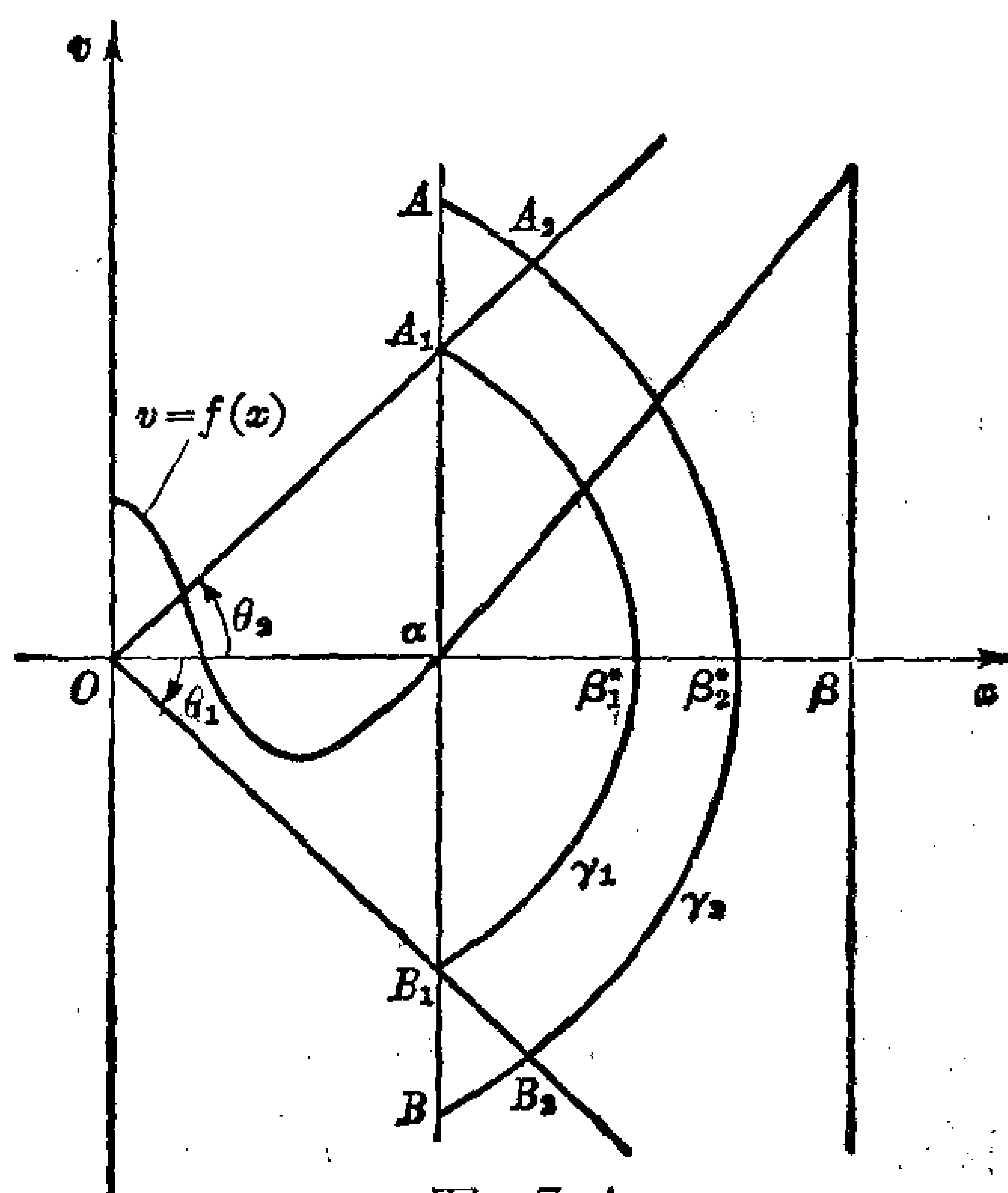


图 7·4

$$\int_{\widehat{AA_2}\cup\widehat{B_2B}} -f(x)dt<0. \tag{7·14}$$

令 $x=\rho\cos\theta$, $v=\rho\sin\theta$, 把方程(7·10)化为

$$\begin{cases}\dfrac{d\rho}{dt}=-\rho\sin^2\theta f(\rho\cos\theta),\\ \dfrac{d\theta}{dt}=-1-\cos\theta\sin\theta f(\rho\cos\theta).\end{cases}$$

由条件 2) 可知 $\widehat{A_iB_i}$ 可表示为 $\rho=\rho_i(\theta)$ $(i=1,2)$, 且 $\rho_1(\theta)<\rho_2(\theta)$ 当 $\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2$(图 7·4). 于是

$$\begin{aligned}&\int_{\widehat{A_2B_2}} -f(x)dt-\int_{\widehat{A_1B_1}} -f(x)dt\\ &=\int_{\theta_2}^{\theta_1}\frac{-f(\rho_2(\theta)\cos\theta)d\theta}{-1-\cos\theta\sin\theta f(\rho_2(\theta)\cos\theta)}\\ &\quad-\int_{\theta_2}^{\theta_1}\frac{-f(\rho_1(\theta)\cos\theta)d\theta}{-1-\cos\theta\sin\theta f(\rho_1(\theta)\cos\theta)}\\ &=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{f(\rho_1(\theta)\cos\theta)-f(\rho_2(\theta)\cos\theta)}{\left\{\begin{array}{l}[-1-\cos\theta\sin\theta f(\rho_2(\theta)\cos\theta)]\\ \cdot[-1-\cos\theta\sin\theta f(\rho_1(\theta)\cos\theta)]\end{array}\right\}}d\theta\leqslant0.\end{aligned} \tag{7·15}$$

由(7·14)与(7·15)式即得

$$\int_{\gamma_1} -f(x)dt > \int_{\gamma_2} -f(x)dt.$$

下面介绍前已说过的 Рычков 的定理，但这里的证明已采用张芷芬的，并且条件也有所减轻.

定理 7·2 设当 $x\in(-d, d)$时有

1) $f(-x)=f(x)$;

2) $f(x)$只有正零点 α_1, α_2, $0<\alpha_1<\alpha_2<d$;

3) $F(\alpha_1)>0$, $F(\alpha_2)<0$;

4) $f(x)$单调增加，当 $x\in[\alpha_2, d)$时，

则方程(7·10)在带域$|x|<d$内最多只有两个极限环.

【证】 我们在带域$|x|<d$内考虑方程(7·10). 由于$f(x)$为偶函数，故方程(7·10)的闭轨线关于坐标原点对称. 设β是 $F(x)$的最小正零点($\alpha_1<\beta<\alpha_2$). 易见在带域$|x|\leqslant\beta$中方程(7·10)无极限环. 又$f(x)<0$当$x\in(\beta, \alpha_2)$，故根据引理 7·7 与 7·8 可知，若在带域$|x|\leqslant\alpha_2$内(7·10)有极限环，则必为唯一的不稳定环.

另一方面，由引理 7·9—7·12 可知，若方程(7·10)有两个极限环 $L_1\subset L_2$，都与直线 $x=\alpha_2$ 相交，则

$$\oint_{L_1} -f(x)dt>\oint_{L_2} -f(x)dt. \tag{7·16}$$

由此可知方程(7·10)不存在复合极限环与周期环.

下面分两种情形讨论.

(I) 在带域$|x|\leqslant\alpha_2$内，方程(7·10)有唯一的不稳定极限环 L_1.

若方程(7·10)存在与直线 $x=\alpha_2$ 相交的极限环，设最靠近 L_1 的环为 $L_2(\supset L_1)$，则 L_2 必为内侧稳定. 下面证明 L_2 必为外稳定，否则，L_2 应是内稳定而外不稳定的半稳定环. 我们考察方程

$$\frac{dx}{dt}=v,\quad \frac{dv}{dt}=-x-[f(x)+a\gamma(x)]v, \tag{7·17}$$

其中$a>0$, $\gamma(x)=0$当$|x|<\alpha_2$, $\gamma(x)=(|x|-\alpha_2)^2$, 当$\alpha_2\leqslant|x|<d$. 由广义旋转向量场理论可知当$a$适当小时, (7·17)在带域$|x|<d$内存在与直线$x=\alpha_2$相交的两个环$L_2^{(1)}\subset L_2^{(2)}$, 使

$$\oint_{L_2^{(2)}}-f_1(x)dt\geqslant 0,\qquad \oint_{L_2^{(1)}}-f_1(x)dt\leqslant 0,$$

其中$f_1(x)=f(x)+a\gamma(x)$, 它仍旧满足定理的条件. 这是和(7·16)相矛盾的. 故L_2为稳定环. 再由(7·16)知L_2外部无环.

(II) 在带域$|x|\leqslant\alpha_2$内方程(7·10)无极限环.

由于奇点O是稳定的, 若(7·10)有环, 则最靠近奇点O的环L_1必为内侧不稳定的.

若L_1外侧亦为不稳定, 则同(I)可证L_1外部最多还有一个环.

若L_1为外侧稳定, 于是$\oint_{L_1}-f(x)dt=0$. 如果L_1之外还有极限环L_2, 则L_2应是内侧不稳定的, 这将与不等式(7·16)相矛盾. 所以这时方程(7·10)只有唯一的半稳定环L_1.

综上所述可知方程(7·10)最多只有两个极限环.

推论 若$F(x)=a_2x^5+a_1x^3+a_0x$, 则方程(7·1)最多只有两个极限环.

【证】 不妨设$a_2>0$. 当$F(x)$最多只有一个正零点(二重零点算一个)时, 方程(7·1)最多只有一个极限环; 若$F(x)$有两个不同的正零点, 则由定理7·2知道方程(7·1)最多只有两个极限环.

由定理5·2可证若$F(x)=x^5-\frac{50}{3}x^3+45x$, 则方程(7·1)恰有两个极限环.

当方程(7·1)取特例

$$\frac{dx}{dt}=y+\mu\sin x,\ \frac{dy}{dt}=-x \tag{7·18}$$

时, 许多人都对它做过研究[136, 137, 138, 139], 并猜想, 对一切

$\mu\neq0$, 方程(7·18)在带域$|x|\leqslant(n+1)\pi$中恰好有n个极限环. 张芷芬[131]完全解决了这一问题. 下面就介绍她的结果.

定理7·3 方程(与(7·18)等价)

$$\frac{dx}{dt}=v,\quad \frac{dv}{dt}=-x+(\mu\cos x)v \tag{7·19}$$

在带域$|x|\leqslant(n+1)\pi$内恰有n个极限环.

显然只须讨论$\mu>0$的情况. 为书写方便起见, 下面仍记$f(x)=-\mu\cos x$, $F(x)=\int_0^x f(s)ds=-\mu\sin x$. 首先证明几个引理.

引理7·13 在半平面$v\geqslant0$中沿着方程(7·19)的同一条轨线$v=v(x)$有

$$v(x)>v(-\pi-x)\quad 当\quad x\geqslant0;$$

$$v(-x)>v(\pi+x)\quad 当\quad x\geqslant0.$$

【证】 由方程(7·19)可得

$$\begin{aligned}v(\pi+x)-v(-x)&=\int_{-x}^{\pi+x}\frac{-\xi}{v(\xi)}d\xi\\&=\int_{-x}^{0}+\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{\pi+x}\frac{-\xi}{v(\xi)}d\xi\\&=\int_0^x\frac{\xi[v(\pi+\xi)-v(-\xi)]}{v(-\xi)v(\pi+\xi)}d\xi\\&\quad-\int_0^{\pi}\frac{\xi}{v(\xi)}d\xi-\int_0^x\frac{\pi}{v(\pi+\xi)}d\xi,\quad x\geqslant0.\end{aligned}$$

将上式两侧求导, 得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[v(\pi+x)-v(-x)]&=\frac{x[v(\pi+x)-v(-x)]}{v(-x)v(\pi+x)}-\frac{\pi}{v(\pi+x)}\\&<\frac{x[v(\pi+x)-v(-x)]}{v(-x)v(\pi+x)},\quad x\geqslant0,\end{aligned}$$

从而

$$\frac{d}{dx}\left[(v(\pi+x)-v(-x))e^{-\int_0^x\frac{\xi d\xi}{v(-\xi)v(\pi+\xi)}}\right]<0\quad 当\quad x\geqslant0.$$

但 $v(\pi)-v(0)<0$, 故 $v(\pi+x)-v(-x)<0$ 当 $x\geqslant 0$. 同理可证另一不等式.

今作正定的状态函数 $\lambda(x, v)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}(v+F(x))^2$, 沿方程(7·19)所定义的方向场求导, 有

$$\frac{d\lambda}{dt}=-xF(x).$$

为简单起见, 记 $\lambda(x)=\lambda(x, v(x))$, 其中 $v=v(x)$ 是(7·19)的轨线的方程. 下面研究状态函数沿着方程(7·19)的轨线的变化情况.

引理 7·14 在半平面 $v\geqslant 0$ 中, 若方程(7·19)的轨线 $v=v(x)$ 与直线 $x=\pm m\pi$ 相交, 则沿着此轨线段有

$$(-1)^{m+1}[\lambda(m\pi)-\lambda(-m\pi)]>0, \quad m\geqslant 1. \tag{7·20}$$

【证】 记 $\Delta_k=\lambda((k+1)\pi)-\lambda(k\pi)$, $\bar{\Delta}_k=\lambda(-k\pi)-\lambda(-(k+1)\pi)$, 这里 $k\geqslant 0$ 是整数. 先证不等式:

$$\Delta_0>0, \quad \bar{\Delta}_0>0, \tag{7·21}$$

$$(-1)^{k+1}(\Delta_k+\bar{\Delta}_{k+1})>0, \quad k\geqslant 0, \tag{7·22}$$

$$(-1)^{k+1}(\bar{\Delta}_k+\Delta_{k+1})>0, \quad k\geqslant 0. \tag{7·23}$$

因为 $\frac{d\lambda}{dt}>0$ 当 $0<|x|<\pi$, 所以不等式(7·21)成立. 又

$$\begin{aligned}\Delta_k+\bar{\Delta}_{k+1}&=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{-xF(x)}{v(x)}dx+\int_{-(k+2)\pi}^{-(k+1)\pi}\frac{-xF(x)}{v(x)}dx\\&=(-1)^k\int_0^{\pi}\Big[\frac{k\pi+x}{v(k\pi+x)}\\&\quad-\frac{k\pi+\pi+x}{v(-k\pi-\pi-x)}\Big]|F(x)|dx, \quad k\geqslant 0.\end{aligned}$$

由引理 7·13 知积分号下的函数小于零, 故不等式(7·22)得证. 同理可证不等式(7·23).

现在约定 $\Delta_{-1}=\bar{\Delta}_{-1}=0$, 那末由(7·21)—(7·23)便有

$$(-1)^{m+1}[\lambda(m\pi)-\lambda(-m\pi)]=(-1)^{m+1}\sum_{k=0}^{m-1}(\Delta_k+\bar{\Delta}_k)$$

$$=(-1)^{m+1}\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}(\Delta_{m-2k-2}+\bar{\Delta}_{m-2k-1})$$

$$+(-1)^{m+1}\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}(\bar{\Delta}_{m-2k-2}+\Delta_{m-2k-1})>0.$$

引理7·14证毕.

今以 $\int_{[\alpha,\beta]}f(x(t))dt$ 表示 $f(x)$ 沿着(7·19)的轨线段的积分，但 $[\alpha,\beta]$ 是 x 的变动区间，设 $x(t_1)=\alpha$, $x(t_2)=\beta$, 则 t 的变动区间是 $[t_1,t_2]$.

引理7·15 在半平面 $v\geqslant 0$ 中成立

$$(-1)^{m-1}\int_{[-m\pi,m\pi]}f(x(t))dt>0,\ m\geqslant 1\ \text{为正整数}. \tag{7·24}$$

【证】 记

$$d_k=\int_{[k\pi,(k+1)\pi]}f(x(t))dt=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{f(x)}{v(x)}dx$$

$$=(-1)^k\int_0^{\pi}\frac{f(x)}{v(k\pi+x)}dx$$

$$=(-1)^k\int_0^{\pi/2}\frac{v(k\pi+x)-v(k\pi+\pi-x)}{v(k\pi+x)v(k\pi+\pi-x)}|f(x)|dx,$$

$$k\geqslant 0, \tag{7·25}$$

$$\bar{d}_k=\int_{[-(k+1)\pi,-k\pi]}f(x(t))dt=\int_{-(k+1)\pi}^{-k\pi}\frac{f(x)}{v(x)}dx$$

$$=(-1)^k\int_0^{\pi}\frac{f(x)}{v(-k\pi-x)}dx$$

$$=(-1)^k\int_0^{\pi/2}\frac{v(-k\pi-x)-v(-k\pi-\pi+x)}{v(-k\pi-x)v(-k\pi-\pi+x)}|f(x)|dx,$$

$$k\geqslant 0. \tag{7·26}$$

先证不等式

$$(-1)^{k+1}(d_{k+1}+\bar{d}_k)>0,\quad k\geqslant 0, \tag{7·27}$$

$$(-1)^{k+1}(\bar{d}_{k+1}+d_k)>0,\quad k\geqslant 0. \tag{7·28}$$

易见

$$d_{k+1}+\bar{d}_k=(-1)^{k+1}\int_0^{\pi/2}\frac{v(k\pi+\pi+x)-v(k\pi+2\pi-x)}{v(k\pi+\pi+x)v(k\pi+2\pi-x)}|f(x)|dx$$
$$-(-1)^{k+1}\int_0^{\pi/2}\frac{v(-k\pi-x)-v(-k\pi-\pi+x)}{v(-k\pi-x)v(-k\pi-\pi+x)}|f(x)|dx. \tag{7·29}$$

由引理7·13有

$$\begin{aligned}&v(k\pi+\pi+x)<v(-k\pi-x),\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\quad k\geqslant 0,\\&v(k\pi+2\pi-x)<v(-k\pi-\pi+x),\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\quad k\geqslant 0.\end{aligned} \tag{7·30}$$

由方程(7·19)及引理7·13便有

$$\begin{aligned}v(k\pi+\pi+x)-v(k\pi+2\pi-x)&=\int_{k\pi+\pi+x}^{k\pi+2\pi-x}\left(\frac{x}{v(x)}+f(x)\right)dx\\&=\int_{k\pi+x}^{k\pi+\pi-x}\frac{\pi+x}{v(\pi+x)}dx>\int_{k\pi+x}^{k\pi+\pi-x}\frac{x}{v(-x)}dx\\&=v(-k\pi-x)-v(-k\pi-\pi+x)>0,\\&\qquad 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\quad k\geqslant 0.\end{aligned} \tag{7·31}$$

由(7·29)—(7·31)即得(7·27)的证明. 同理可证不等式(7·28).

由引理7·7与7·8可得

$$d_0=\int_{[0,\pi]}f(x(t))dt>0, \tag{7·32}$$

$$\bar{d}_0=\int_{[-\pi,0]}f(x(t))dt>0. \tag{7·33}$$

约定记 $d_{-1}=\bar{d}_{-1}=0$, 由不等式(7·27)—(7·33)可得

$$\begin{aligned}(-1)^{m-1}\int_{[-m\pi,m\pi]}f(x(t))dt&=(-1)^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1}(d_k+\bar{d}_k)\\&=(-1)^{m-1}\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}(d_{m-2k-1}+\bar{d}_{m-2k-2})\\&\quad+(-1)^{m-1}\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}(\bar{d}_{m-2k-1}+d_{m-2k-2})>0,\quad m\geqslant 1.\end{aligned}$$

引理7·15证毕.

由于方程(7·19)的闭轨线关于原点对称, 且 $(-1)^{m-1}f(x)\geqslant 0$,

当 $m\pi \leqslant x \leqslant (2m+1)\frac{\pi}{2}$. 由引理 7·15 便有

引理 7·16 若方程(7·19)的闭轨线 L_m 与 x 正半轴上的区间 $\left[m\pi,\ (2m+1)\frac{\pi}{2}\right]$ 相交，则有

$$(-1)^{m-1}\oint_{L_m} f(x(t))dt > 0, \quad m \geqslant 1.$$

再证：

引理 7·17 若方程(7·19)有两条闭轨线 $L_1 \subset L_2$, 它们同时在半平面 $v \geqslant 0$ 中与直线 $x = \pm(2m+1)\frac{\pi}{2}$ 相交，则有

$$(-1)^m \int_{\left[-(2m+1)\frac{\pi}{2},\ (2m+1)\frac{\pi}{2}\right]} [f(x_2(t)) - f(x_1(t))]dt > 0, \quad m > 0.$$

【证】 首先，由引理 7·9 与 7·10 可得

$$(-1)^k D_k = (-1)^k \int_{\left[(2k+1)\frac{\pi}{2},(2k+5)\frac{\pi}{2}\right]} [f(x_2(t)) - f(x_1(t))]dt > 0, \quad k \geqslant 0, \tag{7·34}$$

$$(-1)^k \overline{D}_k = (-1)^k \int_{\left[-(2k+5)\frac{\pi}{2},-(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]} [f(x_2(t)) - f(x_1(t))]dt > 0, \quad k \geqslant 0, \tag{7·35}$$

$$\int_{[-\pi,\ \pi]} [f(x_2(t)) - f(x_1(t))]dt < 0. \tag{7·36}$$

当 m 为奇数时，由不等式(7·34)—(7·36), $f(x) > 0$, 当 $\pi \leqslant |x| < \frac{3\pi}{2}$; 以及引理 7·11 便有

$$\begin{aligned}
&\int_{\left[-(2m+1)\frac{\pi}{2},(2m+1)\frac{\pi}{2}\right]} [f(x_2(t)) - f(x_1(t))]dt \\
&= \int_{\left[-\frac{3\pi}{2},-\pi\right]} + \int_{[-\pi,\pi]} + \int_{\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]} [f(x_2(t)) - f(x_1(t))]dt \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\frac{m-1}{2}} (D_{2k-1} + \overline{D}_{2k-1}) < 0.
\end{aligned}$$

当 m 为偶数时，由不等式(7·34)，(7·35)，$f(x)<0$ 当 $0\leqslant|x|<\frac{\pi}{2}$；以及引理 7·11 便有

$$\begin{aligned}&\int_{\left[-(2m+1)\frac{\pi}{2},\,(2m+1)\frac{\pi}{2}\right]}[f(x_2(t))-f(x_1(t))]dt\\&=\int_{\left[-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\right]}[f(x_2(t))-f(x_1(t))]dt\\&\quad+\sum_{k=0}^{\frac{m}{2}-1}(D_{2k}+\overline{D}_{2k})>0.\end{aligned}$$

引理 7·17 证毕.

由引理 7·12 与 7·17 可得

引理 7·18 若方程(7·19)有两条闭轨线 $L_1\subset L_2$ 同时与 x 正半轴上的区间$\left[(2m+1)\frac{\pi}{2},(m+1)\pi\right]$相交，则有

$$(-1)^m\left[\oint_{L_2}f(x_2(t))dt-\oint_{L_1}f(x_1(t))dt\right]>0,\quad m\geqslant1.$$

【定理 7·3 的证明】

(I) 证明方程(7·19)在带域$|x|\leqslant(n+1)\pi$ 内至少存在 n 个极限环.

设从 x 负半轴上的点 $\overline{P}_m(-m\pi,0)$出发的轨线经过半平面 $v\geqslant0$ 后交正半轴于 Q_m. 由引理 7·14 知道，当 $m>0$ 为奇数时必有 $x_{Q_m}>m\pi$；当 $m>0$ 为偶数时有 $x_{Q_m}<m\pi$. 由方向场的对称性知，从点 $P_m(m\pi,0)$出发的轨线经过半平面 $v\leqslant0$ 后交 x 负半轴于点 $\overline{Q}_m$ 时必有 $x_{\overline{Q}_m}=-x_{Q_m}$. 以 $\widehat{\overline{P}_mQ_m}$, $\widehat{P_m\overline{Q}_m}$ 分别表示经过点 $\overline{P}_m$, Q_m 与 P_m, $\overline{Q}_m$ 的轨线段，以 $\overline{Q_mP_m}$, $\overline{\overline{Q}_m\overline{P}_m}$ 分别表示联接 Q_m 与 P_m 以及 $\overline{Q}_m$ 与 $\overline{P}_m$ 的直线段. 令

$$\Gamma_m=\widehat{\overline{P}_mQ_m}\cup\overline{Q_mP_m}\cup\widehat{P_m\overline{Q}_m}\cup\overline{\overline{Q}_m\overline{P}_m},$$

则 $\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_m,\cdots,\Gamma_{n+1}$ 中两两相邻的单闭曲线构成 Poincaré 环域的内外境界线，在其间至少存在一条闭轨线，故在带域$|x|\leqslant$

$(n+1)\pi$ 内至少存在 n 个极限环.

(II) 证明方程(7·19)在带域 $|x|\leqslant(n+1)\pi$ 中恰好存在 n 个极限环. 分两种情形.

1. 有闭轨线 L_m 与 x 轴上的区间 $\left[m\pi,\ (2m+1)\dfrac{\pi}{2}\right]$ 相交. 由引理7·16知道, 当 m 是奇(偶)数时, L_m 是稳定(不稳定)的, 且此外再无闭轨线与区间 $\left(m\pi,\ (2m+1)\dfrac{\pi}{2}\right]$ 相交. 现在要证明这时没有闭轨线与区间 $\left((2m+1)\dfrac{\pi}{2},\ (m+1)\pi\right]$ 相交. 假如不然, 则最靠近 L_m 且包含它的闭轨线 L'_m 必定是内侧不稳定(稳定)的. 先证 L'_m 不可能是半稳定. 否则, 设 L'_m 为半稳定, 考虑方程

$$\frac{dx}{dt}=v,\quad \frac{dv}{dt}=-x-f_\alpha(x)v, \tag{7·19}^*$$

其中 $f_\alpha(x)=-\mu\cos x+\alpha\gamma_m(x)$, $\alpha>0$, 而

$$\gamma_m(x)=\begin{cases}0, & 当\ |x|\leqslant(2m+1)\dfrac{\pi}{2},\\ (-1)^m\left(|x|-(2m+1)\dfrac{\pi}{2}\right)^2, & 当\ |x|>(2m+1)\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

方程 $(7·19)_*$ 对 α 形成广义旋转向量场, 当 α 很小时 $(7·19)_*$ 存在与 x 轴上区间 $\left((2m+1)\dfrac{\pi}{2},\ (m+1)\pi\right]$ 相交的闭轨线 $L_m^{(1)}\subset L_m^{(2)}$, 并有

$$(-1)^m\oint_{L_m^{(1)}}f_\alpha(x)dt\geqslant 0,\ (-1)^m\oint_{L_m^{(2)}}f_\alpha(x)dt\leqslant 0.$$

这将与引理7·12和7·17矛盾. 故 L'_m 必定是不稳定(稳定)环. 由(I)的证明, 这时在 L'_m 之外至少还有一条与区间 $\left[(2m+1)\dfrac{\pi}{2},\ (m+1)\pi\right]$ 相交的单侧, 甚至是双侧的稳定(不稳定)闭轨线, 这又和引理7·18矛盾. 所以这时不可能再有闭轨线和区间 $\left((2m+1)\dfrac{\pi}{2},\ (m+1)\pi\right]$ 相交.

2. 无闭轨线与 x 轴上区间 $\left[m\pi,\ (2m+1)\frac{\pi}{2}\right]$ 相交. 由(I)的证明知道这时至少存在一条闭轨线与 $\left((2m+1)\frac{\pi}{2},\ (m+1)\pi\right]$ 相交. 设 L_m 是其中最靠近原点的一条, 当 m 为奇(偶)数时, 它必定是内侧稳定(不稳定)的. L_m 不可能为半稳定, 否则由(I)的证明知在 L_m 之外至少还有一条单侧, 甚至双侧稳定(不稳定)闭轨线与区间 $\left((2m+1)\frac{\pi}{2},\ (m+1)\pi\right]$ 相交, 这又与引理 7·18 矛盾. 故 L_m 应是稳定(不稳定)闭轨线. 然后与情况 1 类似地可证 L_m 之外无闭轨线再与区间 $\left((2m+1)\frac{\pi}{2},\ (m+1)\pi\right]$ 相交.

综上所述可知, 当 m 是奇(偶)数时, 方程(7·19)有唯一稳定(不稳定)闭轨线与 x 正半轴上的区间 $[m\pi,\ (m+1)\pi]$ 相交. 又在带域 $|x|\leqslant\pi$ 内方程(7·19)无闭轨线, 故在带域 $|x|\leqslant(n+1)\pi$ 内恰好有 n 个极限环, 且稳定和不稳定极限环相间地排列. 定理 7·3 证毕.

在证完了这个漂亮的定理以后介绍一点有关这问题的历史是有意义的. 我们知道 van der Pol 方程

$$\ddot{x}+\mu f(\dot{x})+x=0, \qquad (7\cdot 37)$$

其中的 $f(\dot{x})=-\dot{x}+\frac{1}{3}\dot{x}^3$ [1], 对一切 $\mu\neq 0$ 存在唯一的极限环. 仿此可证: 若 $f(\dot{x})$ 是只含奇次项的 $2n+1$ 次多项式, 则对足够小的 $|\mu|$, 方程(7·37)恰有 n 个极限环. Eckweiler[136] 首先注意到, 如果取 $f(\dot{x})=\sin\dot{x}$, 那末要使 $\mu=0$ 时的解族 $x^2+\dot{x}^2=A^2$ 中的解能产生在 $\mu\neq 0$ 时的周期解, 其振幅 A 必须满足方程[2]:

$$\int_0^{2\pi}\sin\varphi\sin(A\sin\varphi)\,d\varphi=2\pi J_1(A)=0, \qquad (7\cdot 38)$$

1) 把(7·37)式对 t 求导, 再记 $\dot{x}=y$, 即得我们所熟知的形式. 方程(7·37)有时也称为 Rayleigh 方程, 它首先见于 Rayleigh 的书"声的理论"(1894), 比 van der Pol 要早得多.

2) 见 §4(4·18)式.

其中$J_1(A)$是一阶 Bessel 函数.容易算出上式的导数为

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\cos(A\sin\varphi)d\varphi = 2\pi[J_0(A) - J_2(A)]. \quad (7\cdot39)$$

根据 Bessel 函数的知识[1)]知道，$J_1(A)$有无数正零点，并且大的零点有近似表达式

$$A_n = n\pi + \frac{\pi}{4} + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (7\cdot40)$$

在这个条件下,(7·39)右边成为

$$4(-1)^n\sqrt{\frac{2\pi}{A_n}} + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (7\cdot41)$$

由此可见其值异于零，只要n足够大. 于是[136]就肯定

$$\ddot{x} + \mu\sin\dot{x} + x = 0. \quad (7\cdot42)$$

当$|\mu| \ll 1$时存在无数多个极限环. 后来[138]指出，这样肯定是不够严格的，因为可能找不到同一个μ的存在区间，使对此区间中的μ值，与$J_1(A)$的零点对应的无数个极限环能够同时存在. [138]用了$J_1(z)$的更多的渐近性质以及构造 Poincaré 环域的办法,先证明(7·42)化为极坐标方程

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = \frac{\mu\sin\theta\sin(\gamma\sin\theta)}{1 + \dfrac{\mu}{\gamma}\cos\theta\sin(\gamma\sin\theta)} \quad (7\cdot43)$$

后的近似方程

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = \mu\sin\theta\sin(\gamma\sin\theta),$$

当$|\mu| > 0$且足够小时存在无数多个极限环,然后再证明这一结论对(7·43)也同样成立,只要把$|\mu|$取得更小一些.

后来[139]又改进了[138]的造环域的方法得证当$0 < |\mu| < 2$时上述结论成立，但对$|\mu| \geq 2$, 他只能证明在原点的充分大的邻域之外存在无数个极限环,同时他猜想定理 7·3 应该成立. [131]的工作算是把这个猜想完全证实了.

1) 参考[140].

注意 1. 对于 van der Pol 方程

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-x+\mu\left(y-\frac{y^3}{3}\right), \tag{7·44}$$

若令 $x=\mu v$, 则得

$$\frac{dy}{dv}=\mu^2\frac{y-\frac{y^3}{3}+v}{-y}, \tag{7·45}$$

可以证明[1]: 当 $\mu\to+\infty$ 时(7·45)的周期解的极限位置是一个间断周期解, 如图 7·5 中的粗线所示. 现在对(7·42), 或

$$\frac{dx}{dt}=y,$$

$$\frac{dy}{dt}=-x-\mu\sin y,$$

做同一代换 $x=\mu v$, 可得

$$\frac{dy}{dv}=-\frac{\mu^2(v+\sin y)}{y}. \tag{7·46}$$

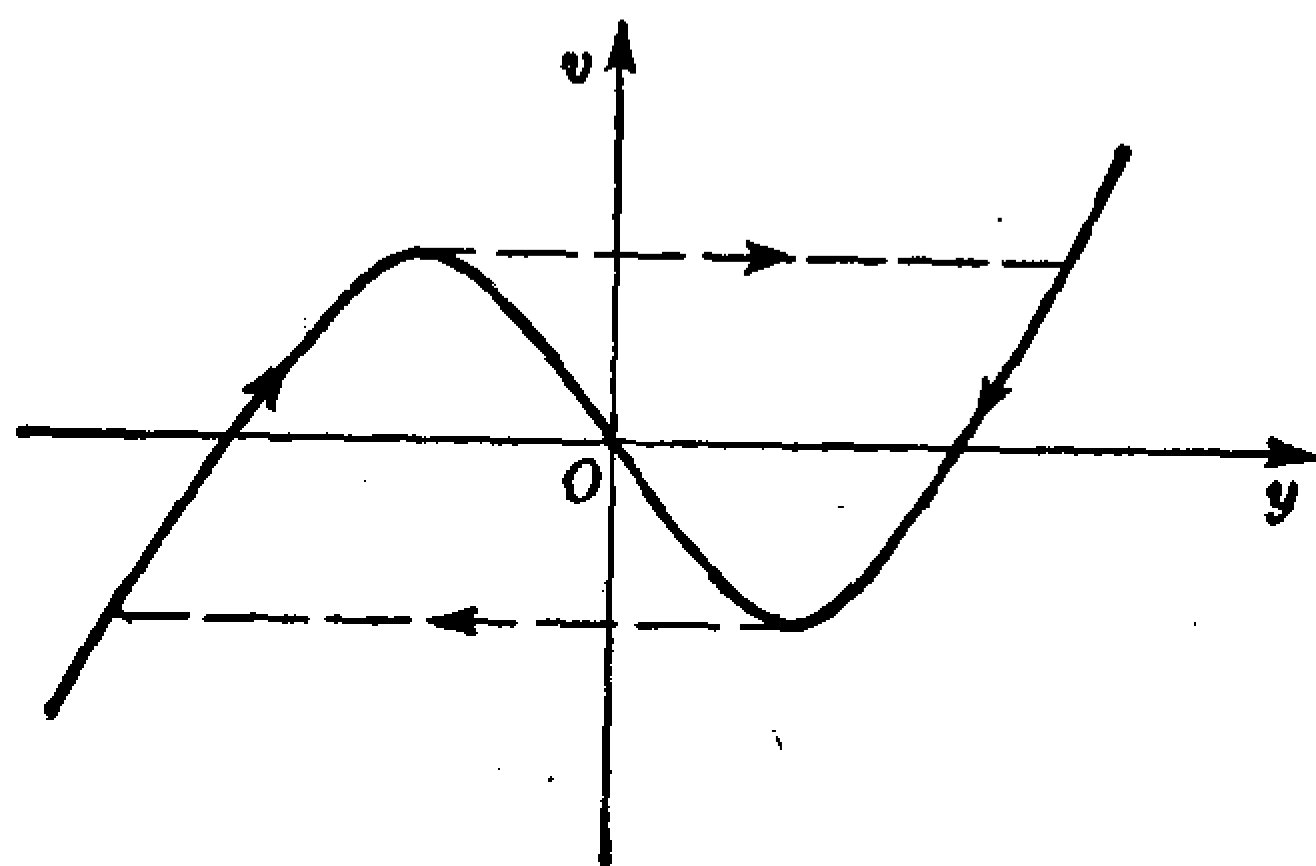


图 7·5

估计对(7·46) 当 $\mu\to+\infty$ 时亦将成立与(7·45)类似的结果.

注意 2. 在本书初版(1965)的 §6 习题 5, 即现在的习题 3, 已指出: 当(7·1)中的 $F(x)$是 x 的三次多项式时, 方程最多存在一个极限环. 这一结果后来也为 A. Lins, W. de Melo 与 C. C. Pugh[141]所独立得到, 他们并且提出猜想, 如果 $F(x)$是 $2n+1$ 或 $2n+2$ 次多项式, 则(7·1)至多有 n 个极限环. 这一猜想迄今尚未被证实或否定, 估计应该是对的.

---

1) 见[137]附录 IV.

§8. 微分系统的结构稳定性

简单地说，一个微分系统所具有的某种性质称为是稳定的，如果这性质在系统本身作微小改变之后仍旧能够保持．例如，在§4中读者已经看到：如果常微系统$(P(\alpha_0), Q(\alpha_0))$具有单重极限环$\Gamma_0$，则在以$\alpha$为参数的旋转向量场族中，对于在$\alpha_0$足够小邻近的所有$\alpha$，系统$(P(\alpha), Q(\alpha))$在$\Gamma_0$邻近也有唯一的单重环，因此“具有单重极限环”这一性质关于向量场的旋转来说就是稳定的．但若$(P(\alpha_1), Q(\alpha_1))$具有半稳定环$\Gamma_1$，则对$\alpha_1$一侧邻近的$\alpha$，$(P(\alpha), Q(\alpha))$在$\Gamma_1$附近不存在极限环，而对位于$\alpha_1$另一侧邻近的$\alpha$，$(P(\alpha), Q(\alpha))$在$\Gamma_1$附近至少有两个极限环：这说明“具有半稳定极限环”这一性质关于向量场旋转来说是不稳定的．对于平面动力系统来说，极限环的存在与个数的研究是全局定性理论的一个重要方面，故必然涉及到系统的全局定性结构是否为稳定这一问题，这也就是本节所要说的结构稳定性．结构稳定性对于实际应用的重要性也是很明显的，因为从实际问题抽象提炼出数学模型(通常表现为代数方程或常偏微分方程)往往经历了近似与简化的过程，为使对数学系统进行研究所得出的性质能正确反映实际问题的性态，就必须要求这种数学模型是结构稳定的．

在这一节里我们首先引进平面常微系统结构稳定性的严格定义，并给出结构稳定系统的相图的拓扑特征；然后讨论多项式系统的结构稳定性问题．本节主要是为后面讨论二次微分系统的极限环和全局结构问题作准备的．

设平面系统

$$\frac{dx}{dt}=P(x,\ y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,\ y) \tag{I}$$

定义于 xy 平面上的区域 B 内，$P,\ Q\in C^1$(即一次连续可微)，B 的境界为单闭曲线，对于(I)是无切的．为确定起见不妨设(I)的轨线穿过 B 的境界时均由外入内．所有满足以上条件的 $P,\ Q$ 所对应的系统组成一集合 X．今在 X 中引进度量 ρ 如下：

设 X 中的另一系统为：

$$\frac{dx}{dt}=P(x,\ y)+p(x,\ y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,\ y)+q(x,\ y), \tag{II}$$

那末我们定义(I)与(II)在 X 中的距离为

$$\rho(\mathrm{I},\ \mathrm{II})=\max_{B}\left(|p|+|q|+\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial p}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial q}{\partial y}\right|\right).$$

可以证明在如此定义的度量之下 X 成为一 Banach 空间．

定义 8·1 若存在 $\delta>0$，使得只要 $\rho(\mathrm{I},\ \mathrm{II})<\delta$，便存在 B 到它自身的拓扑映射 T，能把(I)的轨线变为(II)的轨线，则称系统(I)在 B 上为结构稳定系统，或称为粗系统．称(II)为(I)的容许摄动系统，称 $p,\ q$ 为摄动．

粗系统的概念于 1937 年首先由 А. А. Андронов 和 Л. С. Понтрягин [142] 所引进，他们当时假设 $P,\ Q$ 为解析函数，且对映射 T，除了定义 8·1 的要求以外，还再加了以下的限制：对任意给定的 $\varepsilon>0$，只要 $\delta>0$ 足够小，就可使 $d(M,\ T(M))<\varepsilon$[1)]，对 B 内任一点 M 成立，这里 $d(,)$ 表示 R^2 中的距离．他们指出系统(I)为结构稳定的充要条件是：

$$\left.\begin{array}{l}\text{1．它只有有限个初等奇点，且对应的一次近似方程的特征根均不具零实部；}\\ \text{2．只有有限条闭轨线，且都是单重极限环；}\\ \text{3．没有从鞍点到鞍点的轨线．}\end{array}\right\} \tag{III}$$

但未发表详细证明．1952 年 H. F. DeBaggis [143] 把 $P,\ Q$ 为解析

1) 以后称满足这条件的映射 T 为 ε 同胚．

的要求降低为 $P, Q\in C^1$，并给出充要条件的详细证明．1959 年 M. M. Peixoto[144] 又进一步证明了定义 8·1 与 Андронов 等的原来定义是等价的，并且推广到 n 维系统．1962 年 Peixoto[145] 给出并证明了紧致二维流形上的微分动力系统为结构稳定的充要条件，这在本节最后将会提到．

既然 Peixoto 已证明了结构稳定性的两种定义的等价性，因此以后我们不妨给定义 8·1 加上 $d(M, T(M))<\varepsilon$ 的要求，借以简化本书的证明．由于我们只须考虑绝对值甚小的摄动 p 与 q，故在证明(III)的必要性时，可设(I)的奇点被映象 T 变为位于它的邻近的(II)的奇点，极限环也是如此，这种假定可以使下述定理 8·1 的证明缩短许多．当然，两种定义的等价性的证明这里就从略了．

定理 8·1 条件(III)是系统(I)为结构稳定的必要条件．

证明分为下述四个引理，其中都假设(I)为结构稳定．

引理 8·1 系统(I)只能有有限个奇点和有限条闭轨线．

【证】 依 Weierstrass 逼近定理，在(I)的任何邻域中总存在多项式系统(II)（即方程的右端为多项式），且可以使(II)的两多项式没有公因子，故(II)的奇点只能是有限个．又由熟知的 Dulac 的定理[146,147] 可知(II)只有有限条闭轨，从而(I)也只能有有限个奇点和有限条闭轨．

引理 8·2 系统(I)只能有初等奇点，且对应的一次近似方程的特征根不具零实部．

【证】 任取一奇点，不妨设为(0, 0)．如果它不是初等奇点，则

$$\left|\frac{\partial(P, Q)}{\partial(x, y)}\right|_{(0,0)}=0,$$

这说明 $P=0$ 与 $Q=0$ 两曲线在(0, 0)有非单重的交点[1]．于是可以把其中之一作微小的摄动，使奇点由一个变为不只一个，这是和

1) 包括两曲线在(0, 0)相切，或是至少有一曲线以(0, 0)为重点．

(I)为结构稳定的假设相矛盾的.

再证方程在(0, 0)的一次近似方程的特征根必定不具零实部. 将(I)表为

$$\frac{dx}{dt}=ax+by+P_1(x,\ y),\quad \frac{dy}{dt}=cx+dy+Q_1(x,\ y),$$

其中 $P_1,\ Q_1=o(\sqrt{x^2+y^2})$. 设特征根具零实部, 即 $a+d=0$, 于是(I)以原点为中心或焦点. 今在 $\frac{dx}{dt}$ 右端添加摄动项 αx, $0<|\alpha|\ll 1$, 则摄动后的系统仍以(0, 0)为奇点, 其特征根实部为 $-\alpha$. 如果(0, 0)是(I)的中心, 但它对摄动系统来说却是焦点, 显然中心与焦点的邻域不能存在 ε 同胚, 与(I)为结构稳定的假设相矛盾. 如果(0, 0)是(I)的稳定(不稳定)焦点, 则利用§3定理3·7, 取 $\alpha<0(>0)$, 可使原点成为摄动系统的不稳定(稳定)焦点, 且在其邻近产生新的极限环, 故两系统不可能存在 ε 同胚. 总之, (0, 0)的一次近似方程的特征根的实部不能为零. 引理证毕.

引理 8·3 系统(I)的鞍点之间没有轨线相连.

【证】 设不然, 在鞍点 A 与 B(可能重合)之间有(I)的轨线将它们连接. 作旋转向量场族

$$\frac{dx}{dt}=P-\alpha Q,\quad \frac{dy}{dt}=Q+\alpha P, \tag{IV}$$

当 $\alpha<0$ 时向量场顺时针旋转, 图8·1中的箭头表示(IV)的轨线方向. 易见(IV)仍以 A, B



图 8.1

为鞍点, 但这时进入 B 的分界线已不来自 A, 从 A 出发的分界线亦不进入 B, 即(I)与(IV)不是 ε 同胚, 与假设(I)为结构稳定相矛盾. 证毕.

引理 8·4 系统(I)的闭轨线为单重极限环.

【证】 设 $\gamma_1,\ \cdots,\ \gamma_N$ 是方程(I)的全部极限环, 且

$$h(\gamma_1)=\oint_{\gamma_1}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dt=0.$$

现在要作一函数 $\varphi_1(x, y)\in C^1$, 使 $\varphi_1(x, y)=0$ 在 γ_1 上, $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\neq 0$ 在 γ_1 上, 且 $\varphi_1\neq 0$ 在 γ_1 的 η 邻域 N_η 的外部, 这里 $\eta>0$ 足够小, 使 N_η 不与任一 $\gamma_i(i\neq 1)$ 相遇. 为此, 只须取

$$\varphi_1(x, y)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin^2\frac{\pi n(x, y)}{2\eta}+n(x, y)\exp\left[-\tan^2\frac{\pi n(x, y)}{2\eta}\right], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 当\ (x, y)\in N_\eta; \\ \frac{\pi}{2},\ 当\ (x, y)\notin N_\eta,\end{cases}$$

其中 $n(x, y)$ 表示 N_η 中的点 (x, y) 到 γ_1 的距离. 由 $n(x, y)\in C^1$ 易证 $\varphi_1(x, y)$ 确能满足以上所说的条件. 仿此, 对每一 γ_i 可以定义 $\varphi_i(x, y)$. 现在研究方程

$$\frac{dx}{dt}=P(x, y)+\varepsilon\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_N\frac{\partial\varphi_1}{\partial x},\quad \frac{dy}{dt}=Q(x, y). \qquad \text{(V)}$$

易见(V)与(I)都以 $\gamma_1, \cdots, \gamma_N$ 为闭轨线, 且当 $\varepsilon>0$ 足够小时是容许扰动系统. 根据 $h(\gamma_1)=0$ 和 $\varphi_1(x, y)$ 的性质可以算出, 对于系统(V)有

$$h_{\text{V}}(\gamma_1)=\oint_1\varepsilon\varphi_2\cdots\varphi_N\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 dt.$$

由于 $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\neq 0$, 且在 γ_1 上连续, 又 $\varphi_i(x, y)>0$ 在 γ_1 上, 故上式右边不等于零, 且与 ε 同号.

今设 γ_1 是方程(I)的外稳定环. 由 §3 旋转向量场的理论知 γ_1 的外邻域中有曲线 Γ, 一切(I)的轨线与 Γ 相交时都从外部进入内部. 取 $\varepsilon>0$ 足够小, 可使 Γ 对(V)仍为无切曲线, 且(V)在 γ_1 与 Γ 之间没有奇点. 另一方面, 由于 $\varepsilon>0$, γ_1 已成为(V)的不稳定环, 故在 γ_1 的外邻域中又将出现(V)的异于 $\gamma_1, \cdots, \gamma_N$ 的闭轨线, 这是不可能的. 引理证毕.

把引理 8·1—8·4 合在一起, 即知条件(III)是系统(I)为结构稳定的必要条件.

注意：引理8·4同时也告诉我们，具有多重环的方程总可以经过微小的摄动而使多重环分裂为至少两个环，这是我们在§2与§4中未曾提到的重要事实．用类似的方法丁同仁[148]证明：多重环若为偶(奇)重，则方程可以经过任意小的摄动而使这多重环分解为不小于2的偶(奇)数个单重环．

定理8·2 条件(III)是系统(I)为结构稳定的充分条件．

为此先引进奇轨线与正常轨线的概念．

定义8·2 如果一条轨线的正向与负向都是轨道稳定，或是此轨线为正向轨道稳定，而负向跑出区域B，则称它为正常轨线．如果一条轨线在B中至少有一方为轨道不稳定，则称之为奇轨线．

显见中心或中心焦点都是正常轨线，而其他的奇点都是奇轨线，因为它总有一方是轨道不稳定的．周期环与复合极限环是正常轨线，而其他的闭轨线都是奇轨线．又进入或离开鞍点的分界线必为奇轨线．又若一轨线的两端都跑向结点，焦点或盘近极限环，或者它正向是如此，而负向则跑出区域B，则此轨线必为正常的，因为在它附近的一切轨线也都具有同样的性质．这样，对于结构稳定系统来说，它的一切奇点，极限环和分界线都是奇轨线，且此外别无其它奇轨线．

现在转向定理8·2的证明．由于(I)满足条件(III)，故在区域B中只有有限条奇轨线(包括奇点在内)，它们把B分成有限个子区域，称为法域，每一法域内部被正常轨线所充满．法域有两类：一类以B的境界线或其一部分作为它的境界线的一部分，另一类法域的境界上不含B的任何境界点．

定义8·3 稳定的结点，焦点及极限环统称为穴，不稳定的结点，焦点，极限环以及B的境界统称为源．

显见每一法域的境界上至少有一个源和一个穴，否则，此法域中的正常轨线当$t\to\pm\infty$时将无处可去[1]．

1) 由于已设条件(III)成立，法域中的正常轨线不能是闭轨线．

引理 8·5 每一法域的境界上有且只有一个源和一个穴.

【证】 假设法域 G 的境界上至少有两个穴 M_1 与 M_2, 我们要导出矛盾. 用全部在 G 内的一段光滑弧 C 连接 M_1 与 M_2. 因 M_1 为稳定, 所以经过 C 上 M_1 邻近的点的正常轨线都将进入 M_1 (当 $t\to+\infty$), C 上所有进入 M_1 的点的全体构成一相对开集 S_1. 同理, C 上进入 M_2 的点的全体构成一相对开集 S_2. S_2 与 S_1 的和集不可能等于 C. 因此 C 上必定存在有点 N, 经过 N 的轨线当 $t\to+\infty$ 时应进入第三个穴 M_3. 不妨设 N 是开集 S_1 的境界点. 但 C 上进入 M_3 的点的全体也成一开集, 因此通过 S_1 中位于 N 邻近的点的轨线又将进入 M_3, 这与 N 的定义相矛盾. 引理得证.

由这引理容易看出, 结构稳定系统的法域只能有下列三种不同的类型:

1. 境界上有一个源和一个穴(图 8·2(*a*)—(*d*)).

2. 境界上有一个源, 一个穴, 两个鞍点, 四条分界线(图 8·3).

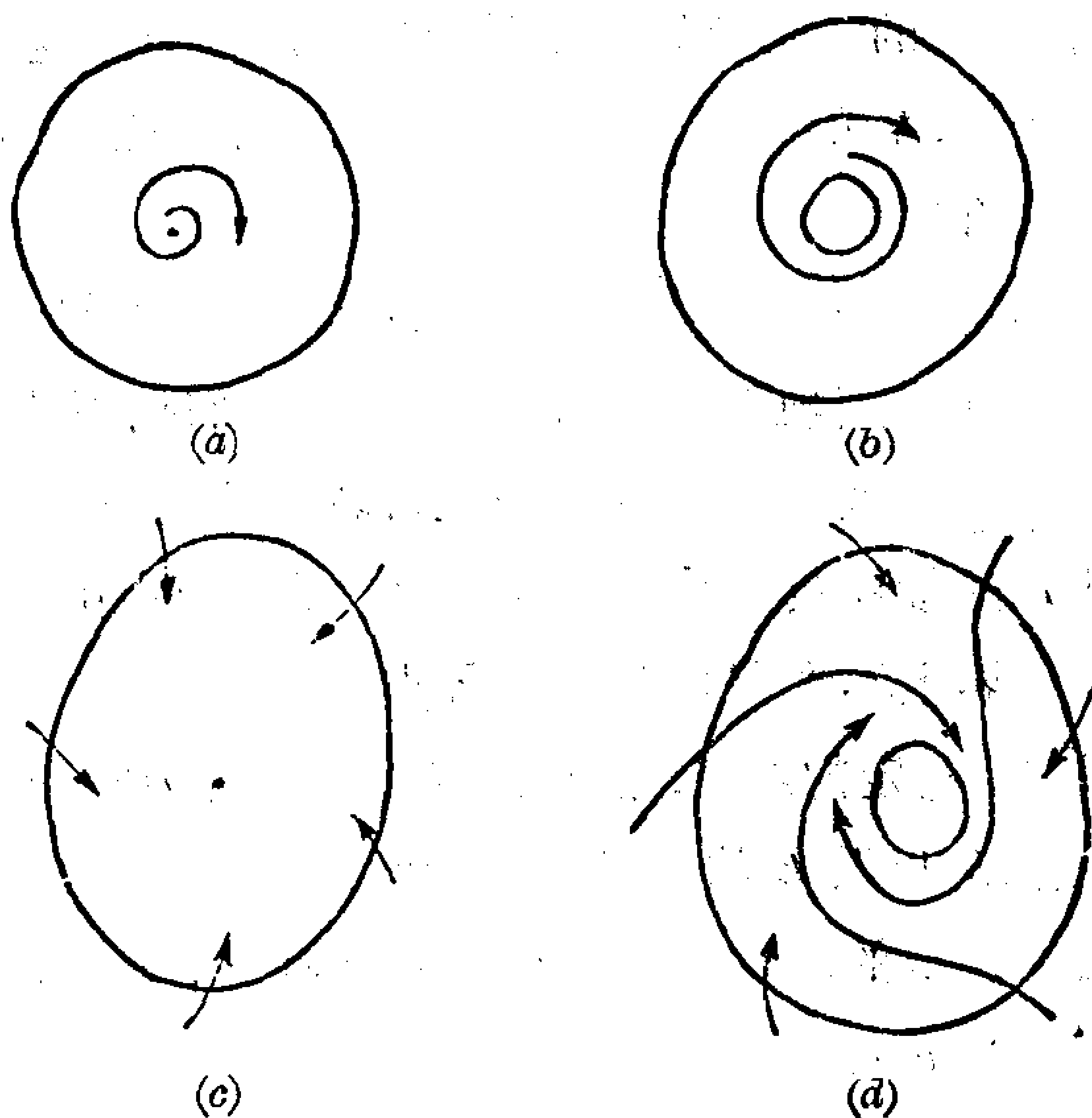


图 8·2

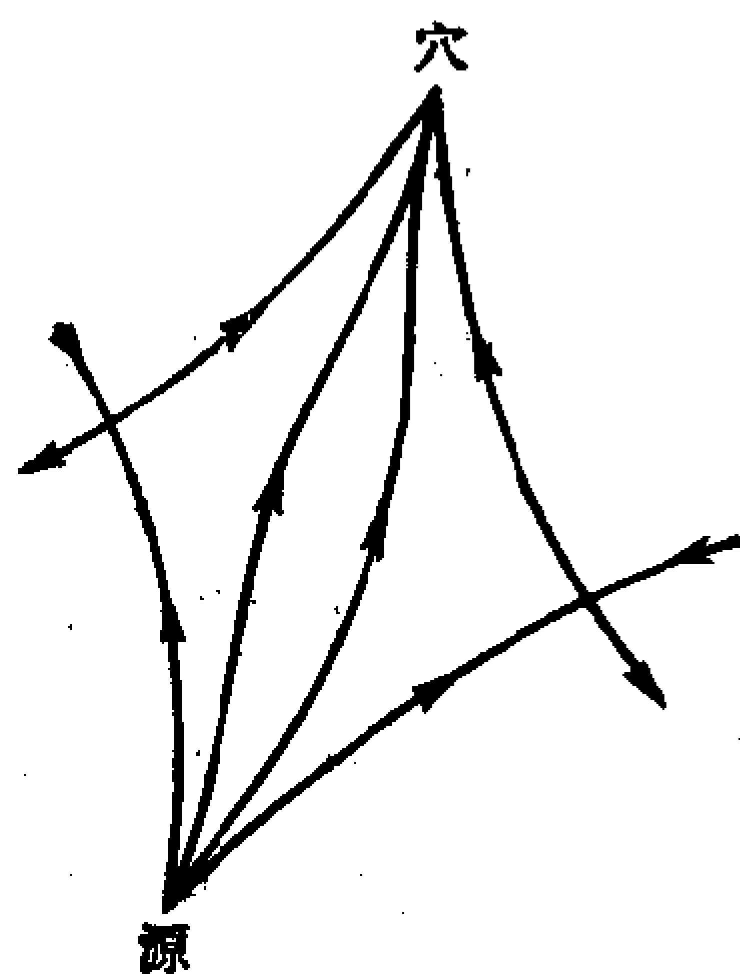


图 8·3

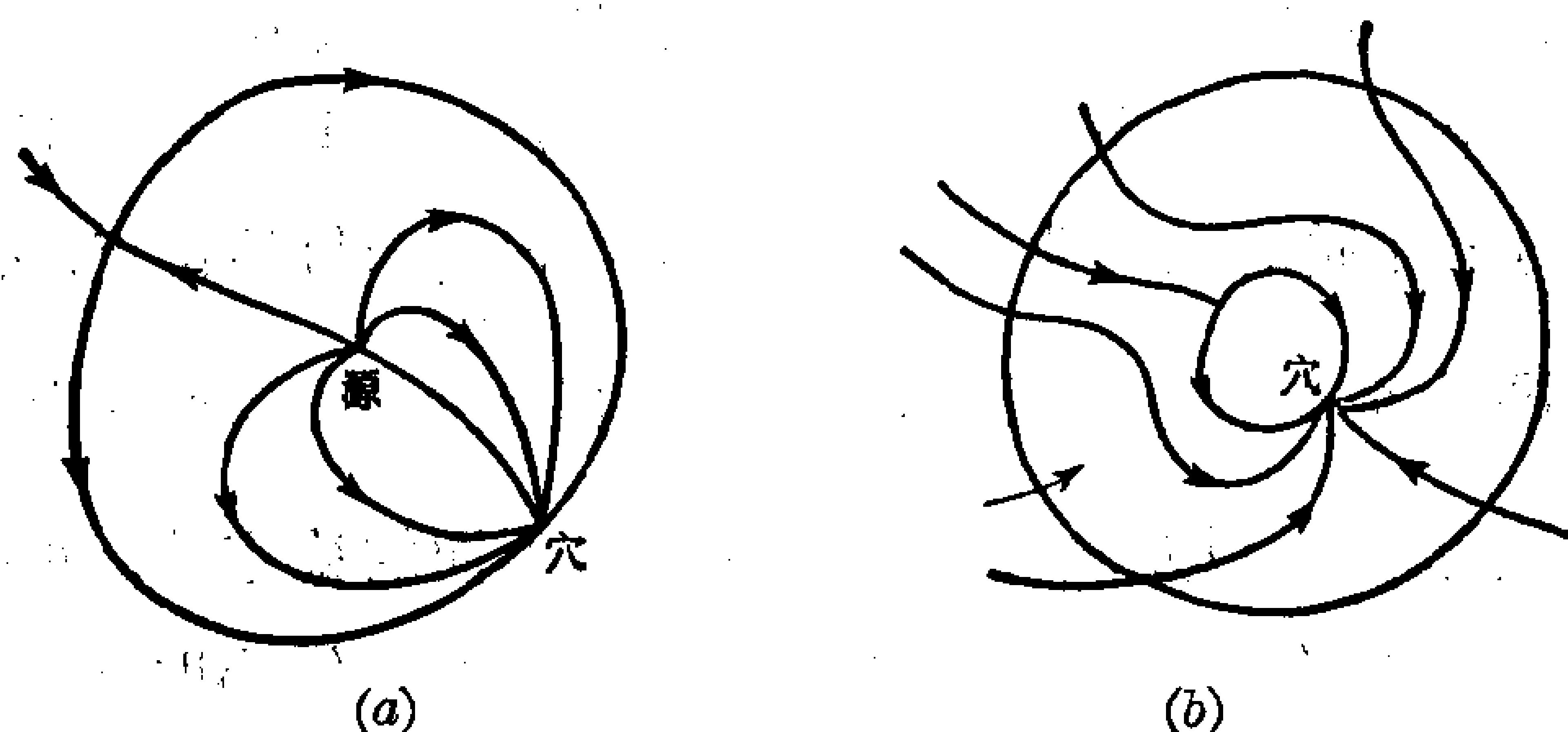


图 8·4

3. 境界上有一个源，一个穴，一个鞍点，三条分界线(图8·4(a)，(b))[1].

引理8·6 如果系统(I)满足条件(III)，则当δ足够小时，满足$\rho(\mathrm{I},\mathrm{II})<\delta$的系统(II)也满足条件(III)，且和(I)有同样多个以及同种类的奇轨线.

【证】 对于(I)的奇点O_i可以作一条很小的单闭曲线C_i包含O_i，而不包含其他奇点；C_i的指标就是O_i的指标. 当$\delta>0$足够小时，(II)与(I)在C_i上所确定的向量场不会取相反的方向. 因此C_i在两系统中的指标是一样的. 又因为只要C_i的半径与δ都很小，对(II)的任一在C_i内部的奇点，其一次近似方程的特征根

1) 图8·3，8·4中的源都可能是极限环或B的境界；穴也可能是极限环，为简单计，这里只画成一点。

的实部不为零，且与(I)在 O_i 的特征根有相同的符号，因此(II)在 C_i 内部有且只有一个初等奇点，其指标与 O_i 一样．但应注意，当 O_i 是(I)的(临界)结点时，C_i 内部可能出现(II)的焦点．从区域 B 中除去这些圆 C_i 的内部以后，在余下的区域中 $|P(x, y)|+|Q(x, y)|$ 有正的下界，因此当 δ 足够小时，

$$|P(x, y)+p(x, y)|+|Q(x, y)+q(x, y)|$$

在其中亦有正的下界，这样我们就证明了(II)与(I)在 B 中有同样个数具相同指标的初等奇点．

对于(I)的每一极限环 Γ_i，可以做它的小邻域 R_i，使其内外境界线都是无切曲线．当 $\delta>0$ 足够小时，R_i 的境界线对于(II)来说仍是具同样性质的无切曲线．又在 R_i 中没有(II)的奇点，故(II)在每一 R_i 中至少有一个极限环 Γ_i^*．考虑到 $\oint H(s)ds$ 不变号(只要 $\delta>0$ 足够小)，以及相邻的极限环必具不同的稳定性，可知(II)在每一 R_i 中只有一个极限环 Γ_i^*．又当 $\delta>0$ 足够小时在(I)的初等奇点附近不会出现(II)的极限环，在 B 中的其他部分也不会出现(II)的极限环，因此(I)与(II)有同样个数和同样种类的极限环．

最后，根据解对初值与参数的连续性易见：如果(I)有从源 A_1 到鞍点 B 的分界线 γ_1，有从鞍点 B 到穴 A_2 与 A_3 的分界线 γ_2 与 γ_3，且(II)在 A_i 及 B 的邻域中的奇点为 A_i^* 及 B^*，则(II)亦有从 A_1^* 到鞍点 B^* 的分界线 γ_1^*，从鞍点 B^* 到 A_2^* 与 A_3^* 的分界线 γ_2^* 与 γ_3^*．除了这些与(I)的分界线成1-1对应的分界线以外，(II)不可能再有其他的分界线了．引理证毕．

根据引理8·6可知，在(I)与(II)的有限个法域之间亦存在1-1对应，且相应的两法域类型相同．下面要作出(I)的法域 G_1 到(II)的对应法域 G_2 的同胚变换，使轨线对应于轨线，然后把不同法域上的点变换接合起来，成为区域 B 到它自身的同胚变换．今就前述的第2类法域来说明这种变换的作法，对于第1与第3

类，作法是差不多的.

先设(I)的第2类法域 G_1 的境界上的源 A 和穴 B 都不是极限环，G 上的鞍点记为 D_0 与 D_1(图 8·5). 以 $\{\gamma_\lambda\}(0\leqslant\lambda\leqslant\eta)$ 记 G_1 中轨线的全体，其中 γ_0 与 γ_η 分别表示从 A 到 D_0 与 D_1 的分界线，它们向 B 有延长 γ_0', γ_η'(也是分界线). 从 γ_0 上一点 M_0 到 γ_η 上一点 M_η 作此法域内的无切弧 C_α, γ_λ 与 C_α 的交点记为 M_λ, 且从 M_0 沿着 C_α 量到 M_λ 的弧长为 λ.

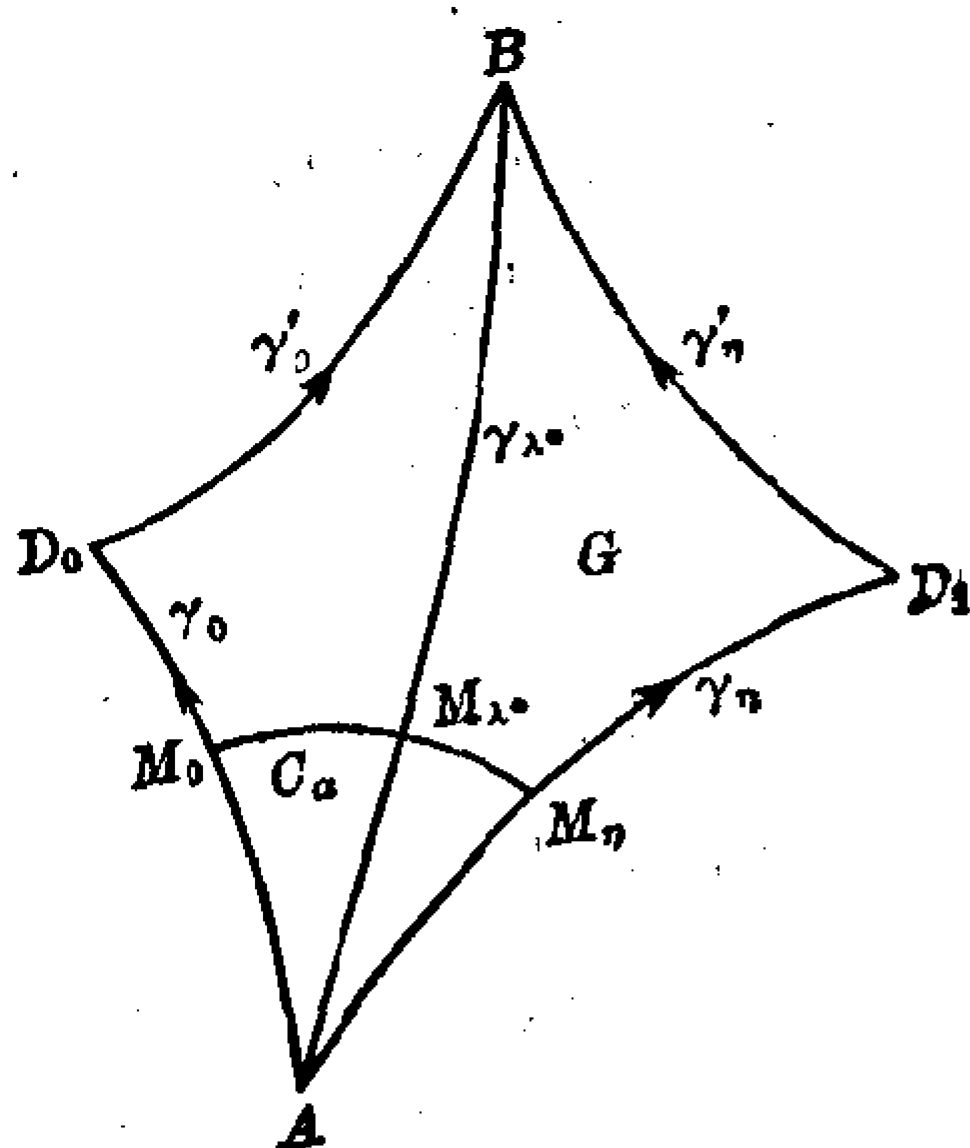


图 8·5

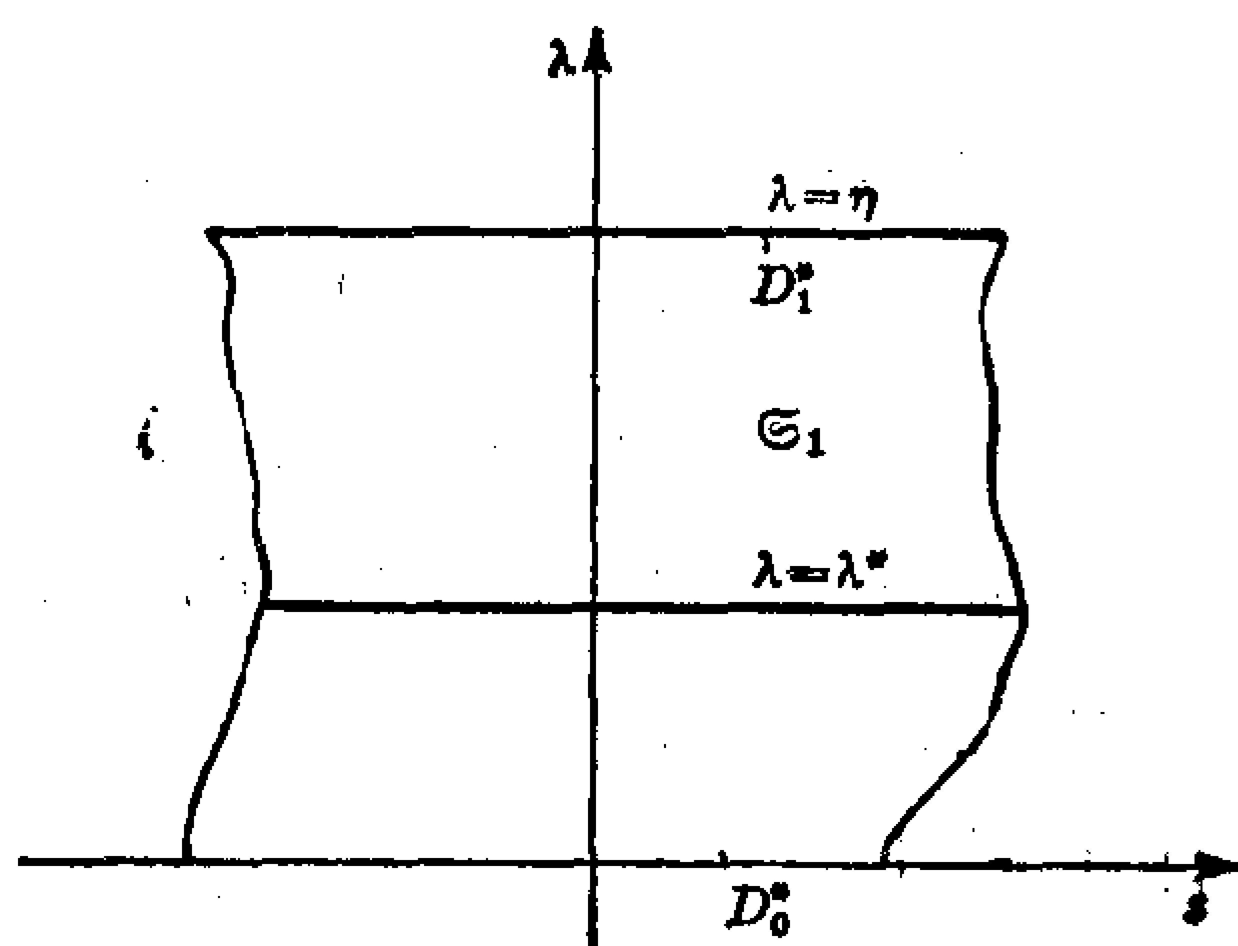


图 8·6

现在定义法域 G_1(除去 A 与 B 两点)到 (s, λ) 平面的曲边矩形 $\mathfrak{S}_1$ 的同胚变换 Φ(图 8·6), 使得 G_1 中的轨线 γ_{λ^*} 的象是 $\mathfrak{S}_1$ 中的直线段 $\lambda=\lambda^*$. 设 γ_{λ^*} 上从 M_{λ^*} 开始量起(向 A 为负，向 B 为正)到达弧长为 s^* 的点 $M_{\lambda^*}^{s^*}$, 则规定 $M_{\lambda^*}^{s^*}$ 的象是 (s^*, λ^*). 不论 A 与 B 是焦点还是结点，沿着 γ_λ 趋向 A 或 B 时弧长总趋向有限值，故 $\mathfrak{S}_1$ 的左右两头都是有界的. 设在此变换 Φ 之下，D_0 的象是 $\lambda=0$ 上的点 D_0^*, D_1 的象是直线 $\lambda=\eta$ 上的点 D_1^*.

与上面一样，可以定义(II)的第2类法域 G_2 到 $(\bar{s}, \bar{\lambda})$ 平面上的曲边矩形 $\mathfrak{S}_2$ 的同胚变换 Ψ(除去源 $\bar{A}$ 与穴 B 两点), 设此变换下 G_2 的鞍点 $\bar{D}_0$ 和 $\bar{D}_1$ 的象分别为直线 $\bar{\lambda}=0$ 上的点 $\bar{D}_0^*$ 与直线 $\bar{\lambda}=\bar{\eta}$ 上的点 $\bar{D}_1^*$. 现在不难建立 $\mathfrak{S}_1$ 与 $\mathfrak{S}_2$ 之间的同胚变换 Θ, 使

$\lambda=0$, D_0^*, $\lambda=\eta$ 和 D_1^* 分别对应于 $\bar{\lambda}=0$, $\bar{D}_0^*$, $\bar{\lambda}=\bar{\eta}$ 和 $\bar{D}_1^*$, 并且 $\mathfrak{S}_1$ 中平行于 s 轴的直线段对应于 $\mathfrak{S}_2$ 中平行于 $\bar{s}$ 轴的直线段. 把三个同胚变换 Φ, Θ, Ψ^{-1} 连接在一起, 并且规定 A 与 B 的象为 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$, 就得到法域 G_1 和 G_2 间的同胚映象.

当 A 是极限环时, 如果仍按上法去做, 则 $\mathfrak{S}_1$ 与 $\mathfrak{S}_2$ 的左边将是无界的, 这时如何定义 A 的点与(II)的相应的极限环 $\bar{A}$ 的点的变换, 使整个 G_1 与 G_2 间的映象为同胚, 就很不明显了.

今设 R 是 A 的一个甚小的开邻域, 它的境界 Γ(两条单闭曲线)对于(I)与(II)来说都是无切曲线(轨线穿过方向也相同), R 内部有(II)的唯一极限环 $\bar{A}$. 现在设法建立 R 到它自身的同胚变换, 使得 A 的象是 $\bar{A}$, 且(I)的轨线变为(II)的轨线.

在 A 上从某一定点量起, 到其弧长为 a 的点作法线 η_a, (I)的轨线与 η_a 的交点是排列成序的, 以 $i=\pm1, \pm2, \cdots$ 记 η_a 与每条轨线 γ_b(在 A 外部)或 $\gamma_{b'}$(在 A 内部)依次的交点, 这里, 第一个交点都在 Γ 上, 正整数 i 表示 γ_b 与 η_a 的交点, 负整数 $-i$ 表示 $\gamma_{b'}$ 与 η_a 的交点. 这样, $R\cup\Gamma$ 中除 A 以外的任何点都可以用 (a, b, i) 或 $(a, b', -i)$ 来表示, 其中 i 表示正整数.

假设 $B\backslash R$[1] 到它自身的同胚变换 T_1 已经定义好, 它把(I)的轨线变为(II)的轨线, T_1 在 R 的境界 Γ 上确定了变换

$$(a, b, 1)\to(\varphi^+(a), \psi(b), 1),$$

$$(a, b', -1)\to(\varphi^-(a), \omega(b'), -1),$$

其中 $(\varphi^+(a), \psi(b), 1)$ 与 $(\varphi^-(a), \omega(b'), -1)$ 表示(II)的相应轨线与 Γ 的交点, $\varphi^+(a)$, $\varphi^-(a)$, $\psi(b)$ 与 $\omega(b')$ 都是单调增加函数. 今定义 $R\backslash A$ 到 $R\backslash\bar{A}$ 的变换 T_2 如下:

$$(a, b, i)\to(\alpha, \psi(b), \bar{i}),$$

$$(a, b', -i)\to(\alpha, \omega(b'), -\bar{i}),$$

---

1) $B\backslash R$ 表示 R 在 B 中的余集.

其中
$$\alpha=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{i}\right)\varphi^{+}(a)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{i}\right)\varphi^{-}(a),$$

$\bar{i}$ 表示 η_a 在 $\bar{A}$ 外部的线段与(II)的轨线 $\bar{\gamma}_{\psi(b)}$ 的第 i 个交点，$-\bar{i}$ 表示 η_a 在 $\bar{A}$ 内部的线段与(II)的轨线 $\bar{\gamma}_{\omega(b')}$ 的第 i 个交点. 首先可以看出 T_2 是 1-1 对应的变换. 否则，设有 $a_2>a_1$，使两点 (a_1, b, i) 与 (a_2, b, i) 都对应于同一点 $(\alpha, \psi(b), \bar{i})$，则

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)[\varphi^{+}(a_1)-\varphi^{+}(a_2)]=\left(1-\frac{1}{i}\right)[\varphi^{-}(a_2)-\varphi^{-}(a_1)],$$

这与 $\varphi^{+}(a)$, $\varphi^{-}(a)$ 同为单调增加函数的性质相违背，故不可能. 其次，易见它是双方连续的，并且把(I)的轨线变为(II)的轨线. 最后令 $i\to\infty$ 就可得到两环 A 与 $\bar{A}$ 之间的变换，这样就把 T_2 扩充为 R 到它自身的同胚变换. 再把 T_2 与 T_1 连接在一起，就得到 B 到它自身的同胚变换，使(I)的轨线变成(II)的轨线. 定理 8·2 证毕.

两定理 8·1 和 8·2 合在一起说明条件(III)是结构稳定的充分必要条件.

上述定理于 1962 年被 M. M. Peixoto[145] 推广到二维紧致微分流形 M^2 上去. 他证明:

定理 8·3 M^2 上定义的微分系统为结构稳定的充要条件是: 条件(III)再加

4. 每一轨线的 α 与 ω 极限集只能是奇点或闭轨线.

然而 Peixoto 的更重要的贡献是同一文中的另一定理:

定理 8·4 若 M^2 上一切微分系统所成的 Banach 空间为 B，一切结构稳定系统构成 B 的子集 Σ，则 Σ 在 B 中是开而且稠密的[1].

对于极限环理论感兴趣的同志自然会想到下面的问题: 如果限制方程(I)右端的函数 P, Q 只能在较狭窄的函数类(例如，多项式类)中变动时，条件(III)是否仍为结构稳定的必要条件? 容易看

1) 1978 年 C. Gutierrez[149] 中指出还应假定 M 是可定向的.

出，假如我们是在 Poincaré 闭半球面 $\overline{\Omega}$(即带有赤道的半球面)上研究多项式系统[1)]，那末赤道 E 常常就是连接两鞍点的轨线，换言之，条件(III)的 3)就不可能成立了.

因此，$\overline{\Omega}$ 中多项式结构稳定系统的特征是：

1．在 $\overline{\Omega}$ 内部和 E 上只有有限个奇点，且都是双曲奇点(即一次近似方程的特征根不具零实部的初等奇点)；

2．在 $\overline{\Omega}$ 内部只有有限条闭轨，当 E 上无奇点时它也可能是闭轨；这些闭轨都是单重极限环；

3．没有连接鞍点与鞍点的轨线，除了可能是 E 以外.　　(VI)

其次是在多项式系统(设 P, Q 的次数都 $\leqslant n$, n 为固定的自然数)所成的 Banach 空间 X 中，具性质(VI)的一切结构稳定系统的集合 X_S 是否为开且稠密？关于这个问题，罗定军[150] 已有所研究，虽然还有一点遗留问题.

定理 8·5　在上述记号之下，X_S 为 X 的开稠密子集.

【证】 开性由结构稳定性立刻可得，下面证明稠密性. 为此，引进一些介于 X_S 与 X 之间的中间集合：

$X_\infty=\{$(I)$\in X$: (I)在 E 上若有奇点，它只能是双曲奇点；若 E 是(I)的闭轨，则它应是单重极限环$\}$；

$X_H=\{$(I)$\in X_\infty$: (I)在 $\overline{\Omega}\backslash E$ 中只有双曲奇点$\}$；

$X_C=\{$(I)$\in X_H$: (I)没有连接鞍点与鞍点的非赤道轨线$\}$.

由定义显见有

$$X_S\subset X_C\subset X_H\subset X_\infty\subset X.$$

这里要证 X_∞ 稠密于 X(见[151])，X_H 稠密于 X_∞，X_C 稠密于

1) 读者以后会看到，这样做是十分必要的. 反之，在 $\overline{\Omega}$ 中我们也只能研究多项式系统，因为只有对这种系统才能借助于球心投影和齐次坐标把它变到 $\overline{\Omega}$ 中去.

X_H(见[152])都比较容易，作为习题．下面只证明 X_S 稠密于 X_C，关于这一点，[152]中的证明是有问题的．

在 X_C 内任取一点，即一多项式系统，它具有(VI)的几乎所有的性质，只是在有限平面中它可能有多重极限环 Γ．今要将此系统作微小的摄动(但摄动系统现在仍应是次数 $\leqslant n$ 的多项式系统)而消除这一性质，那末就可得出 X_S 中的点．取摄动系统为 $(P-\alpha Q, Q+\alpha P)$，其中 $0<|\alpha|\ll 1$．当 Γ 为周期环或偶重环的情况，由 §3 知道，当 $|\alpha|>0$ 且 α 取适当的符号时，$(P-\alpha Q, Q+\alpha P)$ 将不存在位于 Γ 邻近的极限环，故目的已达到．但若 Γ 为奇重的多重环，则引理 8·4 的证明失效，因为其中的摄动系统(V)未必是多项式系统．所以我们得改用其他方法来证明这个引理．

由 §2 知道发散量沿闭轨线关于 t 积分一周的值可以改用正交轨线的曲率沿闭轨线关于弧长积分一周的值来代替．今取 Γ 以弧长 s 为参数的方程为：$x=f(s)$，$y=g(s)$，$0\leqslant s\leqslant l$，l 是 Γ 的周长．于是有

$$E=\int_0^T (P_x+Q_y)dt=\int_0^l H(s)ds$$

$$=\int_0^l (P^2+Q^2)^{-\frac{3}{2}}[P^2Q_y-PQ(P_y+Q_x)+Q^2P_x]ds. \qquad \text{(VII)}$$

假设当 $|\alpha|$ 甚小时在 Γ 邻近有系统 $(\bar{P}=P-\alpha Q,\ \bar{Q}=Q+\alpha P)$ 的闭轨线 Γ_α: $x=f_\alpha(s)$，$y=g_\alpha(s)$，其弧长为 $l(\alpha)$，这里 $f_0(s)=f(s)$，$g_0(s)=g(s)$，$l(0)=l$，相应的积分值为

$$E(\alpha)=\int_0^{l(\alpha)} \bar{H}(s)ds,$$

其中 $\bar{H}(s)$ 是由 H 中改 P, Q 为 $\bar{P}, \bar{Q}$，改 $f(s)$，$g(s)$ 为 $f_\alpha(s)$，$g_\alpha(s)$ 而得到的．当 $|\alpha|$ 充分小时 Γ_α 保持在 Γ 邻近的环域中，在该环域内 $\bar{P}$，$\bar{Q}\in C^1$，且系统无奇点，故可将 $\bar{H}(s)$ 依 α 展开为

$$\bar{H}(s)=(\bar{P}^2+\bar{Q}^2)^{-\frac{3}{2}}[\bar{P}^2\bar{Q}_y-\bar{P}\bar{Q}(\bar{P}_y+\bar{Q}_x)+\bar{Q}^2\bar{P}_x]$$

$$=(P^2+Q^2)^{-\frac{3}{2}}\{[P^2Q_y-PQ(P_y+Q_x)+Q^2P_x]$$

$$+\alpha[Q^2P_y+PQ(P_x-Q_y)-P^2Q_x]+\alpha^2O(1)\},$$

而 x, y 在 $f_\alpha(s), g_\alpha(s)$ 取值. 由于 $\bar{P}, \bar{Q}$ 关于 α 为线性, 所以 $f_\alpha(s), g_\alpha(s), l(\alpha)$ 都是 α 的解析函数,从而 $E(\alpha)$ 亦然.

现在证明不存在 $\alpha_0>0$, 使对一切 α, $0\leqslant|\alpha|\leqslant\alpha_0$, 成立 $E(\alpha)\equiv0$. 用反证法. 假设存在这种 α_0, 那末对 $\alpha\in(0, \alpha_0)$ 必有

$$E(\alpha)=E(0)+E'(0)\alpha+\cdots\equiv0,\ E(0)=E=0,$$

从而 $E'(0)=0$. 另一方面有

$$E'(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}\int_0^{l(\alpha)}\bar{H}(s)ds=\bar{H}(l(\alpha))l'(\alpha)+\int_0^{l(\alpha)}\frac{d}{d\alpha}\bar{H}(s)ds$$

$$=\{(P^2+Q^2)^{-3/2}[P^2Q_y-PQ(P_y+Q_x)+Q^2P_x]$$

$$+\alpha[Q^2P_y+PQ(P_x-Q_y)-P^2Q_x]+\alpha^2O(1)\}l'(\alpha)$$

$$+\int_0^{l(\alpha)}\left\{\frac{d}{d\alpha}\{(P^2+Q^2)^{-\frac{3}{2}}\right.$$

$$\cdot[P^2Q_y-PQ(P_y+Q_x)+Q^2P_x]\}$$

$$\left.+[Q^2P_y+PQ(P_x-Q_y)-P^2Q_x]\right\}ds+\alpha O(1).$$

令 $\alpha=0$, 则上式左端为零,右端第三项为零. 又由于 $f_0(l(0))=f(0)$, $g_0(l(0))=g(0)$, 故右端第一项$\{\cdots\}$内成为

$$\{(P^2+Q^2)^{-\frac{3}{2}}[P^2Q_y-PQ(P_y+Q_x)+Q^2P_x]\}_{(f(0),g(0))},$$

此值依赖于 Γ 上量度弧长的起始点$(f(0), g(0))$, 该点可以在 Γ 上任意取定. 但第一项的后一因子 $l'(\alpha)$ 以及第二项的积分都与量度弧长的起点无关,故后二者都应等于零,由此易见应有

$$l'(\alpha)\equiv0,\quad \alpha\in(-\alpha_0, \alpha_0).$$

这是因为已知 $l'(\alpha)|_{\alpha=0}=0$; 又对 $\alpha_1\in(-\alpha_0, \alpha_0)$, 我们可以把系统 $(P-\alpha_1Q, Q+\alpha_1P)$ 作为初始的未被摄动的系统来考虑, 即改记 $\alpha=\alpha_1+\beta$ $(\bar{P}=(P-\alpha_1Q)-\beta Q,\ \bar{Q}=(Q+\alpha_1P)+\beta P)$, 固

定 α_1, $(\bar{P}, \bar{Q})$关于β也构成旋转向量场，于是同前一样可证 $l'(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1}=0$.

这样，当向量场旋转时极限环的长度应保持不变. 但按§3我们知道，如果极限环不消失，则它应单调扩大或缩小. 在这里虽然面积的扩大(缩小)不一定就能明显地看出周长也应增长(缩短)，但我们相信对于多项式系统来说应该是如此的[1]. 这一矛盾说明(P, Q)总可经过摄动成为$(\bar{P}, \bar{Q})$，而使对应的发散量沿闭轨线积分一周之值不为零，定理证毕.

关于可微流形上的可微动力系统的大范围性质的研究，自从前述 Peixoto 的文章 [145] 以后，在美国有 S. Smale 所领导的学派，在苏联有 D. V. Anosov, V. I. Arnold, 在我国有廖山涛等人都做了许多重要的工作，成为新的数学分支"大范围分析"的一个重要组成部分. 近年来又有人把这些比较抽象的结果用于研究具体的常微分方程的分枝理论与定性理论，尤其值得我们重视，有兴趣的读者可以看[153], [154], [155], [156], [157], [158]等文章与专著.

1) 尚待补充严格的证明.

§9. M. Frommer 和 H. H. Баутин 的工作

本书从现在开始进入对于多项式系统

$$\frac{dx}{dt}=P_n(x,\ y),\quad \frac{dy}{dt}=Q_n(x,\ y) \tag{9·1}$$

的极限环问题以及轨线全局结构的研究. 然而当 n 为一般的正整数时, 除了 H. Dulac 1923 年的长文[4] 以外, 其他只有一些零碎的工作. 前者已于 1980 年被译成俄文以单行本出版[147], 此外叶述武同志从法文直接翻译的中文本不久亦将问世, 故不再在此介绍; 后者我们将在本书以后各节的正文或习题中穿插介绍一些.

因此从这一节起我们将主要介绍二次多项式方程(以后简称为二次系统):

$$\frac{dx}{dt}=\sum_{i+k=0}^{2}a_{ik}x^iy^k,\quad \frac{dy}{dt}=\sum_{i+k=0}^{2}b_{ik}x^iy^k \tag{9·2}$$

的极限环问题和轨线全局结构. 可以说, 关于方程(9·2)的极限环的研究是极限环论中最引人入胜和最有启发性的部分. 原因很简单, 一次系统(即线性系统)可求出通积分, 它没有极限环, 并且轨线定性性态的详细讨论已写入常微基础课教材. 因此(9·2)就是最简单的非线性系统. 除去一些特殊情况以外, (9·2)一般来说不能求通解, 甚至一个首次积分也得不到. 然而(9·2)的水平和铅直等倾线都是二次曲线, 因而其极限环和轨线便具有某些比较特殊的性质, 故有可能对它作比较深入的研究; 同时由此又可引出许多值得考虑的一般性问题, 解决了这些问题无疑将会推动平面定性理论的发展. 另一方面, 从实用的角度来看, 近代大量工程技术以及

自然科学领域中的问题，其数学模型很多可以化为二次或三次系统，这一点读者在 §§ 5—6 中已经看到了. 因此对(9·2)的定性研究也就有着重要的实际意义.

关于二次系统，最早是研究它存在中心点时系数所应满足的充要条件. 对这个问题，H. Dulac[5] 和 M. Frommer[6] 都有研究，但[6]除了得到充要条件以外，还画出相应的轨线图. 最后，在[159]中还画出在出现中心点的所有情况下的射影平面轨线图. 本节将主要根据[6]来叙述这个问题，但在求首次积分时也采用[5]中的方法.

把(9·2)的两方程相除以消去 dt，并改写为

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+ax^2+(2b+\alpha)xy+cy^2}{y+bx^2+(2c+\beta)xy+dy^2} \tag{9·3}$$

的形式，这在研究中心点问题时是允许的. 因为(9·2)以原点(0, 0)为奇点，如果其右端不存在线性项，或是有线性项，但线性部分的特征根不是纯虚数，那末(0, 0)一定不可能成为中心点；当(9·2)的线性部分的特征根是一对纯虚根时，就可以通过 x, y 的线性变换而使(9·3)具有如上所写的形式.

I. 若 $\alpha=\beta=0$，则(9·3)可积分而得一系三次代数曲线:

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{a}{3}x^3+bx^2y+cxy^2+\frac{d}{3}y^3=\text{const}. \tag{9·4}$$

关于曲线族(9·4)的图形可按其渐近线的数目和(9·3)的奇点的数目来分类. 例如图 9·1, 9·2, 9·3, 9·4 都只具有一条实的渐近线，其中图 9·1 除原点外还有一个实奇点，图 9·2 和 9·3 则除原点外还有三个不同的实奇点，方程(9·3)这时有两个中心点. 由图9·2 可以连续变形而得图 9·4，后者有一个两重奇点和两个单奇点. 图 9·5 中除原点外还有一个三重奇点，它可借方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+xy}{y+\dfrac{x^2}{2}+y^2} \tag{9·5}$$

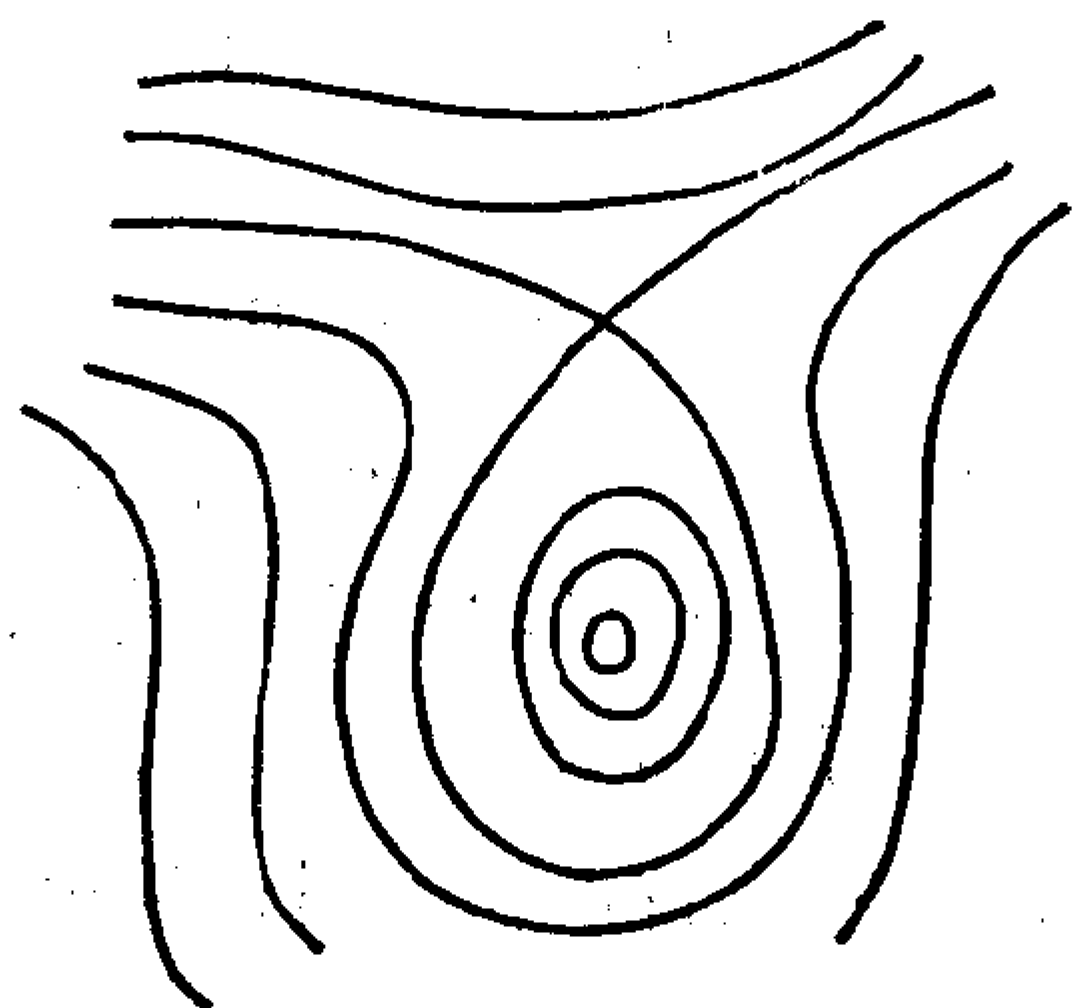


图 9·1

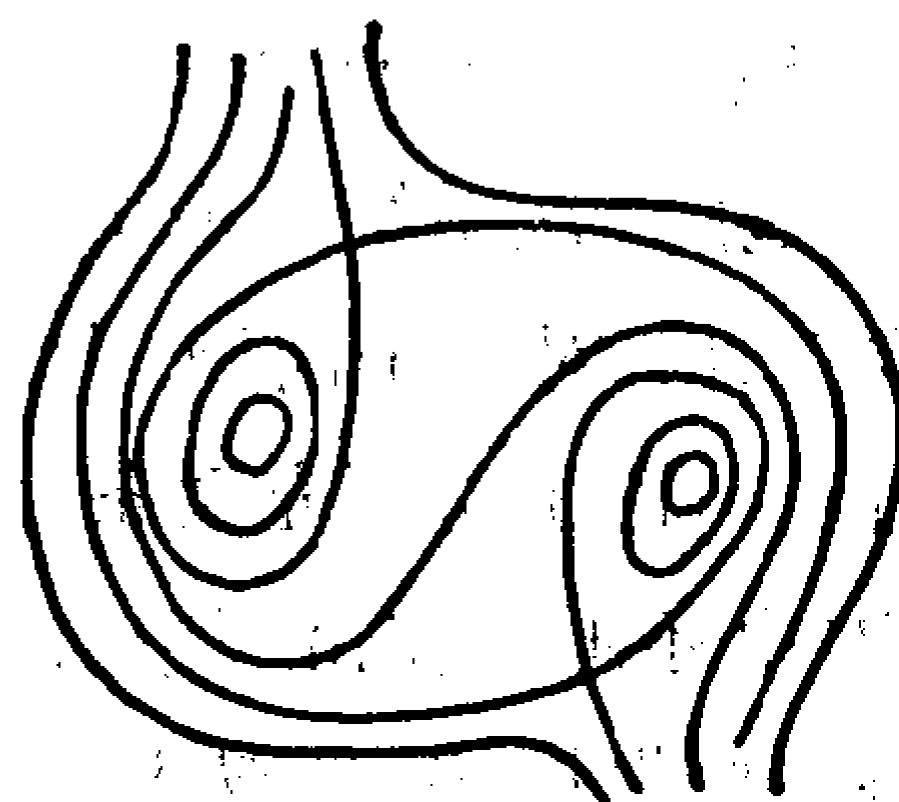


图 9·2

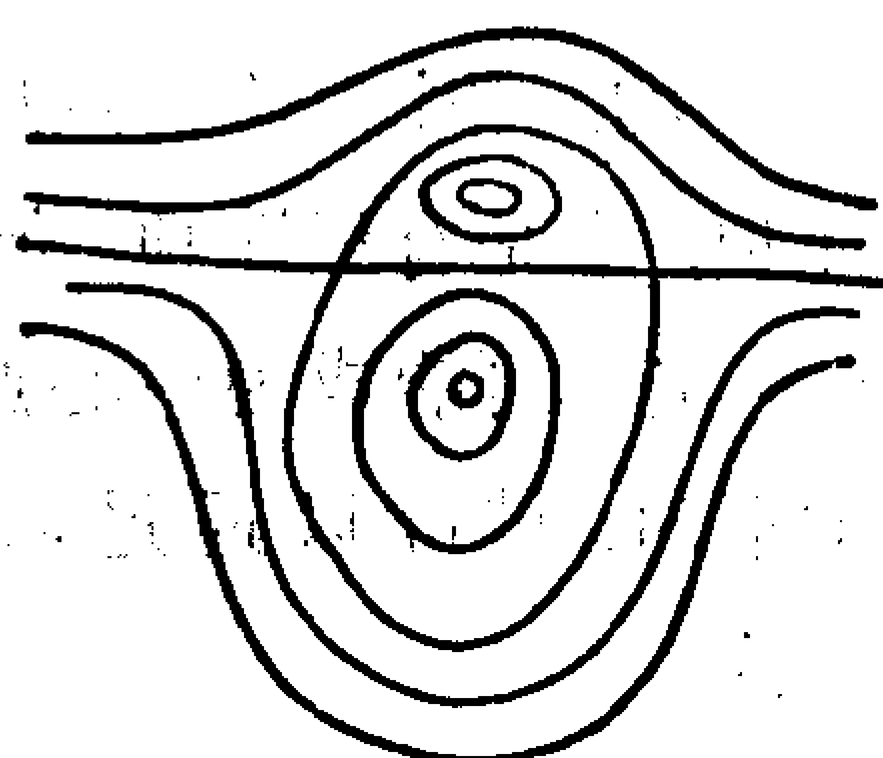


图 9·3

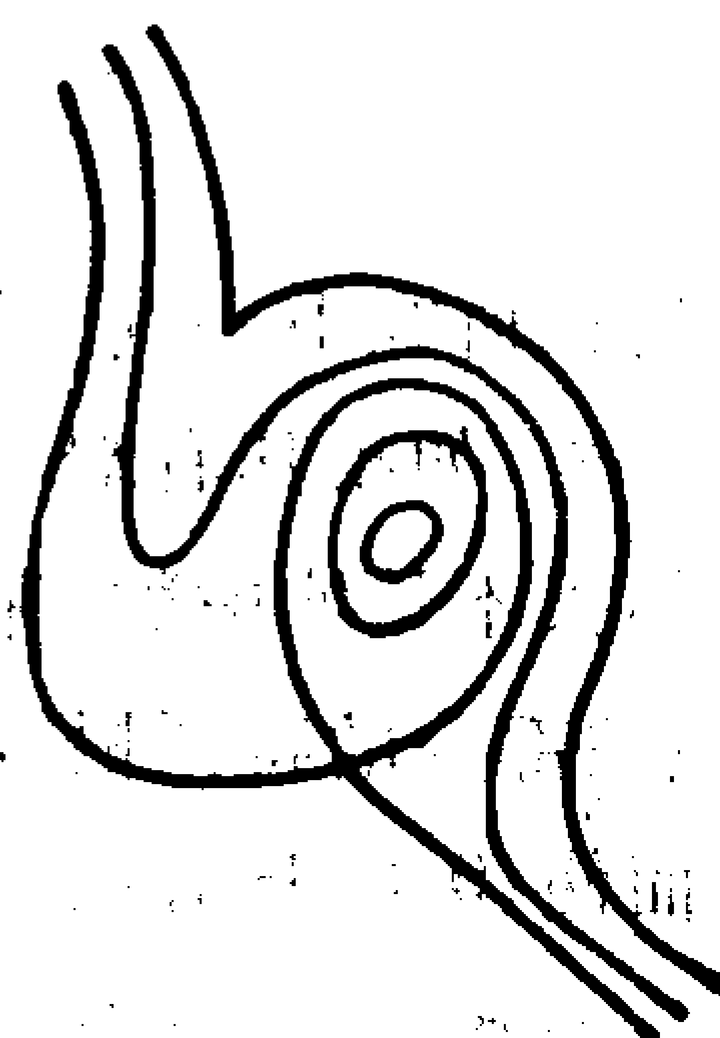


图 9·4

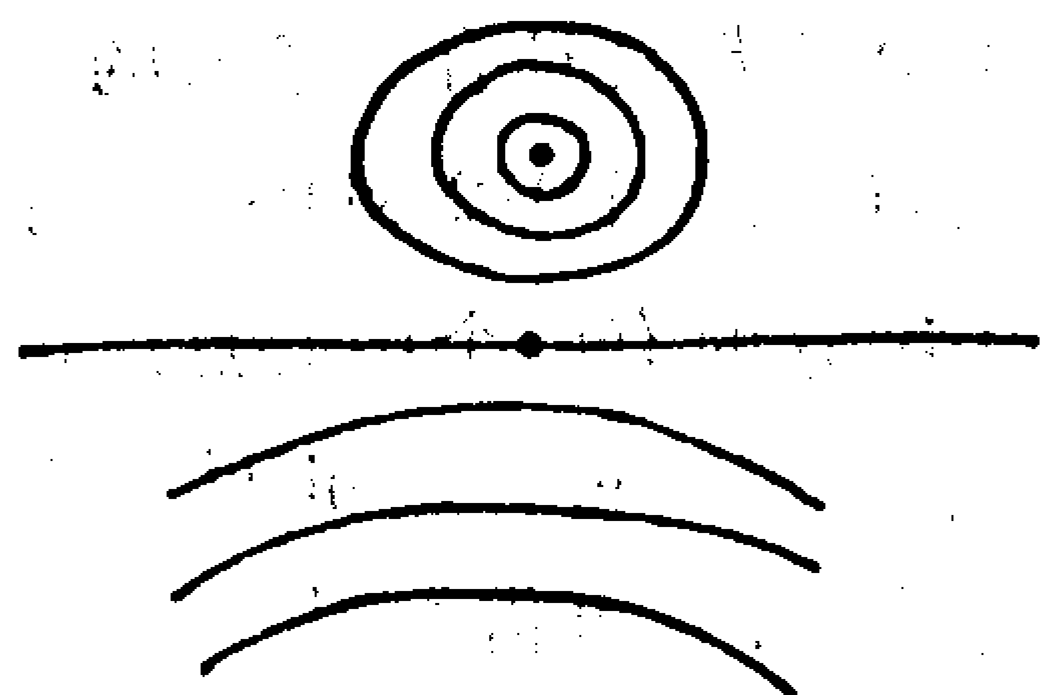


图 9·5

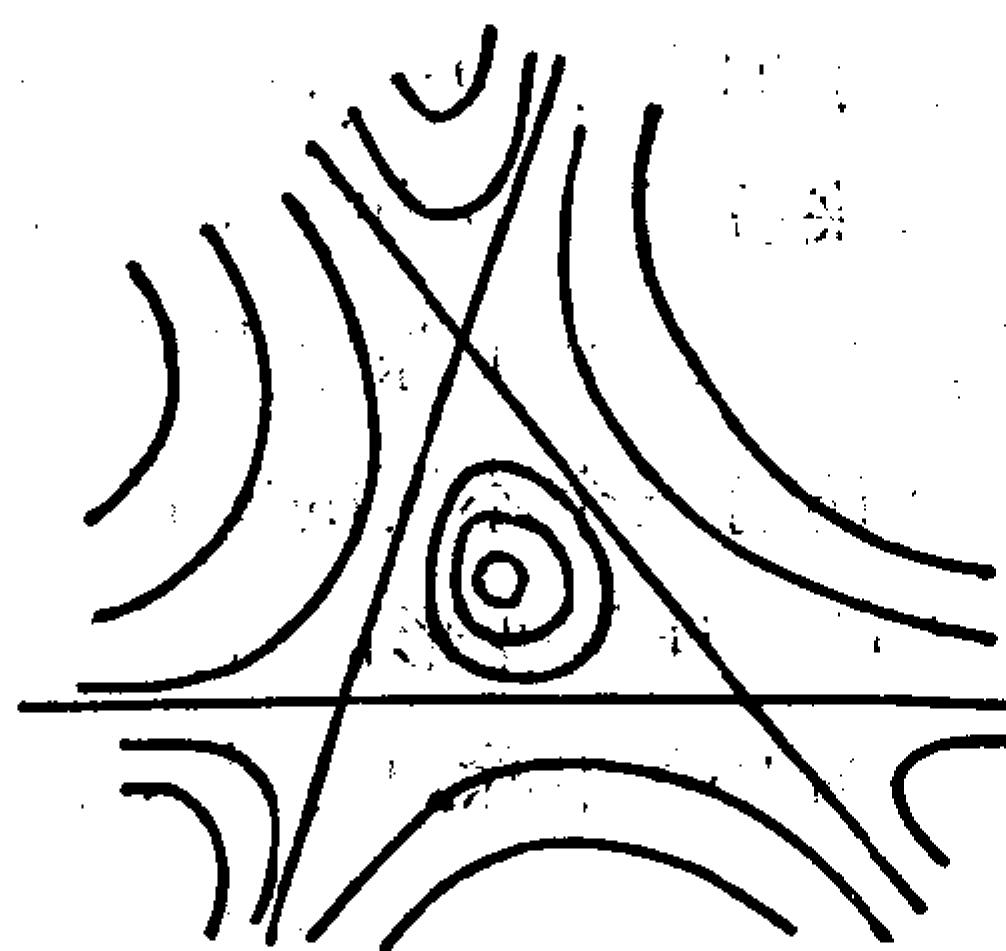


图 9·6

来实现，其中(0, −1)是 $y+\frac{x^2}{2}+y^2=0$ 与 $x(1+y)=0$ 的三重交点.

图 9·6, 9·7 和 9·8 都有三条实渐近线，其中包围中心点的闭曲线族的境界上分别有三个鞍点，两个鞍点和一个鞍点，但每一图中都有三个鞍点. 让图 9·8 中左下角的鞍点趋向无限远，则两个渐近方向互相重合，无限远直线为重渐近方向，其上的两个指标 +1 的初等奇点与趋向无限远的鞍点重合而成为指标 +1 的高阶奇点，我们就得到图 9·9.

图 9·10 是三个渐近方向重合的情况，它可由

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y-y^2} \tag{9·6}$$

来实现.

II. $|\alpha|+|\beta|\neq0$. 按熟知的方法计算(9·3)的奇点(0, 0)的第一个焦点量(见[67]第二篇第二章)，可得

$$D_1=\frac{1}{6}[\alpha(a+c)-\beta(b+d)]. \tag{9·7}$$

因此，要出现中心点，必须

$$\alpha(a+c)=\beta(b+d). \tag{9·8}$$

下面再分三种情况来讨论.

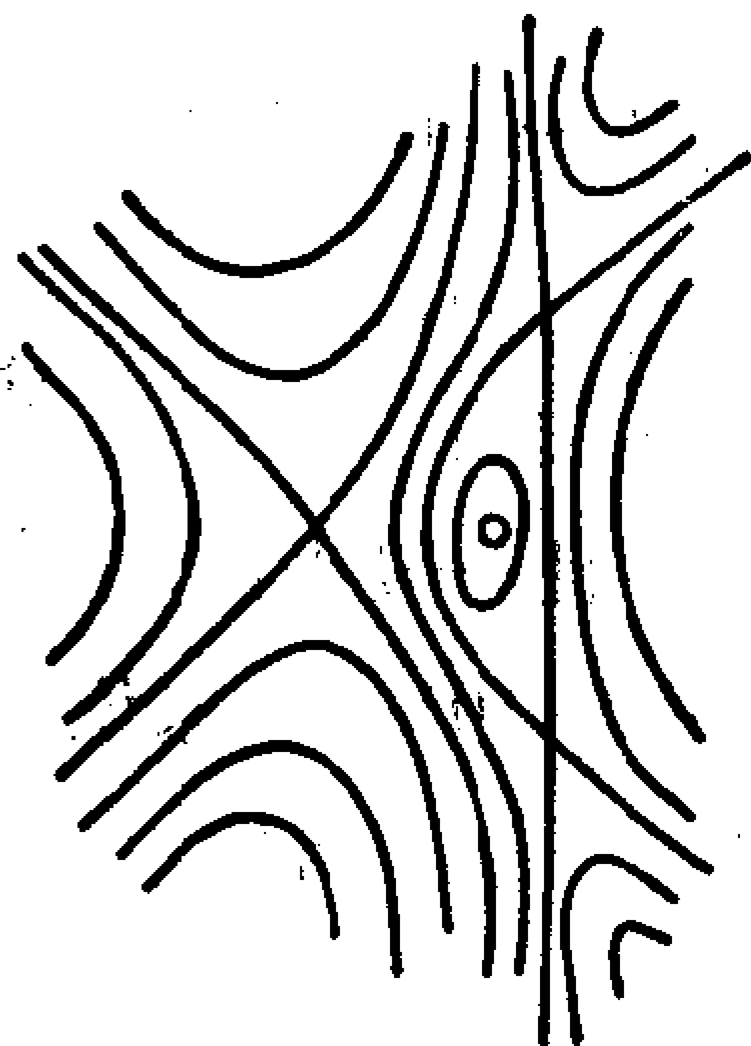


图 9·7

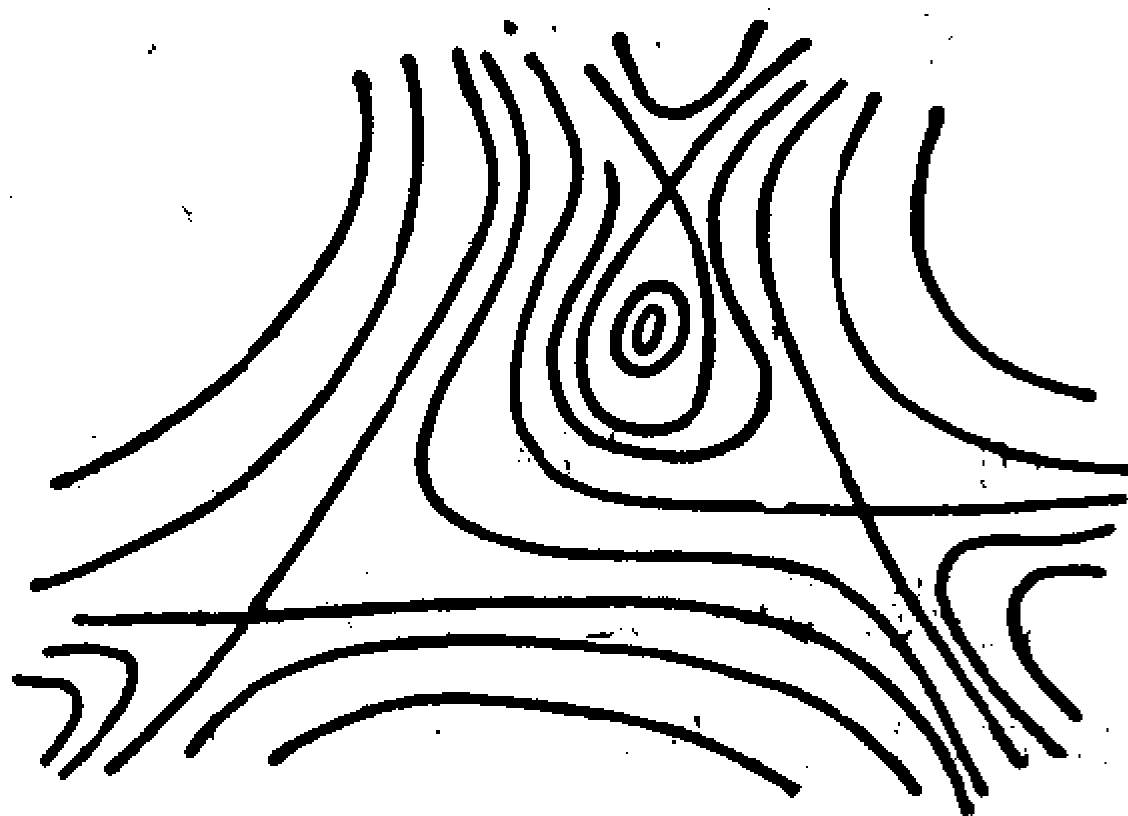


图 9·8

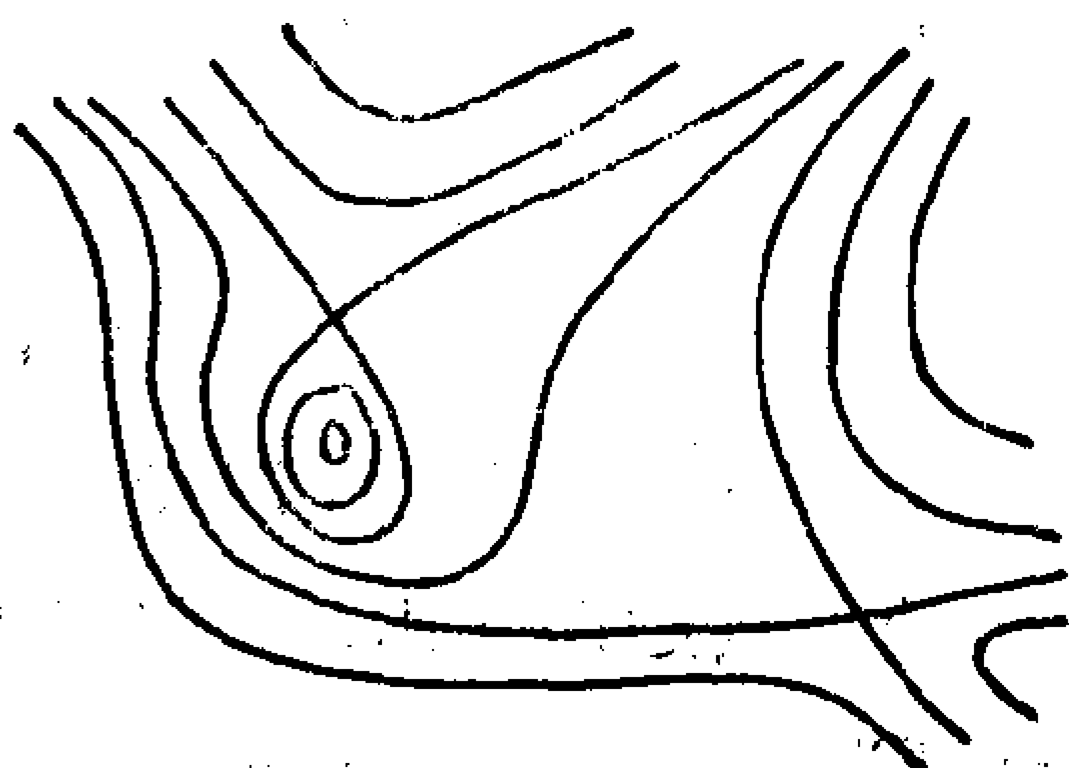


图 9·9

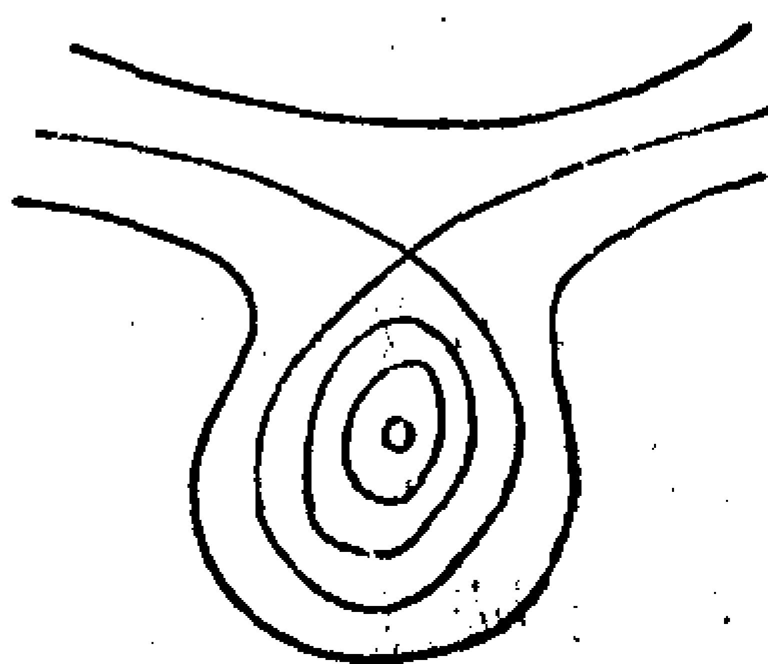


图 9·10

II_1. $a+c=b+d=0$. 易证这一性质对于转轴变换是不变的. 将坐标轴旋转一角度 φ, 所得新方程中 x^2 的系数为

$$\bar{a}=a\cos^3\varphi+(\alpha+3b)\cos^2\varphi\sin\varphi$$
$$+(\beta-3a)\cos\varphi\sin^2\varphi-b\sin^3\varphi, \tag{9·9}$$

因此总可选取 φ, 使 $\bar{a}=0$, 从而又有 $\bar{c}=0$, 于是新方程(仍用 x, y 来记两个变量)可写为

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+a'xy}{y+b'x^2+c'xy-b'y^2}. \tag{9·10}$$

由此可见方程除奇点 $(0, 0)$ 以外还有奇点$\left(0, \frac{1}{b'}\right)$, 以及积分直线 $y=-\frac{1}{a'}$. 若还有其他奇点, 则应位于此直线上. 现在作变换

$$x=\frac{\xi}{1+b'\eta},\quad y=\frac{\eta}{1+b'\eta}, \tag{9·11}$$

其目的是把奇点$\left(0, \frac{1}{b'}\right)$移到无限远去. 于是(9·10)变为

$$\frac{d\eta}{d\xi}=-\frac{\xi[1+(a'+2b')\eta+b'(a'+b')\eta^2]}{\eta[1+c'\xi-b'(a'+b')\xi^2]}. \tag{9·12}$$

(9·12)是可以分离变量求通积分的, 并且一般来说, 它有四条积分直线, 其中之一就是 $1+b'\eta=0$, 因而(9·10)一般来说有三条积分直线, 但当 $c'^2+4b'(a'+b')<0$ 时只有一条. 当然, 无限远直线可以看做是(9·10)的第四条积分直线.

把(9·12)积分, 可得幂级数形式的通积分

$$\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)-\frac{1}{3}[c'\xi^3+(a'+2b')\eta^3]+\cdots=\text{const}.$$

回到(x, y)坐标，得到

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{3}[c'x^3-3b'x^2y+(a'-b')y^3]+\cdots=\text{const}. \tag{9·13}$$

此级数有不为零的收敛半径，故$(0, 0)$是中心点，因为(9·13)在$(0, 0)$附近的轨迹是闭曲线.

当然，(9·12)，从而(9·10)的通积分也可用幂函数，反三角函数与指数函数等的有限形式表示出来．因此要确定积分曲线的全局结构图也是可能的.

积分曲线族可按其积分直线的条数，以及是否有两条或三条积分直线重合来分类．图 9·6(它可以同时作为情况 I 和情况 II_1 的全局结构图而出现)代表的是三条积分直线互不相同的情况[1]；图 9·11 代表的是有两条积分直线重合的情况[2]；图 9·12 代表的是三条积分直线互相重合的情况；图 9·13 代表的是四条积分直线都重合于无限远(即 $a'=b'=c'=0$)，而积分曲线族是一系同心圆的情况．如果有限远处只有一条实的积分直线，即前面提到的 $c'^2+4b'(a'+b')<0$ 的情况，则有图 9·14.

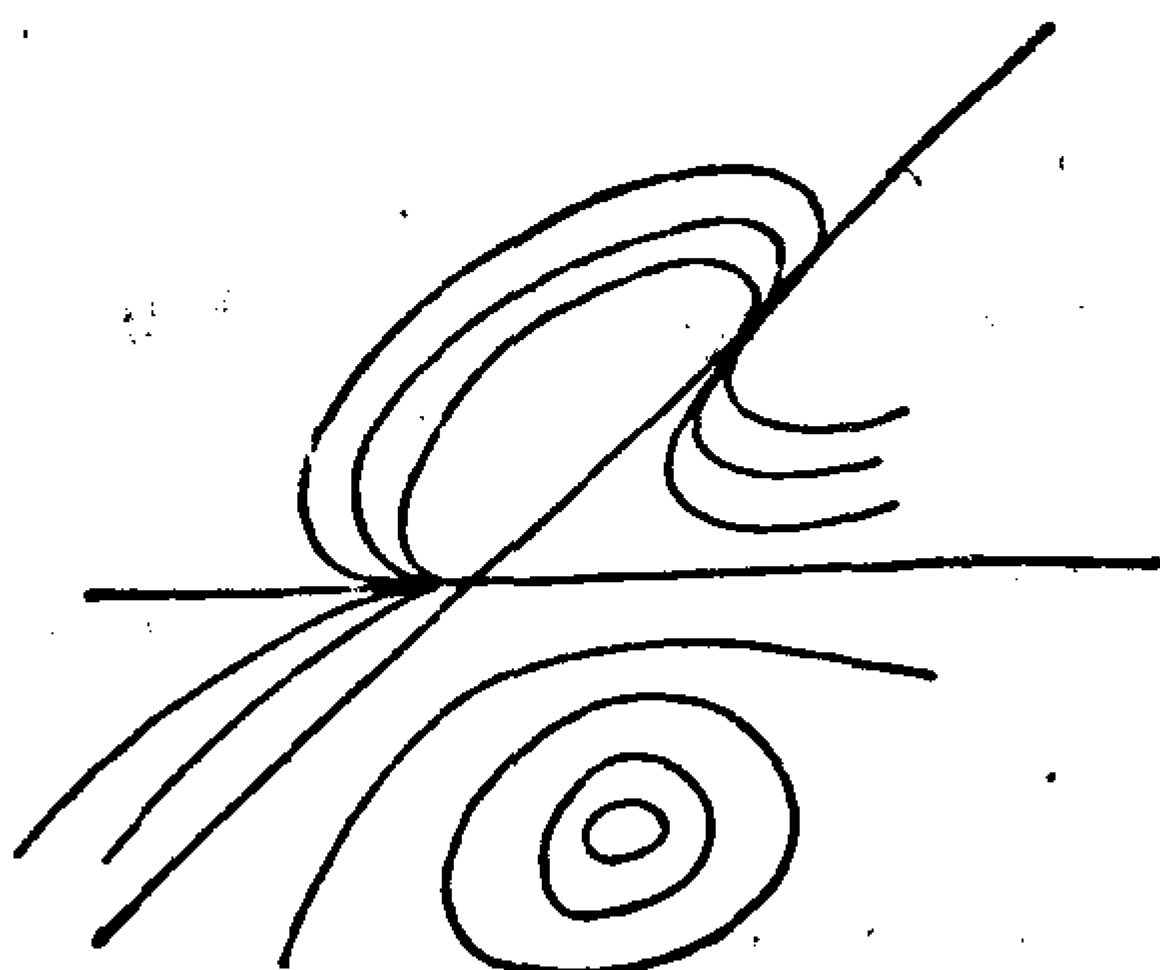


图 9·11

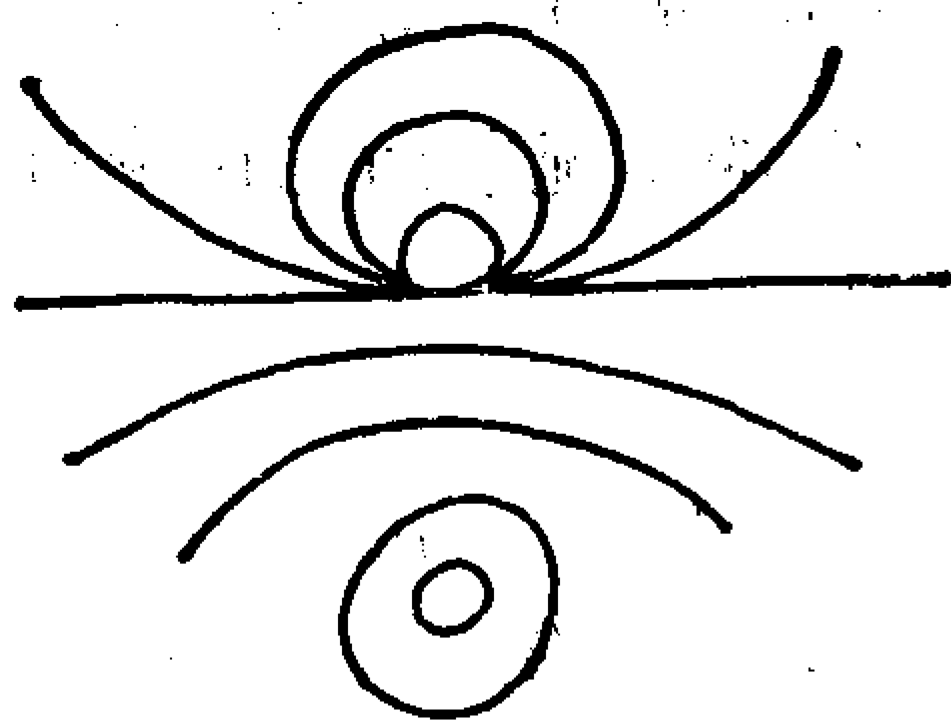


图 9·12

1) 本节的所有图形都可看作射影图形，其中每一直线都可作为无限远直线看待.

2) Frommer 原图有错误，今按 А. Н. Берлинский[160] 改正.

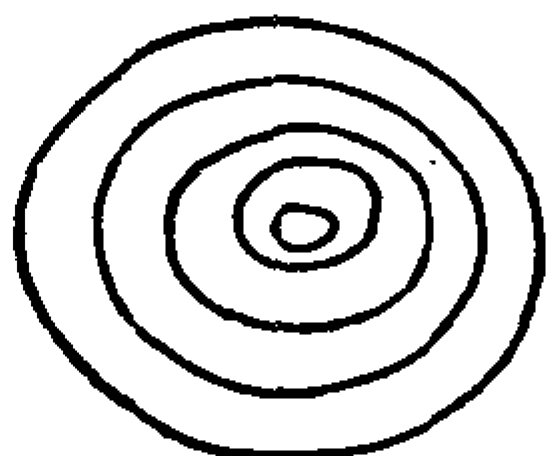


图 9·13

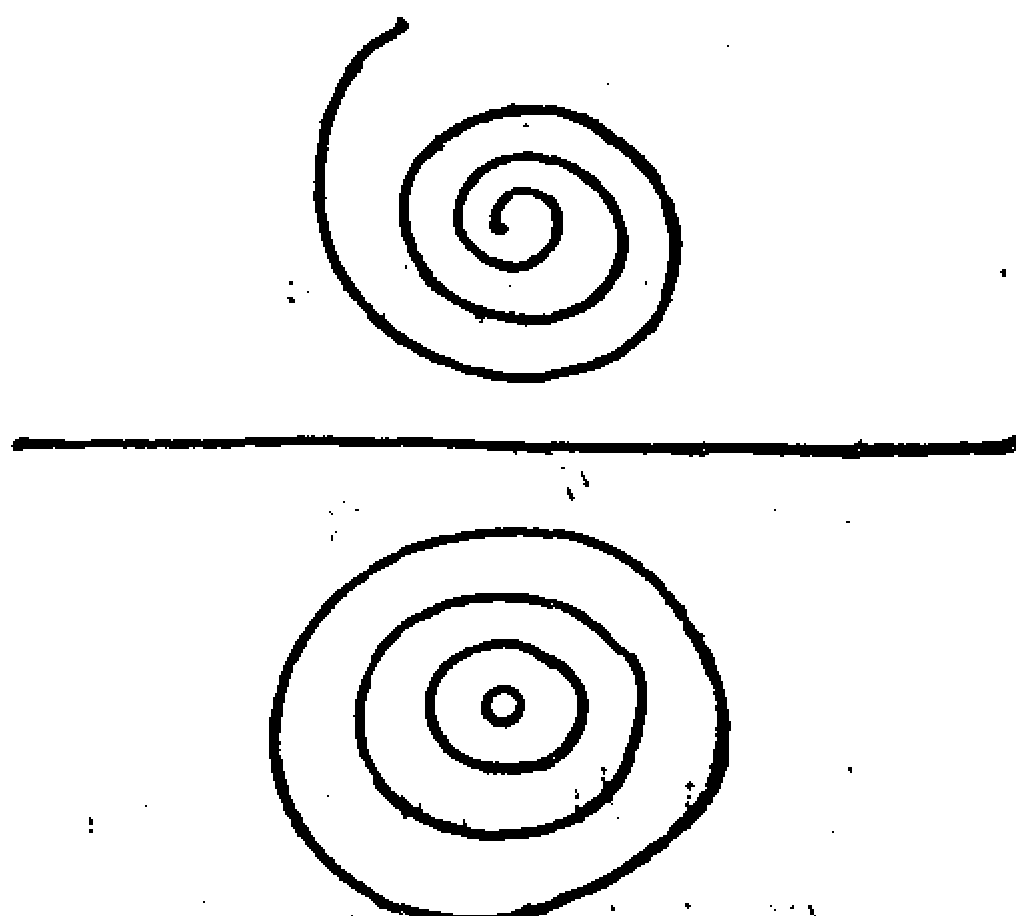


图 9·14

II_2. $a+c=0$, $b+d\neq0$. 这时必须有 $\beta=0$. 现在若 $a=c=0$, 则方程(9·3)可以改写为

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+\alpha xy}{y+\beta x^2+\gamma y^2}\tag{9·14}$$

的形式. 它所确定的平面向量场对称于 y 轴. 这一情况又可分为许多不同情况,留待下面的 III 去详细讨论.

今设 $a=-c\neq0$, 则可经相似变换而使 $a=-c=1$. 于是(9·3)成为

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+x^2+(2b+\alpha)xy-y^2}{y+bx^2-2xy+dy^2}.\tag{9·15}$$

算出(0, 0)的第二个焦点量为

$$D_2=\alpha^2(b+d)+5\alpha(b+d)^2.\tag{9·16}$$

由于 $b+d\neq0$. 要 $D_2=0$ 必须 $\alpha=0$ 或 $\alpha=-5(b+d)$. $\alpha=0$(已知 $\beta=0$)的情况前面已讨论过, 故可设 $\alpha=-5(b+d)$. 这时(9·15)成为

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+x^2-(3b+5d)xy-y^2}{y+bx^2-2xy+dy^2}.\tag{9·17}$$

再算出第三个焦点量为

$$D_3=(b+d)^2(bd+2d^2+1).\tag{9·18}$$

由于 $b+d\neq0$, 故中心点存在的必要条件是

$$bd+2d^2+1=0,\quad 或\quad b=-\frac{2d^2+1}{d}.\tag{9·19}$$

这里可设 $d\neq 0$, 因为当 $d=0$ 时要 $D_3=0$ 必须 $b=0$, 但已设 $b+d\neq 0$ 了.

下面改用 Dulac[5] 的方法来证明当 $D_1=D_2=D_3=0$ 时 $(0, 0)$ 是中心点. 把 (9·17) 写成

$$[x+x^2-(3b+5d)xy-y^2]dx \\ +[y+bx^2-2xy+dy^2]dy=0, \tag{9·20}$$

然后作变换

$$x=\frac{1}{2i}(x'-y'),\quad y=\frac{1}{2}(x'+y'), \tag{9·21}$$

即得方程

$$\left[\frac{1}{2}y'+\left(\frac{b+3d}{4}-\frac{1}{2i}\right)x'^2+\frac{b+d}{4}x'y'-\frac{b+d}{2}y'^2\right]dx' \\ +\left[\frac{1}{2}x'-\frac{b+d}{2}x'^2+\frac{b+d}{4}x'y' \\ +\left(\frac{b+3d}{4}+\frac{1}{2i}\right)y'^2\right]dy'=0.$$

再作变换 $x'=-\dfrac{2}{b+d}x_1,\quad y'=-\dfrac{2}{b+d}y_1,$

可得方程 $$\left[y_1-\frac{b+3d+2i}{b+d}x_1^2-x_1y_1+2y_1^2\right]dx_1 \\ +\left[x_1+2x_1^2-x_1y_1-\frac{b+3d-2i}{b+d}y_1^2\right]dy_1=0,$$

或简记为

$$[y_1+2y_1^2-x_1y_1+\bar{a}x_1^2]dx_1+[x_1+2x_1^2-x_1y_1+\bar{b}y_1^2]dy_1=0, \tag{9·22}$$

其中

$$\bar{a}=-\frac{b+3d+2i}{b+d},\quad \bar{b}=\frac{b+3d-2i}{-(b+d)}. \tag{9·23}$$

利用条件 (9·19) 易证 $\bar{a}$ 与 $\bar{b}$ 满足条件

$$\bar{a}\bar{b}=1, \tag{9·24}$$

且易证方程 (9·22) 在条件 (9·24) 之下有积分因子

$$[f(x_1, y_1)]^{-\frac{5}{2}}=(1+2x_1+2y_1+\bar{a}x_1^2+2x_1y_1+\bar{b}y_1^2)^{-\frac{5}{2}},$$

以及通积分

$$[f(x_1, y_1)]^3=C[F(x_1, y_1)]^2, \tag{9·25}$$

其中 $F(x_1, y_1)=1+3(x_1+y_1)+\frac{3}{2}[(\bar{a}+1)x_1^2+(\bar{a}+\bar{b}+2)x_1y_1$

$$+(\bar{b}+1)y_1^2]+\frac{1}{2}[\bar{a}(\bar{a}+1)x_1^3+3(\bar{a}+1)x_1^2y_1$$

$$+3(\bar{b}+1)x_1y_1^2+\bar{b}(\bar{b}+1)y_1^3].$$

最后，用变换

$$x_1=\frac{b+d}{2}(-ix-y), \quad y_1=\frac{b+d}{2}(ix-y)$$

回到原来的变量 x, y，即知方程(9·17)有通积分

$$[d^2+2d(d^2+1)y+(d^2+1)(x-dy)^2]^3$$
$$=C[d^2+3d(d^2+1)y+3d^2(d^2+1)y^2$$
$$-3d(d^2+1)xy+(d^2+1)(dy-x)^3]^2. \tag{9·26}$$

故原点为中心点，积分曲线族为代数曲线族[1]。

III. 对称向量场(9·14). 这时方程有以下几条特殊的积分曲线：

1) 无限远直线；

2) 直线 $y=-\frac{1}{\alpha}$；

3) 二次曲线 $x^2=Ay^2+2By+C$，其中

$$A=-\frac{\gamma}{\alpha+\beta}, \quad B=\frac{\gamma-\alpha-\beta}{(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)},$$
$$C=\frac{-\gamma+\alpha+\beta}{\beta(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)}.$$

奇点是：对称轴(y 轴)上的(0, 0)与 $P\left(0, -\frac{1}{\gamma}\right)$，以及积分直线与二次积分曲线的可能的交点。

积分曲线族的图形主要由以下三个量决定：

i) $\frac{\alpha-\gamma}{\gamma}$，当它大(小)于零时 P 为中心点(鞍点)；当它等于

1) 这一情况的全局相图已于最近得到解决，将另文发表。

零或 ∞ 时 P 为高阶奇点.

ii) $\frac{\alpha-\gamma}{\beta}$, 当它大(小)于零时 $y=-\frac{1}{\alpha}$ 上有(无)实奇点, 当它等于零时两个实奇点重合, 即积分直线与积分二次曲线相切.

iii) $\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$, 它决定二次积分曲线的类型, 大(小)于零时为椭圆(双曲线). 若它等于 ∞, 则得二重积分直线 $y=-\frac{1}{\alpha}$.

积分曲线族的图形有图 9·12, 9·7, 9·3, 9·15, 9·16, 9·17, 9·18, 9·19 等.

总结以上的结果, 可以得到

定理 9·1 方程(9·3)当且仅当下列诸条件之一成立时存在中心点:

$$\begin{cases} 1)\ \alpha=\beta=0; \\ 2)\ a+c=b+d=0; \\ 3)\ a=c=\beta=0\ (\text{或 } b=d=\alpha=0); \\ 4)\ a+c=\beta=\alpha+5(b+d)=bd+2d^2+a^2=0,\ \text{但 } b+d\neq 0^{1)}. \end{cases}$$

$$(\text{或 } b+d=\alpha=\beta+5(a+c)=ac+2a^2+d^2=0,\ \text{但 } a+c\neq 0.) \tag{9·27}$$

注意: 根据定理 9·1 以及上述诸图可知二次系统最多只能有两个中心点; 当它有一个中心点时虽然还可能再有一个焦点(图 9·14), 但在焦点外围却不可能出现极限环[2]. В. Т. Борухов [161] 举出具体例子, 说明四次多项式系统可以同时存在中心与极限环. 他的方程是

$$\frac{dx}{dt}=-Ay+yx^2-x^4,\quad \frac{dy}{dt}=ax-x^3, \tag{9·28}$$

其中 $a=2A+A^2$, $0<A<5\cdot10^{-5}$. [161] 证明(9·28)以 $O(0,0)$ 为中心, 而在两焦点 $\left(\pm\sqrt{a},\ \frac{a^2}{a-A}\right)$ 外围都存在极限环. В. М.

---

1) 注意, 在导出条件(9·19)以前我们曾先变 a 为 1.

2) 严格证明见[159].

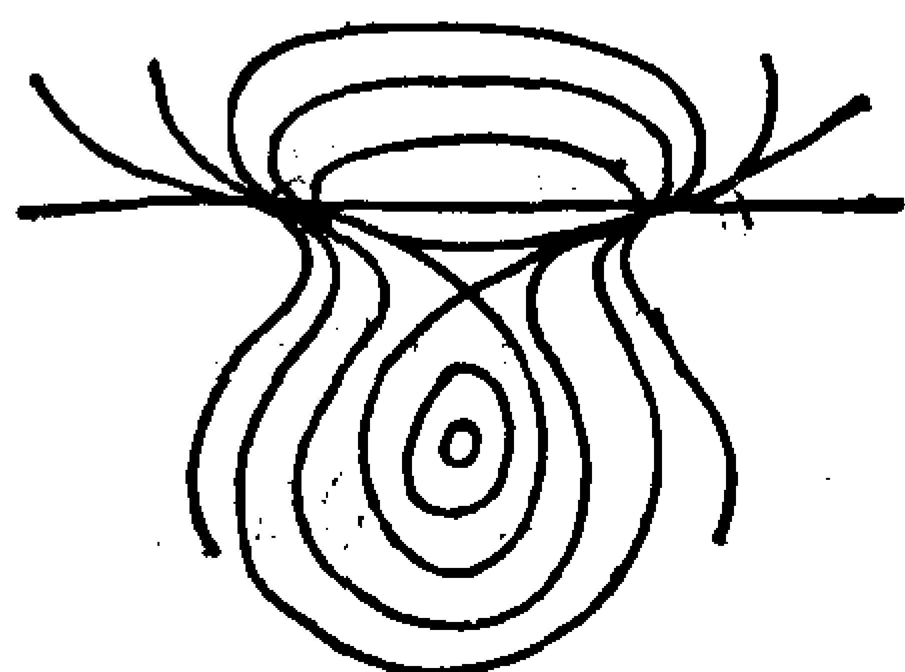


图 9·15

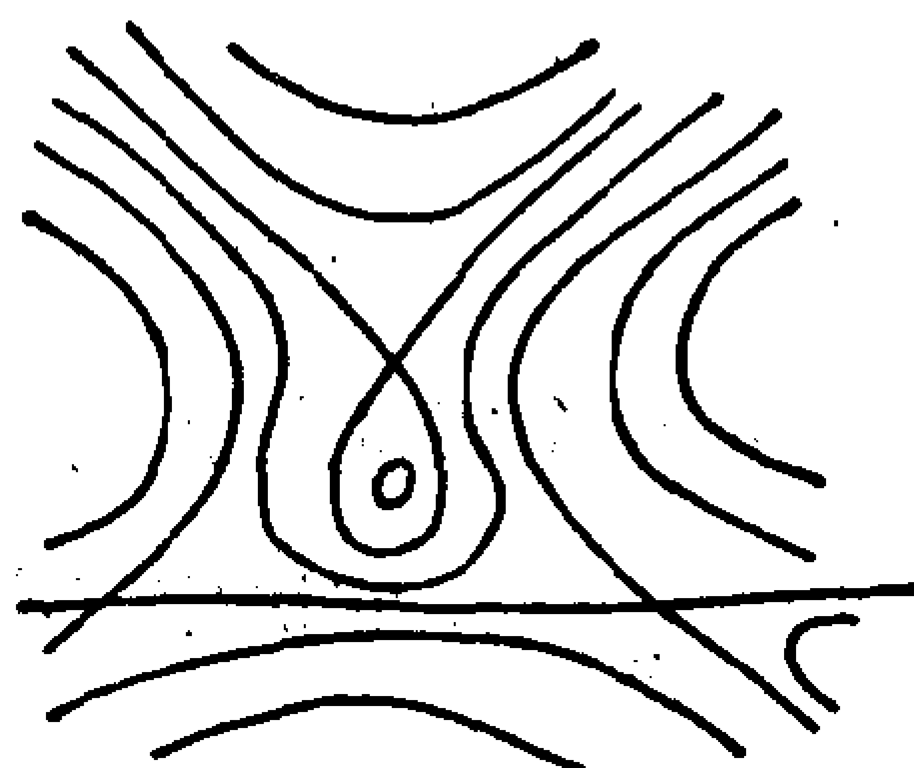


图 9·16



图 9·17

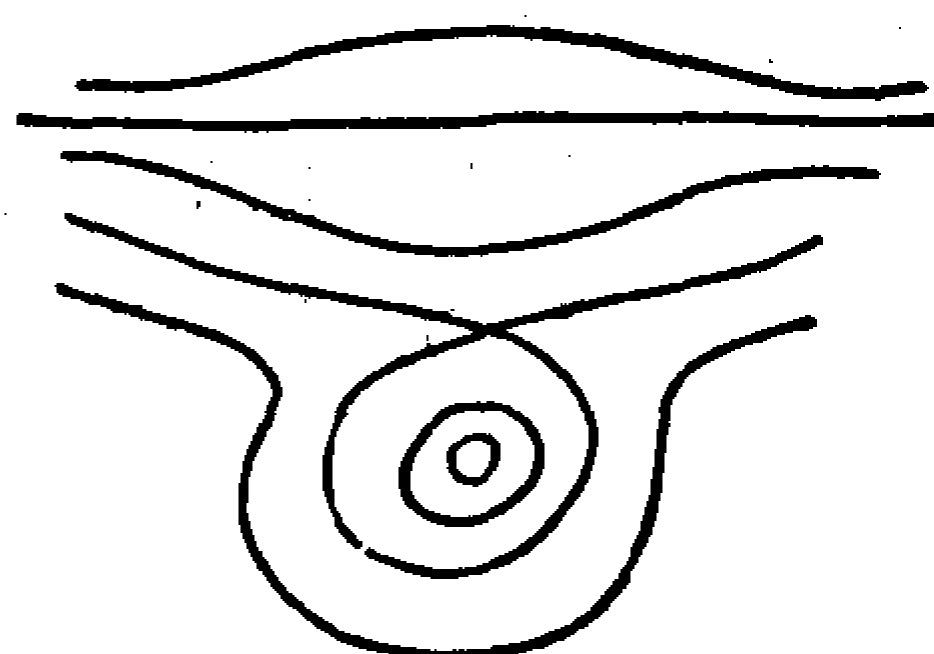


图 9·18

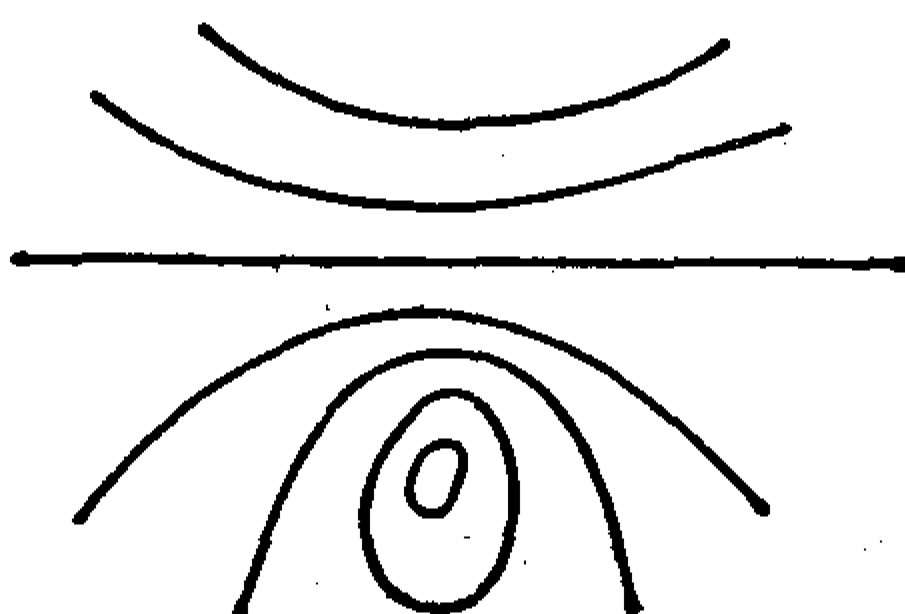


图 9·19

Долов[162]所得的结果说明三次多项式系统也可以同时存在中心与极限环. 他的方程是

$$\frac{dx}{dt}=y-y^3,\quad \frac{dy}{dt}=-x+x^2+y^2(\mu+x),\tag{9·29}$$

其中 $\mu<0$. 他证明此方程以(0, 0)为中心, 而焦点$(\sqrt{-\mu},\pm1)$当μ变化而经过 -1 时改变稳定性, 因此外围也能出现极限环(见§3 定理 3·7).

关于二次系统存在中心点的条件除了(9·27)以外, 常用的还有 H. H. Баутин 的形式. 这时, 我们把二次系统写成与(9·3)稍

不同的形式:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\lambda_1 x-y-\lambda_3 x^2+(2\lambda_2+\lambda_5)xy+\lambda_6 y^2, \\ \dfrac{dy}{dt}=x+\lambda_1 y+\lambda_2 x^2+(2\lambda_3+\lambda_4)xy-\lambda_2 y^2. \end{cases} \tag{9·30}$$

在这里当 $\lambda_1\neq 0$ 时 $O(0,\ 0)$ 是粗焦点,但在第二方程中 x^2 的系数与 y^2 的系数只差一个符号,这从表面上看去比(9·3)要特殊一些. 其实,(9·2)经过适当的坐标变换总是可以化为(9·30)的,只要

$$a_{10}b_{01}-a_{01}b_{10}>0,\quad (a_{10}-b_{01})^2+4a_{01}b_{10}<0, \tag{9·31}$$

即 $O(0,\ 0)$ 是(9·2)的焦点或中心. 为此,可先借变换

$$x=-\frac{1}{b_1 b_{10}}[(a_{10}-a_1)\eta+b_1\xi],\quad y=-\frac{1}{b_1}\eta \tag{9·32}$$

化为

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt_1}&=b_1\xi+a_1\eta+B_{20}\xi^2+B_{11}\xi\eta+B_{02}\eta^2, \\ \frac{d\xi}{dt_1}&=a_1\xi-b_1\eta+A_{20}\xi^2+A_{11}\xi\eta+A_{02}\eta^2, \end{aligned} \tag{9·33}$$

其中 $a_1\pm ib_1(b_1\neq 0)$ 是(9·2)的一次近似方程的特征根. 然后经过适当的转轴,可使 a_1, b_1 保持不变,而新的 B_{20} 与 B_{02} 之和等于零. 再以 b_1 除(9·33)的两边,并且置 $t=b_1t_1$,就可把(9·33)改写为(9·30)了. 对于(9·30),由定理 9·1 容易推出

定理 9·2 方程(9·30)当且仅当下列四个条件至少成立一个时以原点为中心点:

1) $\lambda_1=\lambda_4=\lambda_5=0$;

2) $\lambda_1=\lambda_3-\lambda_6=0$;

3) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_5=0$;

4) $\lambda_1=\lambda_5=\lambda_4+5\lambda_3-5\lambda_6=\lambda_3\lambda_6-2\lambda_6^2-\lambda_2^2=0$.

Баутин[21] 的重要贡献是证明:

定理 9·3 当 $O(0,\ 0)$ 是(9·30)的中心点时,通过系数的微小变动在 O 邻近最多只能出现三个极限环; 对于第 4) 类中心点来说,要产生三个极限环也是可以办到的.

为了证明，我们引进极坐标 $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, 由(9·30)可得

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{d\varphi}=&\rho\{\lambda_1+\rho[-\lambda_3\cos^3\varphi+(3\lambda_2+\lambda_5)\cos^2\varphi\sin\varphi\\&+(2\lambda_3+\lambda_4+\lambda_6)\cos\varphi\sin^2\varphi-\lambda_2\sin^3\varphi]\}\\&\cdot\{1+\rho[\lambda_2\cos^3\varphi+(3\lambda_3+\lambda_4)\cos^2\varphi\sin\varphi\\&-(3\lambda_2+\lambda_5)\cos\varphi\sin^2\varphi-\lambda_6\sin^3\varphi]\}^{-1}\\=&\rho[\lambda_1+\rho A(\varphi)]/[1+\rho B(\varphi)]\\=&\rho R_1+\rho^2R_2+\rho^3R_3+\cdots,\end{aligned}\tag{9·34}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&R_1=\lambda_1,\ R_2=A(\varphi)-\lambda_1B(\varphi),\\&R_3=-A(\varphi)B(\varphi)+\lambda_1B^2(\varphi),\ \cdots,\\&R_k=(-1)^kA(\varphi)B(\varphi)^{k-2}\\&\qquad+(-1)^{k-1}\lambda_1B(\varphi)^{k-1},\ \cdots.\end{aligned}\right\}\tag{9·35}$$

对于 λ 空间中任一固定点 λ_i^* 附近的一切 λ_i, 例如满足 $\|\lambda_i-\lambda_i^*\|<\varepsilon$ 的一切 λ_i, 以及一切 φ, 常有 $\gamma(\varepsilon,\lambda_i^*)$, 使当 $|\rho|<\gamma(\varepsilon,\lambda_i^*)$ 时(9·34)右边的级数为收敛. 如所熟知，(9·34)的满足初始条件 $\rho(0)=\rho_0$ 的解 $\rho(\varphi)$ 可展开为

$$\rho=\rho_0v_1(\varphi,\lambda_i)+\rho_0^2v_2(\varphi,\lambda_i)+\rho_0^3v_3(\varphi,\lambda_i)+\cdots,\tag{9·36}$$

其中 $v_k(\varphi,\lambda_i)$ 满足条件

$$v_1(0,\lambda_i)=1,\quad v_k(0,\lambda_i)=0\quad 当\quad k\geqslant 2.$$

以(9·36)代入(9·34)，比较 ρ 的同次幂的系数，可得决定诸 v_k 的方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dv_1}{d\varphi}=v_1R_1,\quad \frac{dv_2}{d\varphi}=v_2R_1+v_1^2R_2,\\&\frac{dv_3}{d\varphi}=v_3R_1+2v_1v_2R_2+v_1^3R_3,\ \cdots.\end{aligned}\right\}\tag{9·37}$$

对于一切相当小的 ρ, 以及满足 $\|\lambda_i-\lambda_i^*\|<\varepsilon$ 的 λ_i, 直线段 $\varphi=0$ 是无切线段，在(9·36)中令 $\varphi=2\pi$, 即得在此级数的收敛圆内的相当

小的线段 $0<\rho<\rho_1$, $\varphi=0$ 上的后继函数

$$\rho(\rho_0,\ 2\pi)=\rho_0 v_1(2\pi,\ \lambda_i)+\rho_0^2 v_2(2\pi,\ \lambda_i)+\rho_0^3 v_3(2\pi,\ \lambda_i)+\cdots. \tag{9·38}$$

引理 9·1 $v_k(2\pi,\ \lambda_i)$是诸 λ_i 的整函数, 当 $\lambda_1=0$ 时是 $\lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_6$ 的 $k-1$ 次齐次多项式.

【证】 $v_k(2\pi,\ \lambda_i)$是诸 λ_i 的整函数由方程(9·37)及解对参数的依赖性定理可知. 特别, 若 $\lambda_1=0$, 则 $R_1=0$, 而 R_k 是 $\lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_6$ 的 $k-1$ 次齐次多项式, 由于这时(9·37)的每一方程都是可以分离变量的, 因此 $v_k(2\pi,\ \lambda_i)$也是 $\lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_6$ 的 $k-1$ 次齐次多项式.

引理 9·2

$$\left.\begin{aligned}
&v_1(2\pi,\ \lambda_i)=e^{2\pi\lambda_1},\\
&v_2(2\pi,\ \lambda_i)=\lambda_1\theta_2^{(1)},\\
&v_3(2\pi,\ \lambda_i)=\bar{v}_3+\lambda_1\theta_3^{(1)},\\
&v_4(2\pi,\ \lambda_i)=\bar{v}_3\theta_4^{(3)}+\lambda_1\theta_4^{(1)},\\
&v_5(2\pi,\ \lambda_i)=\bar{v}_5+\bar{v}_3\theta_5^{(3)}+\lambda_1\theta_5^{(1)},\\
&v_6(2\pi,\ \lambda_i)=\bar{v}_5\theta_6^{(5)}+\bar{v}_3\theta_6^{(3)}+\lambda_1\theta_6^{(1)},\\
&v_7(2\pi,\ \lambda_i)=\bar{v}_7+\bar{v}_5\theta_7^{(5)}+\bar{v}_3\theta_7^{(3)}+\lambda_1\theta_7^{(1)},\\
&v_k(2\pi,\ \lambda_i)=\bar{v}_7\theta_k^{(7)}+\bar{v}_5\theta_k^{(5)}+\bar{v}_3\theta_k^{(3)}+\lambda_1\theta_k^{(1)}\quad(k>7),
\end{aligned}\right\} \tag{9·39}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{v}_3=-\frac{\pi}{4}\lambda_5(\lambda_3-\lambda_6),\\
&\bar{v}_5=\frac{\pi}{24}\lambda_2\lambda_4(\lambda_3-\lambda_6)(\lambda_4+5\lambda_3-5\lambda_6),\\
&\bar{v}_7=-\frac{25}{32}\pi\lambda_2\lambda_4(\lambda_3-\lambda_6)^2(\lambda_3\lambda_6-2\lambda_6^2-\lambda_2^2),
\end{aligned}\right\} \tag{9·40}$$

又 $\theta_k^{(j)}$ 为 λ_i 的整函数.

【证】 $v_1(2\pi,\ \lambda_i)$的表达式由(9·33)立刻可得. 根据引理 9·1, 可写

$$v_k(2\pi,\ \lambda_i)=v_k^{(0)}+\lambda_1\theta_k^{(1)}\quad(k>1),$$

其中 $v_k^{(0)}$ 不含 λ_1, 是诸 $\lambda_i(i=2,\ \cdots,\ 6)$的 $k-1$ 次齐次多项式. 由

定理 9·2 出现中心点的第四个条件知道，当

$$\lambda_5=\lambda_4+5\lambda_3-5\lambda_6=\lambda_3\lambda_6-2\lambda_6^2-\lambda_2^2=0$$

时 $v_k^{(0)}=0$. 故

$$v_k(2\pi,\ \lambda_i)=(\lambda_3\lambda_6-2\lambda_6^2-\lambda_2^2)\theta_k'''$$
$$+(\lambda_4+5\lambda_3-5\lambda_6)\theta_k''+\lambda_5\theta_k'+\lambda_1\theta_k^{(1)},\quad (9\cdot41)$$

但是 $\lambda_1=\lambda_5=\lambda_2=0$ 及 $\lambda_1=\lambda_5=\lambda_4=0$ 时亦出现中心点，即此时一切 $v_k(2\pi,\ \lambda_i)\ (k\neq1)$ 都应等于零，故

$$\theta_k'''=\lambda_2\lambda_4\tilde{\theta}_k,\qquad \theta_k''=\lambda_2\lambda_4\tilde{\theta}_k^*.$$

再用中心点的第二个条件 $\lambda_1=\lambda_3-\lambda_6=0$ 可得

$$\tilde{\theta}_k=(\lambda_3-\lambda_6)\tilde{\theta}_k^{(7)},\quad \tilde{\theta}_k^*=(\lambda_3-\lambda_6)\theta_k^{(5)},\quad \theta_k'=(\lambda_3-\lambda_6)\theta_k^{(3)},$$

一起代入(9·41)，得到

$$v_k(2\pi,\ \lambda_i)=(\lambda_3\lambda_6-2\lambda_6^2-\lambda_2^2)\lambda_2\lambda_4(\lambda_3-\lambda_6)\tilde{\theta}_k^{(7)}$$
$$+(\lambda_3-\lambda_6)(\lambda_4+5\lambda_3-5\lambda_6)\lambda_2\lambda_4\theta_k^{(5)}$$
$$+\lambda_5(\lambda_3-\lambda_6)\theta_k^{(3)}+\lambda_1\theta_k^{(1)}\quad (k\neq1).\quad (9\cdot42)$$

现在设 $k=2$, 则由引理 9·1 知(9·42)右边的 $\theta_2^{(7)}=\theta_2^{(5)}=\theta_2^{(3)}=0$, 故

$$v_2(2\pi,\ \lambda_i)=\lambda_1\theta_2^{(1)}.$$

当 $k=3$ 时同前一样可知 $\theta_3^{(7)}=\theta_3^{(5)}=0$, 又由(9·37)可算出

$$\theta_3^{(3)}=\frac{1}{\lambda_5(\lambda_3-\lambda_6)}v_3(2\pi,\ \lambda_i)\Big|_{\lambda_1=0}=\int_0^{2\pi}R_3\Big|_{\lambda_1=0}d\theta$$
$$=-\int_0^{2\pi}A(\theta)B(\theta)d\theta=-\frac{\pi}{4},$$

故 $$v_3(2\pi,\ \lambda_i)=-\frac{\pi}{4}\lambda_5(\lambda_3-\lambda_6)+\lambda_1\theta_3^{(1)}=\bar{v}_3+\lambda_1\theta_3^{(1)}.$$

当 $k=4$ 时同前一样可知 $\theta_4^{(7)}=\theta_4^{(5)}=0$, 故

$$v_4(2\pi,\ \lambda_i)=\lambda_5(\lambda_3-\lambda_6)\theta_4^{(3)}+\lambda_1\theta_4^{(1)}=\bar{v}_3\theta_4^{(3)}+\lambda_1\theta_4^{(1)},$$

其中 $\bar{v}_3$ 的系数不妨仍记为 $\theta_4^{(3)}$.

再算 $v_5(2\pi,\ \lambda_i)$. 由引理 9·1 知 $\theta_5^{(7)}=0$. 其次，注意

$$\frac{dv_5}{d\varphi}=R_1v_5+R_2(2v_2v_3+2v_1v_4)$$
$$+R_3(3v_1v_2^2+3v_1^2v_3)+4R_4v_1^3v_2+R_5v_1^5,$$

若令 $\lambda_1=0$, 则 $R_1\equiv 0$, $v_1\equiv 1$, 从而

$$\frac{dv_5}{d\varphi}=2R_2v_2v_3+2R_2v_4+3R_3v_2^2+3R_3v_3+4R_4v_2+R_5, \quad (9\cdot 43)$$

注意此时有

$$\frac{dv_2}{d\varphi}=R_2,\quad \frac{dv_3}{d\varphi}=2v_2R_2+R_3,$$
$$\frac{dv_4}{d\varphi}=R_2(v_2^2+2v_3)+3v_2R_3+R_4,$$

故(9·43)的右边可写为

$$R_3v_3+2R_4v_2+R_5+4v_2^3\frac{dv_2}{d\varphi}+2v_3\frac{dv_3}{d\varphi}$$
$$+\frac{2d(v_2v_4)}{d\varphi}-\frac{3d(v_3v_2^2)}{d\varphi}.$$

把(9·43)两边从 0 到 2π 积分, 并取 $\lambda_5=0$, 由于在 $\lambda_1=\lambda_5=0$ 的条件下有

$$v_2(2\pi,\ \lambda_i)=v_3(2\pi,\ \lambda_i)=v_4(2\pi,\ \lambda_i)=0,$$

故得
$$v_5(2\pi,\ \lambda_i)=\int_0^{2\pi}(R_3v_3+2R_4v_2+R_5)d\varphi.$$

利用此式计算 $v_5(2\pi,\ \lambda_i)$, 可得(当 $\lambda_1=\lambda_5=0$)

$$v_5(2\pi,\ \lambda_i)=\frac{\pi}{24}\lambda_2\lambda_4(\lambda_3-\lambda_6)(\lambda_4+5\lambda_3-5\lambda_6),$$

因此在 $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_5\neq 0$ 时就有

$$v_5(2\pi,\ \lambda_i)=\frac{\pi}{24}\lambda_2\lambda_4(\lambda_3-\lambda_6)(\lambda_4+5\lambda_3-5\lambda_6)$$
$$+\lambda_5(\lambda_3-\lambda_6)\theta_5^{(3)}+\lambda_1\theta_5^{(1)}=\bar{v}_5+\bar{v}_3\theta_5^{(3)}+\lambda_1\theta_5^{(1)}.$$

对于 $k=6$, 注意根据古典的 Ляпунов 理论知道, 第一个不等于零的 $v_k(2\pi,\ \lambda_i)$ $(k>1)$ 其下标必为奇数, 又当

$$\lambda_1=\lambda_5=\lambda_4+5\lambda_3-5\lambda_6=0$$

时 $v_2=\cdots=v_5=0$, 故由(9·42)知道 $\theta_6^{(7)}=0$. 于是

$$v_6(2\pi,\ \lambda_i)=\bar{v}_5\theta_6^{(5)}+\bar{v}_3\theta_6^{(3)}+\lambda_1\theta_6^{(1)}.$$

对 $k=7$, 由(9·42)有

$$v_7(2\pi,\ \lambda_i)=\lambda_2\lambda_4(\lambda_3-\lambda_6)(\lambda_3\lambda_6-2\lambda_6^2-\lambda_2^2)\theta_7^{(7)}$$
$$+\bar{v}_5\theta_7^{(5)}+\bar{v}_3\theta_7^{(3)}+\lambda_1\theta_7^{(1)}.$$

如前一样, 可以令

$$\lambda_1=\lambda_5=\lambda_4+5\lambda_3-5\lambda_6=0$$

来计算 $v_7(2\pi,\ \lambda_i)$, 这样就可确定

$$\theta_7^{(7)}=-\frac{25}{32}\pi(\lambda_3-\lambda_6),$$

因此 $$v_7(2\pi,\ \lambda_i)=\bar{v}_7+\bar{v}_5\theta_7^{(5)}+\bar{v}_3\theta_7^{(3)}+v_1\theta_7^{(1)}.$$

最后我们来证明当 $k>7$ 时 $v_k(2\pi,\ \lambda_i)$的表达式. 由(9·42)可知, 只要证明 $\tilde{\theta}_k^{(7)}$ 含有因子 $\lambda_3-\lambda_6$ 就够了. 已知 $\tilde{\theta}_k^{(7)}$ 是 $\lambda_2, \cdots, \lambda_6$ 的 $k-6$ 次齐次式, 利用 $\tilde{\theta}_k^{(7)}$, $\theta_k^{(5)}$, $\theta_k^{(3)}$ 的形式上的不确定性, 常可把 $\tilde{\theta}_k^{(7)}$ 中含 λ_4 与 λ_5 的项移到 $\theta_k^{(5)}$ 与 $\theta_k^{(3)}$ 中去, 而使 $\tilde{\theta}_k^{(7)}$ 不含 λ_4 与 λ_5. 这样就可在

$$\lambda_1=\lambda_5=\lambda_4+5\lambda_3-5\lambda_6=0$$

的情况下来证明 $\tilde{\theta}_k^{(7)}$ 中含有因子 $\mu=\lambda_3-\lambda_6$[1]. 这时由于 $\lambda_4=-5(\lambda_3-\lambda_6)$, 知

$$v_k(2\pi,\ \lambda_i)=\lambda_2\lambda_4(\lambda_3-\lambda_6)(\lambda_3\lambda_6-2\lambda_6^2-\lambda_2^2)\tilde{\theta}_k^{(7)}=\mu^2\Phi_2(\mu),$$

而

$$\rho-\rho_0=\mu^2\psi(\rho_0,\ \mu)=\mu^2[\psi(\rho_0,\ 0)+\mu\psi'_\mu(\rho_0,\ 0)+\cdots]. \quad (9\cdot44)$$

因此问题变为要证明 $\psi(\rho_0,\ 0)\equiv0$ 在 $\varphi=0$ 的某一线段上. 这事实的证明相当困难, Баутин 所用的方法是值得我们仔细体会的.

考虑方程组

---

1) 若 $\tilde{\theta}_k^{(7)}$ 中含有因子 λ_4, 则当 $\lambda_4+5\lambda_3-5\lambda_6=0$ 时由 λ_4 将产生因子 $\lambda_3-\lambda_6$, 后者本来并非 $\tilde{\theta}_k^{(7)}$ 的因子.

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-H'_y(x,\ y)+\mu p(x,\ y),\\ \frac{dy}{dt}&=H'_x(x,\ y)+\mu q(x,\ y),\end{aligned}\right\}\tag{9·45}$$

其中

$$H(x,\ y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{3}(\lambda_2x^3-\lambda_6y^3)+\lambda_6x^2y-\lambda_2xy^2.\tag{9·46}$$

$H(x,\ y)=h$ 当 $h>0$ 甚小时表示原点附近一系闭曲线，它是方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-y-\lambda_6x^2+2\lambda_2xy+\lambda_6y^2,\\ \frac{dy}{dt}&=x+\lambda_2x^2+2\lambda_6xy-\lambda_2y^2\end{aligned}\right\}\tag{9·47}$$

的首次积分．(9·47) 可由方程 (9·30) 令

$$\lambda_1=\lambda_5=\lambda_3-\lambda_6=\lambda_4=0$$

而得到．$p(x,\ y)$ 与 $q(x,\ y)$ 是 $x,\ y$ 的多项式，若取 $p=-x^2,\ q=-3xy$，便得到当

$$\lambda_1=\lambda_5=\lambda_4+5\lambda_3-5\lambda_6=0$$

时的方程 (9·30)．

今在级数 (9·36) 的收敛区域中取出属于 $H(x,\ y)=h$ 的某一曲线 C_{h_0}，把坐标系统移到 C_{h_0} 上去，并改用曲线坐标 $(s,\ h)$．这里 h 就是族 $H(x,\ y)=h$ 中的曲线所对应的参数，s 表示 C_h 上的周期坐标，使在 C_{h_0} 上有 $\frac{ds}{dt}=1$，而在其他 C_h 上则有

$$\frac{ds}{dt}=T_{h_0}/T_h,$$

其中 T_h 是 C_h 的周期，T_{h_0} 是 C_{h_0} 的周期，且规定 s 从 x 轴上量起．由此可见在 C_{h_0} 邻近的任一 C_h 上 s 都有固定的周期 T_{h_0}，并且坐标变换

$$x=f_1(s,\ h),\quad y=f_2(s,\ h)\tag{9·48}$$

是解析的．

当 $h=h_0$ 时得到 C_{h_0} 的方程，记为

$$x=f_1(s, h_0)=\varphi(s), \quad y=f_2(s, h_0)=\psi(s), \tag{9·49}$$

利用关系式

$$H(f_1(s, h), f_2(s, h))\equiv h, \quad H'_x f'_{1s}+H'_y f'_{2s}=0,$$
$$H'_x f'_{1h}+H'_y f'_{2h}=1,$$

可得新坐标下的方程

$$\frac{dh}{ds}=\frac{\mu(f'_{1s}q-f'_{2s}p)}{\mu(f'_{2h}p-f'_{1h}q)-1}. \tag{9·50}$$

在此式中令 $h=h_0+\delta$, 得到

$$\frac{d\delta}{ds}=R(\delta, s, \mu), \tag{9·51}$$

上式右边当 $|\delta|$ 与 $|\mu|$ 很小时是 δ, μ 的解析函数，并且是 s 的解析周期函数.

把(9·51)的解 $\delta=\delta(s)$ 依 μ 及初值 $\delta_0=\delta(0)$ 的幂级数展开，设为

$$\delta=C_{10}(s)\delta_0+C_{01}(s)\mu+C_{20}(s)\delta_0^2$$
$$+C_{11}(s)\delta_0\mu+C_{02}(s)\mu^2+\cdots, \tag{9·52}$$

在此式中置 $s=\tau(=T_{h_0})$, 并注意 $C_{10}(\tau)=1$, $C_{k0}(\tau)=0$ 当 $k\geqslant 2$, 即得 x 轴上的后继函数为

$$\delta(\tau)=\delta_0+C_{01}(\tau)\mu+C_{11}(\tau)\delta_0\mu+C_{02}(\tau)\mu^2+\cdots. \tag{9·53}$$

引理 9·3 $\psi(\rho_0, 0)\equiv 0$ 等价于 $C_{02}(\tau)\equiv 0$, 后者表示不论 C_{h_0} 怎样取，在展开式(9·53)中 μ^2 的系数总等于零.

【证】 以 ρ_0^* 记 C_{h_0} 与 $\varphi=0$ 的交点的横坐标，把(9·44)右边按 $\rho_0-\rho_0^*$ 展开，得到

$$\rho-\rho_0=\mu^2[\psi(\rho_0^*, 0)+\psi'_{\rho_0^*}(\rho_0^*, 0)(\rho_0-\rho_0^*)$$
$$+\mu\psi'_\mu(\rho_0^*, 0)+\cdots], \tag{9·54}$$

由于 ρ_0 与 ρ_0^* 的任意性，$\psi(\rho_0, 0)\equiv 0$ 显然等价于 $\psi(\rho_0^*, 0)\equiv 0$. 现在证明后一恒等式与 $C_{02}(\tau)\equiv 0$ 等价.

由方程 $H(\rho, 0)=h_0+\delta$ 可得

$$\frac{1}{2}\rho^2+\frac{1}{3}\lambda_2\rho^3=h_0+\delta. \tag{9·55}$$

当 $\delta=0$ 时 $\rho=\rho_0^*$, 故有

$$\frac{1}{2}\rho_0^{*2}+\frac{1}{3}\lambda_2\rho_0^{*3}=h_0. \tag{9·56}$$

两式相减，得

$$\delta=\frac{\lambda_2}{3}(\rho-\rho_0^*)^3+\frac{1}{2}(1+2\lambda_2\rho_0^*)(\rho-\rho_0^*)^2 \\ +(\rho-\rho_0^*)(\rho_0^*+\lambda_2\rho_0^{*2}). \tag{9·57}$$

令 $\rho=\rho_0$, 得

$$\delta_0=\frac{\lambda_2}{3}(\rho_0-\rho_0^*)^3+\frac{1}{2}(1+2\lambda_2\rho_0^*)(\rho_0-\rho_0^*)^2 \\ +(\rho_0-\rho_0^*)(\rho_0^*+\lambda_2\rho_0^{*2}). \tag{9·58}$$

再把(9·57)与(9·58)两式相减，得到

$$\delta-\delta_0=\frac{\lambda_2}{3}(\rho-\rho_0)^3+\left[\frac{1}{2}(1+2\lambda_2\rho_0^*)+\lambda_2(\rho_0-\rho_0^*)\right](\rho-\rho_0)^2 \\ +[(\rho_0^*+\lambda_2\rho_0^{*2})+(1+2\lambda_2\rho_0^*)(\rho_0-\rho_0^*) \\ +\lambda_2(\rho_0-\rho_0^*)^2](\rho-\rho_0). \tag{9·59}$$

以(9·54)代入(9·59)右边，可得 $\delta-\delta_0$ 关于 $\rho_0-\rho_0^*$ 与 μ 的幂级数展开式．但此式亦可用(9·58)代入(9·53)右边而得到．比较两个幂级数展开式中的 μ^2 的系数，即得

$$(\rho_0^*+\lambda_2\rho_0^{*2})\psi(\rho_0^*,\ 0)=C_{02}(\tau).$$

由此立刻得到引理的证明．

下面我们来证明 $C_{02}(\tau)\equiv 0$．把(9·51)右边按 δ, μ 的幂级数展开，注意

$$R(0,\ s,\ 0)=R'_\delta(0,\ s,\ 0)=R''_{\delta^2}(0,\ s,\ 0)=\cdots=0,$$

得到

$$\frac{d\delta}{ds}=R'_\mu(0,\ s,\ 0)\mu \\ +2\left[R''_{\delta\mu}(0,\ s,\ 0)\delta\mu+\frac{1}{2}R''_{\mu^2}(0,\ s,\ 0)\mu^2\right]+\cdots,$$

以(9·52)代入上式两边，比较 δ_0 与 μ 的同次项的系数，得到

$$\left.\begin{aligned}&\dot{C}_{10}=0,\ \dot{C}_{01}=R'_\mu(0,\ s,\ 0),\ \dot{C}_{11}=2C_{10}R''_{\delta\mu}(0,\ s,\ 0),\\&\dot{C}_{20}=0,\ \dot{C}_{02}=2C_{01}R''_{\delta\mu}(0,\ s,\ 0)+R''_{\mu^2}(0,\ s,\ 0),\ \cdots,\end{aligned}\right\}\tag{9·60}$$

其中 $\dot{C}_{ij}$ 表示 C_{ij} 对 t 的导数. 显见诸 C_{ij} 有初值条件

$$C_{10}(0)=1, C_{ij}(0)=0 \quad 当 \quad (i,\ j)\neq(1,\ 0).\tag{9·61}$$

由(9·50)容易算出

$$\left.\begin{aligned}&R'_\mu(0,\ s,\ 0)=\dot{\psi}p-\dot{\varphi}q,\\&R''_{\mu^2}(0,\ s,\ 0)=2(\dot{\psi}p-\dot{\varphi}q)(f'_{2h}p-f'_{1h}q)\,|_{\delta=0},\\&R''_{\delta\mu}(0,\ s,\ 0)=\frac{d}{d\delta}(f'_{2s}p-f'_{1s}q)\,|_{\mu=\delta=0}\\&\qquad=[f''_{2hs}p-f''_{1hs}q+f'_{2s}(p'_xf'_{1h}+p'_yf'_{2h})\\&\qquad\quad-f'_{1s}(q'_xf'_{1h}+q'_yf'_{2h})]_{\delta=0}.\end{aligned}\right\}\tag{9·62}$$

由(9·60), (9·61), (9·62)立刻得到

$$\left.\begin{aligned}&C_{10}(s)\equiv1,\ C_{01}(\tau)=\int_0^\tau(\dot{\psi}p-\dot{\varphi}q)ds,\\&C_{11}(\tau)=\int_0^\tau 2R''_{\delta\mu}ds=2[f'_{2h}p-f'_{1h}q]_0^\tau\\&\qquad+2\int_0^\tau[-f'_{2h}(p'_xf'_{1s}+p'_yf'_{2s})\\&\qquad+f'_{1h}(q'_xf'_{1s}+q'_yf'_{2s})+f'_{2s}(p'_xf'_{1h}+p'_yf'_{2h})\\&\qquad-f'_{1s}(q'_xf'_{1h}+q'_yf'_{2h})]_{\delta=0}ds\\&\qquad=2\int_0^\tau(f'_{2s}f'_{1h}-f'_{2h}f'_{1s})_{\delta=0}(p'_x+q'_y)ds,\end{aligned}\right\}\tag{9·63}$$

但

$$\begin{aligned}(f'_{2s}f'_{1h}-f'_{2h}f'_{1s})_{\delta=0}&=\left(f'_{1h}\frac{dy}{dt}-f'_{2h}\frac{dx}{dt}\right)_{\mu=\delta=0}\\&=(H'_xf'_{1h}+H'_yf'_{2h})_{\delta=0}\equiv1,\end{aligned}$$

故得

$$C_{11}(\tau)=2\int_0^\tau(p'_x+q'_y)ds.\tag{9·64}$$

最后，

$$
\begin{aligned}
C_{02}(\tau) &= 2\int_0^\tau\left(\int_0^s(\dot{\psi}p-\dot{\varphi}q)ds\right)[f''_{2hs}p-f''_{1hs}q+f'_{2s}(p'_xf'_{1h}+p'_yf'_{2h})\\
&\quad -f'_{1s}(q'_xf'_{1h}+q'_yf'_{2h})]_{\delta=0}\,ds\\
&\quad +2\int_0^\tau(\dot{\psi}p-\dot{\varphi}q)\,(f'_{2h}p-f'_{1h}q)_{\delta=0}ds\\
&= 2\int_0^\tau\left(\int_0^s(\dot{\psi}p-\dot{\varphi}q)ds\right)\\
&\quad \cdot\left[\frac{d}{ds}(f'_{2h}p-f'_{1h}q)+(f'_{2s}f'_{1h}-f'_{2h}f'_{1s})(p'_x+q'_y)\right]_{\delta=0}ds\\
&\quad +2\int_0^\tau(\dot{\psi}p-\dot{\varphi}q)(f'_{2h}p-f'_{1h}q)_{\delta=0}\,ds\\
&= 2\int_0^\tau\left[\int_0^s(p\dot{\psi}-\dot{\varphi}q)ds\right](p'_x+q'_y)ds\\
&\quad +(f'_{2h}(\tau)p-f'_{1h}(\tau)q)C_{01}(\tau).
\end{aligned}
\tag{9·65}
$$

现选取 p 与 q, 使(9·45)仍以原点为中心点, 那末后继函数的一切系数都应等于零, 由此可得到一些恒等式, 利用它们就可以证明

$$C_{02}(\tau)\equiv 0.$$

1. 取 $p\equiv 0,\ q=\varphi\cdot\psi=x\cdot y$. 这时方程(9·45)相当于条件 $\lambda_1=\lambda_3-\lambda_6=0$ 下的方程(9·30), 故原点为中心点, 因此由(9·63), (9·64), (9·65)可得

$$
\begin{aligned}
&C_{01}(\tau)=-\int_0^\tau xy\dot{x}\,ds=0,\quad C_{11}(\tau)=2\int_0^\tau x\,ds=0,\\
&C_{02}(\tau)=-\int_0^\tau\left(x\int_0^s xy\dot{x}\,dt\right)ds=0.
\end{aligned}
\tag{9·66}
$$

2. 取 $p=xy=\varphi\cdot\psi,\ q\equiv 0$. 方程(9·45)仍相当于条件 $\lambda_1=\lambda_3-\lambda_6=0$ 下的方程(9·30). 仿前可知

$$C_{11}(\tau)=2\int_0^\tau y\,ds=0. \tag{9·67}$$

3. 取 $p=-x^2=-\varphi^2,\ q=2xy=2\varphi\psi$. 这时方程(9·45)相当于 $\lambda_1=\lambda_5=\lambda_4=0$ 时的方程(9·30), 故原点为中心点. 由此得

$$C_{01}(\tau)=-\int_0^\tau(x^2\dot{y}+2xy\dot{x})ds=0,$$

利用(9·66)的第一式可得

$$\int_0^\tau x^2\dot{y}\,ds=0. \tag{9·68}$$

4. 取 $p=-x^2$, $q=-3xy$, 就得到 $\lambda_1=\lambda_5=\lambda_4+5\lambda_3-5\lambda_6=0$ 的情况. 但这时原点不一定是中心点, 故 $C_{02}(\tau)$是否等于零不得而知. 现在要利用已经得到的(9·66), (9·67), (9·68)诸式以及明显的恒等式

$$\int_0^\tau \dot{y}\,ds=\int_0^\tau \dot{x}\,ds=\int_0^\tau x^2\dot{x}\,ds=\int_0^\tau x\dot{x}\,ds=\int_0^\tau y\dot{y}\,ds$$
$$=\int_0^\tau (\dot{x}y+x\dot{y})ds=0 \tag{9·69}$$

来证明$C_{02}(\tau)=0$. 首先,注意由(9·66)与(9·68)可知(9·65)右边的

$$C_{01}(\tau)=\int_0^\tau(-x^2\dot{y}+3xy\dot{x})ds=0,$$

故由(9·65)得

$$C_{02}(\tau)=-5\int_0^\tau\left[x\int_0^s(3xy\dot{x}-x^2\dot{y})dt\right]ds,$$

利用(9·61)的第三式可知

$$\frac{1}{5}C_{02}(\tau)=\int_0^\tau\left(x\int_0^s x^2\dot{y}\,dt\right)ds, \tag{9·70}$$

但 $$\int_0^s x^2\dot{y}\,dt=[x^2y]_0^s-2\int_0^s xy\dot{x}\,dt,$$

故(9·70)右边成为

$$\int_0^\tau x^3y\,ds-x^2(0)y(0)\int_0^\tau x\,ds-2\int_0^\tau\left(x\int_0^s xy\dot{x}\,dt\right)ds.$$

根据(9·66)知道上式第二、三两项都等于零, 因此只要证明

$$\int_0^\tau x^3y\,ds=0 \tag{9·71}$$

就可以了.

现在利用(9·47)来计算 $\int_0^\tau x^2\dot{y}\,ds$ 与 $\int_0^\tau x^2\dot{x}\,ds$, 得到

$$\int_0^{\tau} x^2(x+\lambda_2 x^2+2\lambda_6 xy-\lambda_2 y^2)ds=0, \tag{9·72}$$

$$\int_0^{\tau} x^2(-y-\lambda_6 x^2+2\lambda_2 xy+\lambda_6 y^2)ds=0. \tag{9·73}$$

以 λ_6 乘(9·72)，λ_2 乘(9·73)，相加，得到

$$2(\lambda_2^2+\lambda_6^2)\int_0^{\tau} x^3 y\,ds+\lambda_6\int_0^{\tau} x^3\,ds-\lambda_2\int_0^{\tau} x^2 y\,ds=0. \tag{9·74}$$

此外利用(9·66)与(9·67)，又有

$$\int_0^{\tau} \dot{x}\,ds=-\lambda_6\int_0^{\tau} x^2\,ds+2\lambda_2\int_0^{\tau} xy\,ds+\lambda_6\int_0^{\tau} y^2\,ds=0, \tag{9·75}$$

$$\int_0^{\tau} \dot{y}\,ds=\lambda_2\int_0^{\tau} x^2\,ds+2\lambda_6\int_0^{\tau} xy\,ds-\lambda_2\int_0^{\tau} y^2\,ds=0. \tag{9·76}$$

以 λ_2 乘(9·75)，λ_6 乘(9·76)，相加，得到

$$2(\lambda_2^2+\lambda_6^2)\int_0^{\tau} xy\,ds=0.$$

不妨设 $\lambda_2^2+\lambda_6^2\neq 0$，否则原点为中心点，$C_{02}(\tau)=0$ 显然成立。因此有

$$\int_0^{\tau} xy\,ds=0,$$

代入(9·75)的右边，得到

$$-\lambda_6\int_0^{\tau} (x^2-y^2)ds=0. \tag{9·77}$$

此外，还有

$$\int_0^{\tau} x\dot{x}\,ds=-\lambda_6\int_0^{\tau} x^3\,ds+2\lambda_2\int_0^{\tau} x^2 y\,ds+\lambda_6\int_0^{\tau} xy^2\,ds=0,$$

$$\int_0^{\tau} y\dot{y}\,ds=\lambda_2\int_0^{\tau} x^2 y\,ds+2\lambda_6\int_0^{\tau} xy^2\,ds-\lambda_2\int_0^{\tau} y^3\,ds=0,$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\tau} (\dot{x}y+x\dot{y})ds= & -\lambda_6\int_0^{\tau} x^2 y\,ds+2\lambda_2\int_0^{\tau} xy^2\,ds+\lambda_6\int_0^{\tau} y^3\,ds\\ & +\lambda_2\int_0^{\tau} x^3\,ds+2\lambda_6\int_0^{\tau} x^2 y\,ds-\lambda_2\int_0^{\tau} xy^2\,ds=0.\end{aligned}$$

由以上诸式消去 $\int_0^{\tau} xy^2 ds$ 及 $\int_0^{\tau} y^3 ds$ (利用(9·77))，可得

$$2(\lambda_2^2+\lambda_6^2)\left[\lambda_6\int_0^\tau x^3\,ds-\lambda_2\int_0^\tau x^2y\,ds\right]=0,$$

利用上式[ ]=0 由(9·74)立刻得到(9·71). 引理 9·2 证毕.

下面我们证明本节开始所写的定理 9·3. 由引理 9·2 知可写

$$\begin{aligned}\rho-\rho_0=\rho_0[&2\pi\lambda_1(1+\lambda_1\varphi_1(\lambda_1)+\rho_0\psi_1(\rho_0,\ \lambda_i))\\&+\bar v_3(1+\rho_0\psi_3(\rho_0,\ \lambda_i))\rho_0^2+\bar v_5(1+\rho_0\psi_5(\rho_0,\ \lambda_i))\rho_0^4\\&+\bar v_7(1+\rho_0\psi_7(\rho_0,\ \lambda_i))\rho_0^6],\end{aligned}$$

或简记为

$$\rho-\rho_0=\rho_0[2\pi\lambda_1\psi_1^*+\bar v_3\psi_3^*\rho_0^2+\bar v_5\psi_5^*\rho_0^4+\bar v_7\psi_7^*\rho_0^6]^{1)},\quad(9\cdot78)$$

其中诸 ψ_j^* 是 ρ_0 的幂级数, 系数是诸 λ_i 的整函数, 这些幂级数当

$$\|\lambda_i-\lambda_i^*\|<\varepsilon,\quad \rho_0<\gamma(\varepsilon,\ \lambda_i^*)$$

时收敛.

今设 λ_i^* 所对应的方程(9·30)以原点为中心点, 我们来证明必可找到 ε_0, δ_0, 使当 $\|\lambda_i-\lambda_i^*\|<\varepsilon_0$ 时方程 $\rho-\rho_0=0$ 在原点的 δ_0 邻域中不能有多于三个的正根, 这也就表示方程(9·30)在原点的 δ_0 邻域中不能有多于三个的极限环.

首先, 可以找到 $\varepsilon_1<\varepsilon$ 及 δ_1, 使当 $\|\lambda_i-\lambda_i^*\|<\varepsilon_1$, $0<\rho_0\leqslant\delta_1$ 时成立

$$\psi_j^*\geqslant\frac{1}{2}\quad(j=1,\ 3,\ 5,\ 7).$$

将(9·78)改写为

$$\rho-\rho_0=\rho_0\psi_1^*\left[2\pi\lambda_1+\bar v_3\frac{\psi_3^*}{\psi_1^*}\rho_0^2+\bar v_5\frac{\psi_5^*}{\psi_1^*}\rho_0^4+\bar v_7\frac{\psi_7^*}{\psi_1^*}\rho_0^6\right],\quad(9\cdot79)$$

当 ρ_0 足够小时每一 ψ_j^*/ψ_1^* 又可按 ρ_0 与 λ_1 展开为幂级数

---

1) 借助于这个式子, 如果 $\lambda_1\neq0$, 就称(0, 0)是粗焦点, 它等价于发散量在(0, 0)不等于零. 如果 $\lambda_1=0$, 而 $\bar v_3\neq0$, 就称(0, 0)是一阶细焦点; 如果 $\lambda_1=\bar v_3=0$, 而 $\bar v_5\neq0$, 就称(0, 0)是二阶细焦点; 如果 $\lambda_1=\bar v_3=\bar v_5=0$, 而 $\bar v_7\neq0$, 就称(0, 0)是三阶细焦点. 由此可知二次微分系统的焦点最多只能是三阶的. 这一定义在§11 以后的各节中常会用到.

$$\frac{\psi_j^*}{\psi_1^*}=1+\lambda_1\varphi_2^{(j)}+\rho_0\psi_2^{(j)}=\psi_j^{**}\quad(j=3,\ 5,\ 7),$$

然后再取 ε_2, δ_2, 使当 $\|\lambda_i-\lambda_i^*\|<\varepsilon_2$, $0<\rho_0\leqslant\delta_2$ 时有

$$\psi_j^{**}\geqslant\frac{1}{2},$$

显见当 $0<\rho_0\leqslant\delta_2$ 时方程 $\rho-\rho_0=0$ 的正根就是方程

$$\psi_0=2\pi\lambda_1+\bar{v}_3\psi_3^{**}\rho_0^2+\bar{v}_5\psi_5^{**}\rho_0^4+\bar{v}_7\psi_7^{**}\rho_0^6=0$$

的正根. 记

$$\begin{aligned}\bar{\psi}&=\frac{\partial\psi_0}{\partial\rho_0}\Big/\rho_0\\&=2\bar{v}_3(1+\lambda_1\varphi_2^{(3)}+\rho_0\psi_{21}^{(3)})+4\bar{v}_5(1+\lambda_1\varphi_2^{(5)}+\rho_0\psi_{21}^{(5)})\rho_0^2\\&\quad+6\bar{v}_7(1+\lambda_1\varphi_2^{(7)}+\rho_0\psi_{21}^{(7)})\rho_0^4,\end{aligned}\tag{9·80}$$

可知在 $0<\rho_0\leqslant\delta_2$ 时函数 ψ_0 的正零点最多只能比函数 $\bar{\psi}$ 的正零点多一个.

注意现在(9·80)的右方与(9·79)右方的方括弧内已具相同的形式, 二者的系数亦具有类似的性质, 但后者关于 ρ_0 的次数(把圆括弧内的函数看做系数)却比前者低了两次. 因此对 $\bar{\psi}$ 仿照前述同样的办法再做两次, 就可知道必定存在 $\delta_3>0$, 使当 $0<\rho_0\leqslant\delta_3$ 时函数 $\bar{\psi}$ 的正零点个数最多只能比函数

$$\bar{\bar{\psi}}=48\bar{v}_7(1+\lambda_1\varphi_3^{(7)}+\rho_0\psi_{31}^{(7)})$$

的正零点多两个. 但对 $\bar{\bar{\psi}}$ 显然存在 ε_4 与 δ_4, 使对一切满足 $\|\lambda_i-\lambda_i^*\|<\varepsilon_4$ 的 λ_i 及 $0<\rho_0\leqslant\delta_4$, $\bar{\bar{\psi}}$ 没有零点, 于是对此种 λ_i 与 ρ_0 函数 ψ_0 最多只有三个正零点.

仿此可证: 如果 λ_i^* 所对应的方程(9·30)不以原点为中心点, 即不是一切 $v_k(2\pi,\ \lambda_i^*)$ 都等于零, 那末当对应的(9·78)右边括弧内第一个不等于零的是 λ_1^*, $\bar{v}_3$, $\bar{v}_5$ 或 $\bar{v}_7$ 时, 就可找到 ε_0 与 δ_0, 使对一切满足 $\|\lambda_i-\lambda_i^*\|<\varepsilon_0$, $0<\rho_0\leqslant\delta_0$ 的 λ_i, 对应的方程(9·20)在原点的 δ_0 邻域中没有, 至多有一个, 两个或三个极限环.

其次要证明定理的第二部分. 假设 λ_i^* 所对应的方程以原点

为中心点，且

$$\lambda_1^*=\lambda_5^*=\lambda_4^*+5\lambda_3^*-5\lambda_6^*=\lambda_3^*\lambda_6^*-2\lambda_6^{*2}-\lambda_2^{*2}=0,$$

但 $\lambda_4^*\neq 0$, $\lambda_2^*\neq 0$, $\lambda_3^*-\lambda_6^*\neq 0$, 亦即原点是引理 9·1 中的第四类中心点．现在略略变动 λ_2^* 使成为 $\lambda_2\neq 0$, 且使

$$\lambda_3^*\lambda_6^*-2\lambda_6^{*2}-\lambda_2^2\neq 0,$$

于是这时 $\bar{v}_7\neq 0$, 不妨设 $\bar{v}_7>0$, 而

$$\bar{v}_5=\bar{v}_3=\bar{v}_1=0.$$

已知对任何 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, $0<\delta<\delta_0$, 当 $0<\rho<\delta$, $\|\lambda_i-\lambda_i^*\|<\varepsilon$ 时条件 $\psi_j^*\geqslant\frac{1}{2}$ 常成立．今变动 λ_4^* 成为 λ_4, 使 $\bar{v}_5$ 成为负的，但仍有 $\bar{v}_7>0$; 又要求 $|\bar{v}_5|$ 如此之小，使对一切

$$\rho_0\in(\delta_0^{(1)},\ \delta_0^{(2)})\subset\left(\frac{1}{2}\delta,\ \delta\right),$$

不等式 $\rho-\rho_0>0$ 仍成立．另一方面，当 $|\rho_0|$ 很小时(9·78)右边与 $\bar{v}_5$ 同号，故知在 $(0,\ \delta)$ 中方程 $\rho-\rho_0=0$ 至少有一个正根，设 $\rho=\rho'$ 是这些根中的最小者．今再变动 λ_5^* 成为 λ_5, 使 $\bar{v}_3>0$, 但 $|\bar{v}_3|$ 如此之小，使对一切

$$\rho_0\in(\delta_1^{(1)},\ \delta_1^{(2)})\subset(\delta_0^{(1)},\ \delta_0^{(2)}),$$

不等式 $\rho-\rho_0>0$ 仍成立，而对一切

$$\rho_0\in(\delta_2^{(1)},\ \delta_2^{(2)})\subset(0,\ \rho')$$

不等式 $\rho-\rho_0<0$ 成立．由于当 $|\rho_0|$ 足够小时 $\rho-\rho_0$ 应与 $\bar{v}_3$ 同号为正，故知此时在 $(0,\ \delta)$ 中 $\rho-\rho_0$ 至少有两个根，设 $\rho=\rho''$ 是这些根中的最小者．最后变动 λ_1^* 成为 $\lambda_1<0$, 并使

1．对一切 $\rho_0\in(\delta_3^{(1)},\ \delta_3^{(2)})\subset(\delta_1^{(1)},\ \delta_1^{(2)})$，成立不等式

$$\rho-\rho_0>0,$$

2．对一切 $\rho_0\in(\delta_4^{(1)},\ \delta_4^{(2)})\subset(\delta_2^{(1)},\ \delta_2^{(2)})$，成立不等式

$$\rho-\rho_0<0,$$

3．对一切 $\rho_0\in(\delta_5^{(1)},\ \delta_5^{(2)})\subset(0,\ \rho'')$，成立不等式

$$\rho-\rho_0>0.$$

此外我们又知道当 $|\rho_0|$ 足够小时 $\rho-\rho_0$ 与 λ_1 同号为负，故知此时在 $(0,\ \delta)$ 中 $\rho-\rho_0=0$ 至少有三个根.

至于其他三类中心点却不一定都可以证明它们能产生三个极限环，讨论方法与前类似，故从略．又仿此可证使(9·78)右边第一个不等于零的系数为 $\bar{v}_7$ 的焦点亦能产生三个极限环，使第一个不等于零的系数为 $\bar{v}_5$ 的焦点能产生两个极限环，使第一个不等于零的系数为 $\bar{v}_3$ 的焦点能产生一个极限环，证明从略.

总结以上的内容可以看出，引理 9·2 的证明的难点在于证明(9·39)的最后一个式子，亦即要证(9·44)中的 $\psi(\rho_0,0)\equiv 0$ 在 $\varphi=0$ 的某一线段上[1]．Баутин 的方法可以分为下列三个步骤:

1．找出一系三次闭曲线

$$H(x,\ y)=h,$$

借此引进新的曲线坐标 $(\delta,\ s)$ 以代替原来的极坐标 $(\rho,\ \varphi)$，并写出方程(9·45)在新坐标系统下的后继函数(9·53).

2．把 $\delta(\tau)-\delta_0$ 用两种不同的方法展开为 μ 与 $\rho_0-\rho_0^*$ 的幂级数，从而得证 $\psi(\rho_0,\ 0)\equiv 0$ 等价于 $C_{02}(\tau)\equiv 0$.

3．先在(9·45)中取特殊的 $p(x,\ y)$，$q(x,\ y)$ 使原点仍保持为中心，由于这时对应的(9·53)中应成立

$$\delta(\tau)-\delta_0\equiv 0,$$

故可借此获得许多只依赖于曲线族 $H(x,y)=h$ 的恒等式(9·66)，(9·67)与(9·68)，然后利用这些恒等式以及明显的恒等式(9·69)来证明与

$$\lambda_1=\lambda_5=\lambda_4+5\lambda_3-5\lambda_6=0$$

时的方程(9·30)对应的方程(9·45)在新坐标系统下的后继函数展开式(9·53)中的

1) 注意，为了证明定理 9·3，实际上只需要(9·44)式前一个关于 $v_k(2\pi,\ \lambda_i)$ 的表达式就够了.

$$C_{02}(\tau)\equiv 0.$$

关于二次系统存在中心点的充要条件，除了本节定理 9·1 和 9·2 给出的以外，我们以后还要给出其他便于应用的形式. 同样的问题对于不含二次项的三次多项式系统也早已被 Н. А. Сахарников[163] 所解决.

习 题

1. 证明(9·25)是(9·22)的通积分.

2. 将(9·26)右边[ ]除到左边去，然后在原点附近展开，证明原点是中心点.

3. 详证 $\bar{v}_5(2\pi,\ \lambda_i)=\frac{\pi}{24}\lambda_2\lambda_4(\lambda_3-\lambda_6)(\lambda_4+5\lambda_3-5\lambda_6)$.

4. 证明二次曲线 $x^2=Ay^2+2By+C$ 确是方程(9·14)的积分曲线.

5. 不用作变换(9·11)，证明(9·10)有积分因子

$$\frac{1}{1+a'y}[(a'+b')b'x^2-(1+b'y)^2+c'x(1+b'y)]^{-1}.$$

6. 证明(9·14)有积分因子 $(1+ay)^{\frac{2\beta}{\alpha}-1}$.

7. 详细证明(9·28)在每一奇点 $\left(\pm\sqrt{a},\frac{a^2}{a-A}\right)$ 外围存在极限环(用环域定理).

8. 详细证明(9·29)对于某些 $\mu<0$ 在 $(\sqrt{-\mu},\ \pm1)$ 外围各存在极限环.

9. 证明方程

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-x(1-x^2)(4-x^2)+xy(\alpha^2-x^2)$$

以(0, 0)为中心点，而对某些 α 值在(±2, 0)外围各存在极限环[162].

§10. 一些没有极限环的二次系统的全局结构分析

给了一个平面多项式系统，如果知道了它在有限平面和赤道上的奇点个数和每个奇点的拓扑性质，闭轨线的有无，个数和相对位置，以及过奇点的分界线的去向，则这个系统的全局结构就可以确定了. 五十年代以后人们对一些没有极限环的二次系统作了全局分析，并画出了它们的全局相图. 本节就来介绍这方面的一些工作. 在§13中读者将会看到，没有极限环的系统若添加了一项而产生极限环，则极限环的个数和相对位置是和原来的无环系统的全局结构很有关系的.

I. 齐二次系统的全局拓扑分类

系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{22}y^2,\\ \dfrac{dy}{dt}=b_{11}x^2+b_{12}xy+b_{22}y^2\end{cases}\qquad(10.1)$$

称为齐二次系统. 显然，它没有极限环. 当(10·1)的右端无公因式时，(0, 0)是它的唯一奇点. [164]研究了(10·1)在(0, 0)附近的结构，指出共有16种可能情况，并给出区分它们的方法. [165]研究了(10·1)的全局拓扑分类，并且根据它有无充满奇点的直线以及有几条直线解而得到(10·1)在线性变换下的标准型，此文用了非结合代数的方法，值得注意. 最近[166]研究了(10·1)右端有公因式和无公因式时的全局拓扑分类和几何分类，并指出区分它们的系数准则. 在这里我们只介绍当(10·1)的右端无公因式时的所有可能的全局拓扑结构. 有公因式的情况更为简单，作为习题，请读者自己完成.

先作一点准备工作，这在一般的定性理论书中都有. (10·1)的例外方向 $\theta=\theta_0$ 由方程

$$G(\theta)=-a_{22}\sin^3\theta+(b_{22}-a_{12})\sin^2\theta\cos\theta+(b_{12}-a_{11})\sin\theta\cos^2\theta+b_{11}\cos^3\theta=0 \qquad (10\cdot 2)$$

确定. 容易知道方程 (10·2) 在 $[0,\ 2\pi)$ 中至少有一对实根 $\theta=\theta_0$ 和 $\theta=\theta_0+\pi$. 不妨设 $\theta_0=0$, 于是 $b_{11}=0$, 代替(10·1)我们只须讨论系统

$$\frac{dx}{dt}=a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{22}y^2,\quad \frac{dy}{dt}=b_{12}xy+b_{22}y^2, \qquad (10\cdot 3)$$

此时必有 $a_{11}\neq 0$, 否则(10·3)的右端将有公因式了.

现在方程(10·2)成为

$$G(\theta)=\sin\theta[-a_{22}\sin^2\theta+(b_{22}-a_{12})\sin\theta\cos\theta+(b_{12}-a_{11})\cos^2\theta]=0. \qquad (10\cdot 4)$$

上式[ ]内的判别式为

$$\Delta=(b_{22}-a_{12})^2+4a_{22}(b_{12}-a_{11}). \qquad (10\cdot 5)$$

引入极坐标 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$, (10·3)化成

$$r\frac{d\theta}{dr}=\frac{G(\theta)}{H(\theta)}, \qquad (10\cdot 6)$$

其中

$$H(\theta)=a_{11}\cos^3\theta+a_{12}\cos^2\theta\sin\theta+(b_{12}+a_{22})\cos\theta\sin^2\theta+b_{22}\sin^3\theta. \qquad (10\cdot 7)$$

积分(10·6), 得

$$r=r_1e^{\int_{\theta_1}^{\theta}\frac{H(\theta)}{G(\theta)}d\theta}\quad (r_1\neq 0,\ G(\theta_1)\neq 0). \qquad (10\cdot 8)$$

为研究无穷远奇点, 将 (10·3) 化为齐次坐标, 再令 $x=1$, $\frac{dt}{d\tau}=z$, 得

$$\begin{aligned}\frac{dz}{d\tau}&=-z(a_{11}+a_{12}y+a_{22}y^2),\\\frac{dy}{d\tau}&=-a_{22}y^3+(b_{22}-a_{12})y^2+(b_{12}-a_{11})y.\end{aligned}\tag{10·9}$$

无穷远奇点$(1, y_i, 0)$的y_i是方程

$$-a_{22}y^3+(b_{22}-a_{12})y^2+(b_{12}-a_{11})y=0 \tag{10·10}$$

的根，它的判别式与(10·5)相同．在无穷远奇点$(1, y_i, 0)$处的特征方程的两根λ_1与λ_2之积为

$$\lambda_1\lambda_2=-(a_{11}+a_{12}y_i+a_{22}y_i^2)[-3a_{22}y_i^2+2(b_{22}-a_{12})y_i+b_{12}-a_{11}]. \tag{10·11}$$

现在开始对(10·3)进行讨论．

1．只有一对例外方向．这里又可分为两种情况．

(i) $\theta=0$与$\theta=\pi$是唯一的一对单重例外方向，即设

$$\Delta<0, \text{从而 } a_{22}(b_{12}-a_{11})<0. \tag{10·12}$$

现在$y=0$是唯一的一条积分直线．为了研究例外方向$\theta=0$的扇形邻域内积分曲线的性态，设(10·8)中的点(r_1, θ_1)位于$\theta=0$的扇形邻域内，并将$G(\theta)$和$H(\theta)$分别展成θ的幂级数，得

$$\frac{H(\theta)}{G(\theta)}=\frac{a_{11}}{(b_{12}-a_{11})\theta}[1+\cdots].$$

由(10·8)可知，若$a_{11}(b_{12}-a_{11})>0$，则当$\theta\to0$时$r\to0$．此时射线$\theta=0$是所谓结点型射线，如图10·1．若$a_{11}(b_{12}-a_{11})<0$，则当$\theta\to0$时$r\to\infty$，$\theta=0$为孤立型射线，如图10·2．

另一方面，由(10·10)知道，这时无穷远有唯一的奇点(1, 0, 0)．再由(10·11)知，若$a_{11}(b_{12}-a_{11})>0$，则(1, 0, 0)为鞍点；若$a_{11}(b_{12}-a_{11})<0$，则(1, 0, 0)为结点．对于$\theta=\pi$，结论是同样的．

以上的讨论虽然只是局部的，但注意到(10·3)是齐次系统，没有极限环，且只有上述这些奇点，又$y=0$是唯一的一条积分直线，因此我们得到

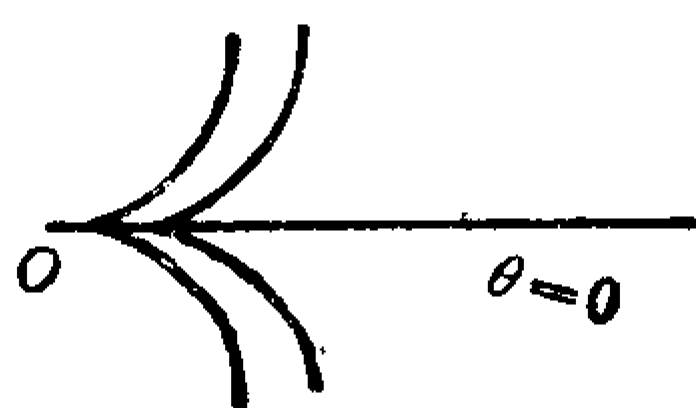


图 10·1



图 10·2

定理 10·1 对于系统(10·3),设两方程的右端无公因式,又设 $\Delta<0$. 则当 $a_{11}(b_{12}-a_{11})>0$ 时其全局相图如图 10·5 (a); 当 $a_{11}(b_{12}-a_{11})<0$ 时,全局相图如图 10·5(b).

(ii) $\theta=0$ 与 $\theta=\pi$ 是一对三重例外方向,即设

$$b_{22}-a_{12}=b_{12}-a_{11}=0. \tag{10·13}$$

从而必有 $a_{22}\neq 0$, 否则(10·3)两方程右端有公因式了. 现在 $y=0$ 仍是唯一的一条积分直线,而

$$\frac{H(\theta)}{G(\theta)}=-\frac{a_{11}}{a_{22}\,\theta^3}[1+\cdots].$$

由(10·8)可知,若 $a_{11}a_{22}>0$,则当 $\theta\to 0$ 时 $r\to\infty$, 射线 $\theta=0$ 为孤立型射线,如图 10·2; 若 $a_{11}a_{22}<0$,则当 $\theta\to 0$ 时 $r\to 0$, 射线 $\theta=0$ 为结点型射线,如图 10·1.

在上述假定下,方程(10·9)成为

$$\frac{dz}{d\tau}=-z(a_{11}+a_{12}y+a_{22}y^2), \quad \frac{dy}{d\tau}=-a_{22}y^3,$$

唯一的无穷远奇点(1, 0, 0)是高阶奇点. 由高阶奇点的理论可知,若 $a_{11}a_{22}>0$,则 (1, 0, 0)是结点; 若 $a_{11}a_{22}<0$,则(1, 0, 0)是鞍点.

对于 $\theta=\pi$,结论也是一样的. 于是有

定理 10·2 对于右端无公因式的系统 (10·3), 设 $b_{22}-a_{12}=b_{12}-a_{11}=0$. 则当 $a_{11}a_{22}>0$ 时其全局相图如图 10·5(b); 当 $a_{11}a_{22}<0$ 时如图 10·5(a).

2. 只有两对例外方向，则其中必有一对是二重的. 不妨设 $\theta=0$ 与 $\theta=\pi$ 是二重例外方向，$\theta=\frac{\pi}{2}$ 与 $\theta=\frac{3\pi}{2}$ 是单重例外方向；即不妨设

$$a_{22}=0,\ b_{12}-a_{11}=0, \text{从而 } b_{22}\neq a_{12}. \qquad (10\cdot14)$$

于是有两条积分直线 $x=0$ 和 $y=0$. 下面分别来考察例外方向 $\theta=0(\theta=\pi)$ 和 $\theta=\frac{\pi}{2}\left(\theta=\frac{3\pi}{2}\right)$的扇形邻域内积分曲线的性态.

先看例外方向 $\theta=0$，这时有

$$\frac{H(\theta)}{G(\theta)}=\frac{a_{11}}{(b_{22}-a_{12})\theta^2}[1+\cdots].$$

由(10·8)可知，若 $a_{11}(b_{22}-a_{12})>0$，则当 $\theta\to0^+$ 时 $r\to0$；当 $\theta\to0^-$ 时 $r\to\infty$. 这时 $\theta=0$ 是所谓第二类变异射线，如图10·3. 若 $a_{11}(b_{22}-a_{12})<0$，则当 $\theta\to0^+$ 时 $r\to\infty$；$\theta\to0^-$ 时 $r\to0$. 这时 $\theta=0$ 是所谓第一类变异射线，如图 10·4.

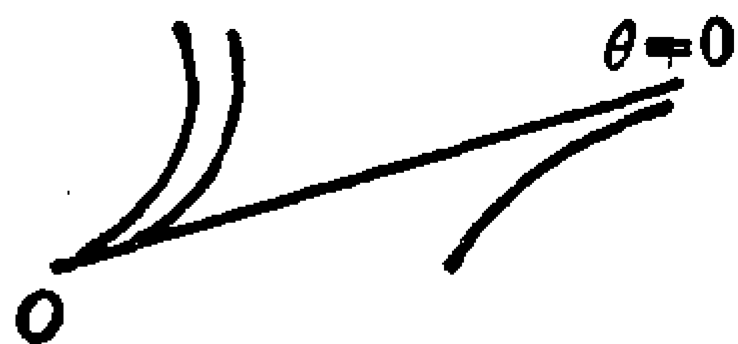


图 10·3



图 10·4

在上述假定之下方程(10·9)成为

$$\frac{dz}{d\tau}=-z(a_{11}+a_{12}y),\quad \frac{dy}{d\tau}=(b_{22}-a_{12})y^2.$$

由高阶奇点的理论可知(1, 0, 0)是半鞍结点，当 $a_{11}(b_{22}-a_{12})>0$ 时(1, 0, 0)的正 y 轴半边为双曲区域，当 $a_{11}(b_{22}-a_{12})<0$ 时(1, 0, 0)的正 y 轴半边为抛物区域. 对于 $\theta=\pi$ 与奇点(−1,0,0)也有类似的结论.

至于例外方向 $\theta=\frac{\pi}{2}\left(\theta=\frac{3\pi}{2}\right)$，讨论起来和1)(i)类似，只要

把系数 a 和 b 互换，下标 1 和 2 互换即可，但算作 $a_{12}=a_{21}$，$b_{12}=b_{21}$. 故得结论：若 $b_{22}(a_{12}-b_{22})>0$，则射线 $\theta=\frac{\pi}{2}\left(\theta=\frac{3\pi}{2}\right)$ 为结点型射线，无穷远奇点 $(0, 1, 0)$ 是鞍点；若 $b_{22}(a_{12}-b_{22})<0$，则射线 $\theta=\frac{\pi}{2}\left(\theta=\frac{3\pi}{2}\right)$ 为孤立型射线，无穷远奇点 $(0, 1, 0)$ 是结点。

把 $a_{11}(b_{22}-a_{12})\gtrless 0$ 两种情况和 $b_{22}(a_{12}-b_{22})\gtrless 0$ 两种情况组合，可得四种情况. 经过分析可知，若不计较 x 轴的正负向的不同，则 $b_{22}(a_{12}-b_{22})>0$ 时的两种全局相图实际上是一样的，$b_{22}(a_{12}-b_{22})<0$ 时的两种全局相图也一样，于是有：

定理 10·3 对于右端无公因式的系统 (10·3)，设能化为 $a_{22}=0$，$b_{12}=a_{11}$，则当 $b_{22}(a_{12}-b_{22})>0$ 时全局相图如图 10·5(c)；当 $b_{22}(a_{12}-b_{22})<0$ 时全局相图如图 10·5(d)。

3. 有三对单重例外方向. 不妨设这三对例外方向分别为 $\theta=0(\theta=\pi)$，$\theta=\frac{\pi}{2}\left(\theta=\frac{3\pi}{2}\right)$ 和 $\theta=\theta_0(\theta=\theta_0+\pi)$，$0<\theta_0<\frac{\pi}{2}$. 这就是说，不妨设

$$a_{22}=0,\ b_{12}-a_{11}\neq 0\neq b_{22}-a_{12},\ \operatorname{tg}\theta_0=\frac{b_{12}-a_{11}}{a_{12}-b_{22}}>0. \tag{10·15}$$

现在有三条积分直线 $x=0$, $y=0$ 和 $y-x\operatorname{tg}\theta_0=0$. 由 1. (i) 知道，当 $a_{11}(b_{12}-a_{11})>0$ 时 $\theta=0(\theta=\pi)$ 为结点型射线，无穷远奇点 $(1, 0, 0)$ 为鞍点；当 $a_{11}(b_{12}-a_{11})<0$ 时 $\theta=0(\theta=\pi)$ 为孤立型射线，$(1, 0, 0)$ 为结点. 又由 2. 知道，当 $b_{22}(a_{12}-b_{22})>0$ 时 $\theta=\frac{\pi}{2}\left(\theta=\frac{3\pi}{2}\right)$ 为结点型射线，无穷远奇点 $(0, 1, 0)$ 为鞍点；当 $b_{22}(a_{12}-b_{22})<0$ 时 $\theta=\frac{\pi}{2}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ 为孤立型射线，$(0, 1, 0)$ 为结点.

至于射线 $\theta=\theta_0$，将 $G(\theta)$ 和 $H(\theta)$ 展成 $\theta-\theta_0$ 的幂级数，得

$$\frac{H(\theta)}{G(\theta)}=\frac{H(\theta_0)}{C_1(\theta-\theta_0)}[1+\cdots],$$

其中

$$C_1=G'(\theta_0)=\frac{-\sin\theta_0\cos^2\theta_0[(a_{12}-b_{22})^2+(b_{12}-a_{11})^2]}{a_{12}-b_{22}}\neq 0,$$

$$H(\theta_0)=\cos^3\theta_0[a_{11}+a_{12}\operatorname{tg}\theta_0+b_{12}\operatorname{tg}^2\theta_0+b_{22}\operatorname{tg}^3\theta_0]$$

$$=-\frac{\cos^3\theta_0}{(a_{12}-b_{22})^3}(a_{11}b_{22}-a_{12}b_{12})[(a_{12}-b_{22})^2+(b_{12}-a_{11})^2]\neq 0,$$

从而 $C_1H(\theta_0)$ 与 $a_{11}b_{22}-a_{12}b_{12}$ 同号. 由(10·8)可知, 若 $a_{11}b_{22}-b_{12}a_{12}>0$, 则射线 $\theta=\theta_0$ 为结点型射线, 此时计算在无穷远奇点 $(1, \operatorname{tg}\theta_0, 0)$ 的两特征根之积, 得到

$$\lambda_1\lambda_2=\left(\frac{b_{12}-a_{11}}{a_{12}-b_{22}}\right)(a_{12}b_{12}-a_{11}b_{22})<0.$$

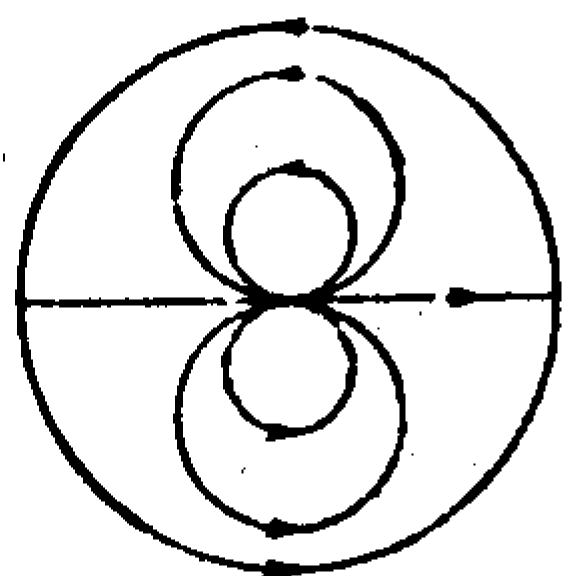
故知 $(1, \operatorname{tg}\theta_0, 0)$ 是鞍点; 若 $a_{11}b_{22}-b_{12}a_{12}<0$, 则 $\theta=\theta_0$ 为孤立型射线, 此时 $\lambda_1\lambda_2>0$, $(1, \operatorname{tg}\theta_0, 0)$ 为结点. 于是有

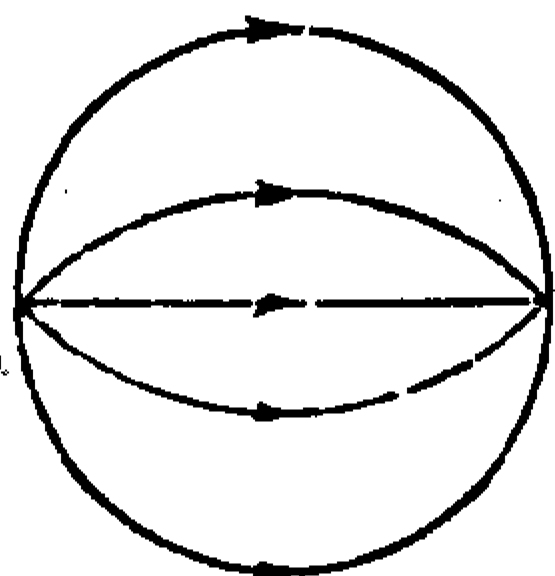
定理 10·4　对于右端无公因式的系统(10·3), 设已化成 $a_{22}=0$, $(b_{12}-a_{11})(a_{12}-b_{22})>0$, 则当 $A\equiv a_{11}(b_{12}-a_{11})$, $B\equiv b_{22}(a_{12}-b_{22})$ 和 $C\equiv a_{11}b_{22}-a_{12}b_{12}$ 三式全为负时, 全局相图如图 10·5(*e*); 当 A, B, C 三式中有二负一正时, 全局相图如图 10·5(*f*), 当 A, B, C 三式中有一负二正时, 全局相图如图 10·5(*g*).

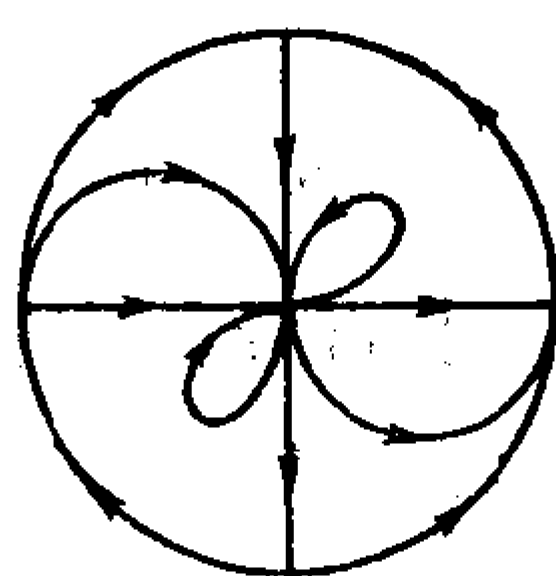
注意: A, B, C 不可能同时为正, 这是因为: $A>0$, $B>0$ 时由 $\operatorname{tg}\theta_0>0$ 知 a_{11} 与 b_{22} 同号. 此时若 $a_{11}>0$, 则 $b_{12}>a_{11}>0$, $a_{12}>b_{22}>0$, 从而有 $C<0$; 若 $a_{11}<0$, 则也有 $C<0$.

综合以上诸定理, 可得

定理 10·5　右端无公因式的齐二次系统的全局相图共有七


图　10·5(*a*)


图　10·5(*b*)


图　10·5(*c*)

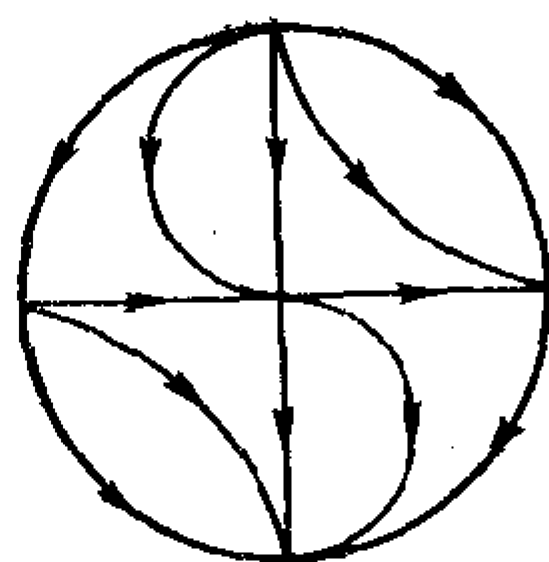


图 10·5(d)

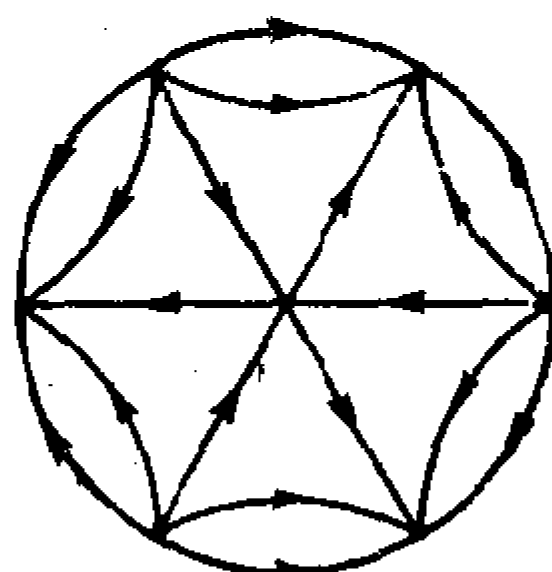


图 10·5(e)

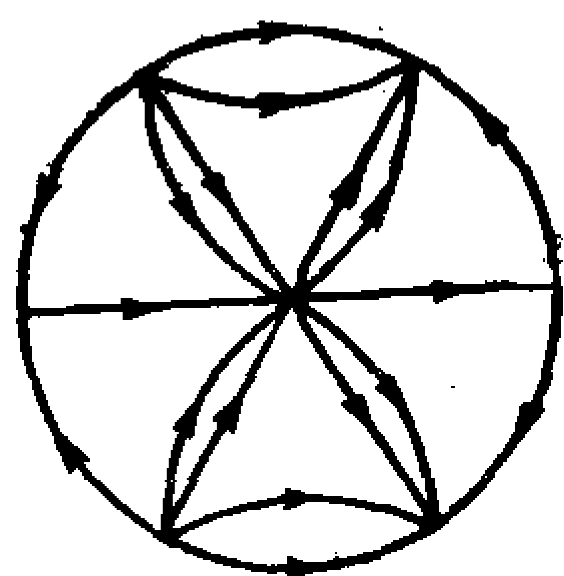


图 10·5(f)

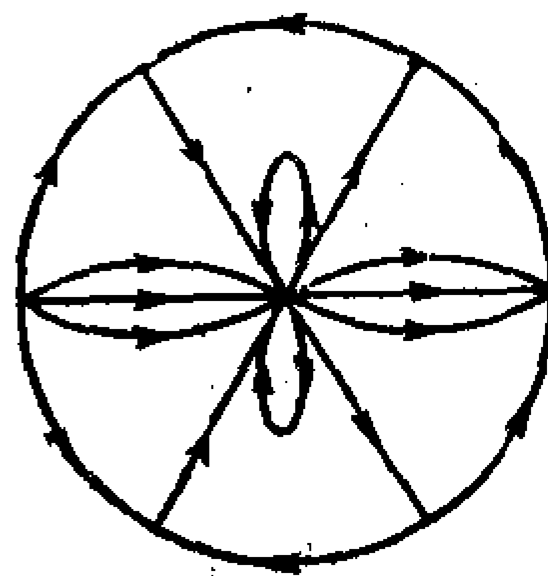


图 10·5(g)

种不同的拓扑结构，分别见图 10·5(a)—(g).

上述每一图中的箭头只是表示两种可能情况中的一种，在另一种情形，箭头都应倒过来.

II. 具有星形结点的二次系统的全局结构

[167]研究了具有星形结点的二次系统，通过分析他证明这种系统没有极限环，且一共只有十七种不同拓扑结构的全局相图. 他作出了相图，并给出区分这些相图的方法. 下面介绍他的工作，但证明有简化. 首先指出(由 Jordan 法式的理论)下述两个引理显然是成立的：

引理 10·1 系统

$$\frac{dx}{dt}=x+b_0x^2+b_1xy+b_2y^2,\ \frac{dy}{dt}=y+a_0x^2+a_1xy+a_2y^2 \quad (10\cdot16)$$

经任何非奇异的实的线性变换以后，它的形式不变.

引理 10·2 对于二次系统，原点是它的星形结点的充要条件是该系统具有(10·16)的形式.

下面按有限远奇点的个数不同分别进行讨论.

1. 四个有限远奇点的情况.

设(一般的)二次系统有四个有限远奇点，下述引理说明以这四个奇点为顶点的四边形是凸还是凹，与奇点的性质有密切的关系[169]，以下的简单证明取自[168].

引理 10·3 设二次系统有四个奇点，如果以这些点为顶点的四边形是凸的，则两个相对的奇点是鞍点，另外两个相对的奇点是非鞍点(即结点，焦点或中心)；如果四边形是凹的，则三个外部奇点是鞍点(非鞍点)，而一个内部奇点是非鞍点(鞍点).

【证】 作线性变换后可认为这些奇点位于原点 $O(0, 0)$，$A_1(1, 0)$，$A_2(\alpha, \beta)$ 与 $A_3(0, 1)$，其中 $\alpha>0$，$\beta>0$，$\alpha+\beta\neq1$. 于是知二次系统

$$\frac{dx}{dt}=a_1x+a_2y+a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{22}y^2,$$

$$\frac{dy}{dt}=b_1x+b_2y+b_{11}x^2+b_{12}xy+b_{22}y^2 \tag{10·17}$$

中的系数应满足下述关系:

$$a_1+a_{11}=0,\ \ b_1+b_{11}=0,\ \ a_2+a_{22}=0,\ \ b_2+b_{22}=0,$$

$$a_1\alpha+a_2\beta+a_{11}\alpha^2+a_{12}\alpha\beta+a_{22}\beta^2=0,$$

$$b_1\alpha+b_2\beta+b_{11}\alpha^2+b_{12}\alpha\beta+b_{12}\beta^2=0.$$

于是(10·17)可以改写为

$$\frac{dx}{dt}=p_1x(x-1)+p_2y(y-1)+p_3xy,$$

$$\frac{dy}{dt}=q_1x(x-1)+q_2y(y-1)+q_3xy, \tag{10·18}$$

其中

$$p_3=-\frac{\alpha-1}{\beta}p_1-\frac{\beta-1}{\alpha}p_2,\qquad q_3=-\frac{\alpha-1}{\beta}q_1-\frac{\beta-1}{\alpha}q_2. \tag{10·19}$$

由于此系统正好有四个奇点，故每一奇点都是初等奇点，计算 O 点的线性部分的特征方程的常数项，应得

$$D_0=p_1q_2-p_2q_1\neq 0.$$

容易证明,对另外三个奇点 A_1, A_2, A_3, 类似地有

$$D_1=-\frac{\alpha+\beta-1}{\alpha}D_0,\ D_2=(\alpha+\beta-1)D_0,\ D_3=-\frac{\alpha+\beta-1}{\beta}D_0$$

奇点 A_i 是鞍点还是非鞍点,由 $D_i<0$ 还是 >0 决定. 如果 $\alpha+\beta>1$, 则四边形是凸的, D_0 与 D_2 同号, D_1 与 D_3 同号, 但与 D_0 异号. 如果 $\alpha+\beta<1$, 则四边形是凹的, O, A_1, A_3 是三个外部奇点, 它们的 D_0, D_1, D_3 同号, 但与 D_2 反号. 证毕.

注意: 这个证明虽很简洁, 但看不出为什么四个奇点的动力体系性质与它们所构成的四边形的几何性质之间有如此巧妙的联系. 要了解这一点, 请看 § 11 的引理 11·3 和其后的注意.

下面回到具有星形结点的二次系统. 如前不妨设它的四个奇点是 $O(0,\ 0)$, $A_1(1,\ 0)$, $A_2(\alpha,\ \beta)$, $A_3(0,\ 1)$, 其中 O 为星形结点, $\alpha\neq 0, \beta\neq 0, \alpha+\beta\neq 1$. 由引理 10·2 知, 此时方程(10·18)中的

$$p_2=q_1=0,\quad p_1=q_2=-1,$$

于是该系统可写为

$$\frac{dx}{dt}=x\left(1-x+\frac{\alpha-1}{\beta}y\right),\quad \frac{dy}{dt}=y\left(1+\frac{\beta-1}{\alpha}x-y\right).$$

再记 $\frac{\alpha-1}{\beta}=b$, $\frac{\beta-1}{\alpha}=a$, 于是上式可写成

$$\frac{dx}{dt}=x(1-x+by),\quad \frac{dy}{dt}=y(1+ax-y),\qquad (10\cdot 20)$$

其中 $a\neq -1$, $b\neq -1$, $ab\neq 1$. (10·20)的四个奇点为: O(星形结点), $A_1(1,\ 0)$, $A_2\left(\frac{1+b}{1-ab},\ \frac{1+a}{1-ab}\right)$, $A_3\ (0,\ 1)$ 和三条积分直线:

$\overline{OA_1}$: $y=0$; $\overline{OA_2}$: $(1+b)y-(1+a)x=0$; $\overline{OA_3}$: $x=0$.

由此可见每一奇点都有积分直线通过, 从而知道(10·20)没有极限环[1], 并且知道 A_1, A_2, A_3 是鞍点或结点, 决定于它们的

1) 这一点也可由 § 1 习题 9 知之.

$$D_1=-(a+1),\ D_2=\frac{(1+a)(1+b)}{1-ab},\ D_3=-(b+1)$$

是<0还是>0.

其次,将(10·20)化为齐次坐标易证它有三个无穷远奇点:

$$B_1(1,\ 0,\ 0),\ B_2\left(1, \frac{1+a}{1+b}, 0\right),\ B_3(0,\ 1,\ 0).$$

与前述的 D_i 对应的量现在是

$$J_1=a+1,\ J_2=-\frac{(1+a)(1-ab)}{1+b},\ J_3=1+b.$$

由于 $D_i=-J_i$,故知若 A_i 是结点(鞍点),则 B_i 是鞍点(结点).

经过三奇点 O, A_1, A_3 的三条固定直线 $x=0, y=0$ 和 $x+y=1$ 把$(x,\ y)$平面划分成七个区域,由引理 10·3 知道,根据 A_2 在哪一个区域中,就可以确定 A_i (从而 B_i), $i=1,\ 2,\ 3$, 是结点还是鞍点. 又因其他积分曲线不能在 O, A_1, A_2, A_3 以外的地方穿过三直线 OA_1, OA_2, OA_3, 故全局拓扑相图可以完全确定, 且容易作出. 而点 A_2 在$(x,\ y)$平面上的位置则可由参数 a, b 的值决定. 在$(a,\ b)$ 参数平面上, 三条分歧曲线 $ab=1$, $a=-1, b=-1$ 将参数平面划分为七个区域(图 10·6), 每个区域中的点所对应的方程 (10·20) 的全局拓扑结构都是一样的. 但是容易看出当点 $(a,\ b)$ 通过直线 $a=-1$ 或 $b=-1$ 时, (10·20) 的全局拓扑结构图并未发生改变, 只不过是某一对有限远奇点以及相应的一对无限远奇点对调一下相对位置, 但同时也对调了鞍点与结点的名称,因此不影响全局拓扑结构. 这样,实际上只有三种不同的全局拓扑相图,如图 10·7(a), (b), (c), 它们分别对应于: 1) $ab>1$ $a<0$; 2) $ab<1$; 3) $ab>1$, $a>0$.

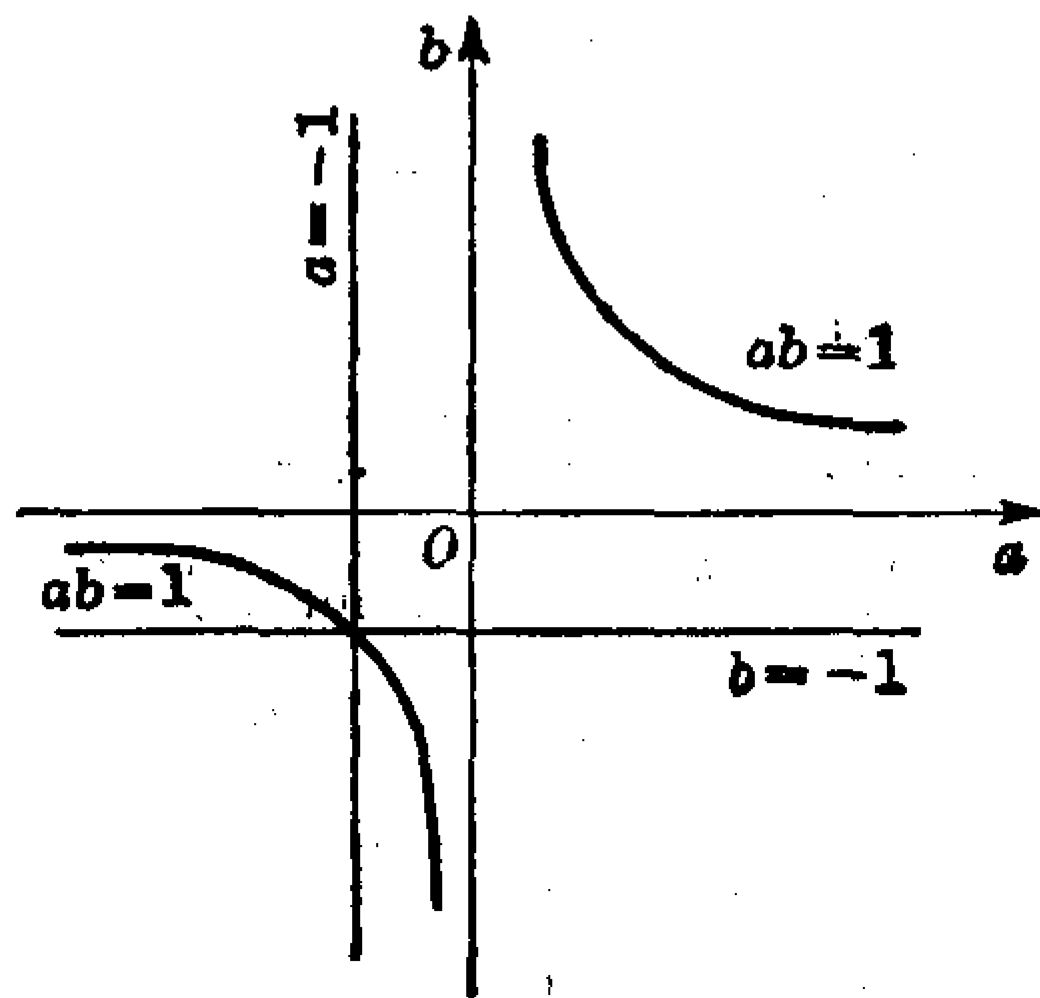


图 10·6

于是可得

定理 10·6　具有星形结点的二次系统若有四个奇点，则：

(i) 当四奇点构成凹四边形的顶点，且星形结点为外顶点时，其他三个奇点是结点，结点，鞍点(图 10·7(a))；

(ii) 当四奇点构成凹四边形的顶点，而星形结点是内顶点时，则其他三个奇点都是鞍点(图 10·7(c))；

(iii) 当四奇点构成凸四边形的顶点，则其他三个奇点是结点，鞍点，鞍点(图 10·7(b))。

若改用系统的系数来表示，则此定理可改写为

定理 10·6′　对具星形结点的二次系统(10·20)，其中 $(a+1)\cdot(b+1)(ab-1)\neq 0$，则分别对应于定理 10·6 的(i)，(ii)，(iii) 有：(i)′$ab>1,\ a<0$；(ii)′$ab<1$；(iii)′$ab>1,\ a>0$。

2．只有三个有限远奇点的情况．

不妨设除星形结点(原点)外，另两个有限远奇点为 $A_1(1,\ 0)$ 和 $A_3(0,\ 1)$，仿照导出(10·20)的办法可知，我们所讨论的系统仍然具有(10·20)的形式，不过其中的参数 a, b 对应于 1. 中所说的分歧值，即 $a=-1$，或 $b=-1$，或 $ab=1$(但 $a=b=-1$ 除外)，即分别相当于 1. 中的 $A_2=A_1$，或 $A_2=A_3$，或 $A_2=B_2$．易知此时系统仍无极限环，下面分别进行研究．

(i) 设 $a=-1(b\neq-1)$，即 $A_2=A_1$，从而 $B_2=B_1$．由此得到的两个高阶奇点都是半鞍结点．易知赤道是奇点 $B_1(1,\ 0,\ 0)$ 的两双曲域的中间分界线，其他奇点类型保持不变．当 $a=-1,\ b<-1$ 时，对应的全局相图如图 10·7(d)；当 $a=-1,\ b>-1$ 时，对应的全局相图如图 10·7(e)．

(ii) 设 $b=-1(a\neq-1)$．与(i)类似，当 $b=-1,\ a<-1$ 时，对应的全局相图如图 10·7(d)；当 $b=-1,\ a>-1$ 时，对应的全局相图如图 10·7(e)．

(iii) 设 $ab=1$, 但 $a=b=-1$ 不成立. 这相当于 $A_2=B_2$, B_2 成为半鞍结点, 但赤道把 B_2 的双曲域与抛物域分开. 其他奇点保持原来的类型. 当 $ab=1$, $a<0$, $a\neq-1$ 时, 对应的全局相图如图 10.7(f); 当 $ab=1$, $a>0$ 时, 对应的全局相图如图 10·7(g).

把上述结果写成

定理 10·7 具有星形结点的二次系统 (10·20) 如果只有三个有限远奇点, 则另二有限远奇点只可能是:

(i) 结点与半鞍结点, 这时 $a=-1$, $b<-1$; 或 $b=-1$, $a<-1$ (图 10·7(d));

(ii) 鞍点与半鞍结点, 这时 $a=-1, b>-1$; 或 $b=-1, a>-1$ (图 10·7(e));

(iii) 鞍点与结点, 这时 $ab=1$, $a<0$, $a\neq-1$ (图 10·7(f));

(iv) 鞍点与鞍点, 这时 $ab=1$, $a>0$ (图 10·7(g)).

3. 只有两个有限远奇点的情况.

不妨设除原点是星形结点外, 另一奇点为 $A_1(1, 0)$, 从而系统 (10·16) 可改写为

$$\frac{dx}{dt}=x-x^2+b_1xy+b_2y^2, \quad \frac{dy}{dt}=y(1+a_1x+a_2y). \tag{10·21}$$

以下分三种情况来讨论.

(i) 设 A_1 是三重奇点, 则不外乎是下列两种情况:

(a) 直线 L_1: $y=0$ 与曲线 L_2: $x-x^2+b_1xy+b_2y^2=0$ 在 A_1 相交, 且直线 L_3: $1+ax_1+a_2y=0$ 与 L_2 在点 A_1 相切. 这时可推得

$$a_1=-1, \quad a_2=b_1,$$

于是(10·21)可写成

$$\frac{dx}{dt}=x(1-x+b_1y)+b_2y^2, \quad \frac{dy}{dt}=y(1-x+b_1y). \tag{10·22}$$

显然其中 $b_2\neq0$. 为考察 A_1 的特性, 作变换

$$X=1-x+b_1y, \quad Y=y,$$

然后仍记 X, Y 为 x, y, 于是(10·22)化为

$$\frac{dx}{dt}=-x+x^2-b_2y^2,\qquad \frac{dy}{dt}=xy. \tag{10·23}$$

由高阶奇点的理论可知[1), 当 $b_2>0$ 时 A_1 是结点; 当 $b_2<0$ 时 A_1 是鞍点, 且系统无极限环.

再变换成齐次坐标, 易知无穷远有唯一的奇点 $B_1(1, 0, 0)$, 且当 $b_2>0$ 时 B_1 是鞍点; 当 $b_2<0$ 时 B_1 是结点. 又因 $y=0$ 是积分直线, 经过 O 与 A_1, 故容易作出系统(10·23)的全局相图. 当 $b_2>0$ 时如图 10·7(h); 当 $b_2<0$ 时如图 10·7(i).

(b) L_3 与 L_2 在 A_1 点相交, 而 L_1 与 L_2 在 A_1 相切, 但这不可能.

(ii) 设 A_1 是二重奇点, 仿(i)那样讨论可知在(10·21)中应有 $a_1=-1$, $b_2=a_2(a_2-b_1)$, $a_2-b_1\neq 0$. 这样(10·21)可化为

$$\frac{dx}{dt}=x(1-x+ay),\qquad \frac{dy}{dt}=y(1-x), \tag{10·24}$$

其中 $a=b_1-a_2\neq 0$. 易知 $A_1(1, 0)$ 和无穷远奇点 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ 都是半鞍结点, 且不存在极限环. 全局相图如图 10·7(j).

(iii) 设 A_1 是简单奇点, 则(10·21)当 $a_2\neq 0$ 时可化为

$$\frac{dx}{dt}=x-x^2+bxy+cy^2,\qquad \frac{dy}{dt}=y(1+ax-y), \tag{10·25}$$

其中 $a_1=a$, $b=-b_1/a_2$, $c=b_2/a_2^2$. 由 A_1 是简单奇点, 可推得这些系数或者满足 $\alpha)$ $(b+1)^2+4(a+1)<0$; 或者满足 $\beta)$ $a^2c+ab-1=2ac+b+1=0$, $c\neq 0$.

若 $a_2=0$, 则(10·21)化为

$$\frac{dx}{dt}=x-x^2+bxy+cy^2,\qquad \frac{dy}{dt}=y(1+ax), \tag{10·26}$$

其中 $a=a_1$, $b=b_1$, $c=b_2$. 由 A_1 是简单奇点可推得这些系数或者满足 $\alpha)$ $b^2+4(a+1)c<0$; 或者满足 $\beta)$ $b=c=0$, $a\neq -1$; 或者满足

1) 例如见 [170], 379 页, 定理 65.

$\gamma)\ a=0,\ b^2+4c\geqslant 0$.

研究(10·25)的情况α). 易见此时必有$a<-1$, 点$A_1(1, 0)$是结点, 唯一的无穷远奇点(1, 0, 0)是鞍点, 系统无极限环, 全局相图见10·7(h).

对于(10·25)的情况β), 此时必有$a\neq 0$, 系统可改写成

$$\frac{dx}{dt}=x-x^2+\frac{a+2}{a}xy-\frac{a+1}{a^2}y^2,\ \frac{dy}{dt}=y(1+ax-y). \quad (10\cdot 27)$$

易知此系统有三条积分直线$y=0$, $y=ax$和$y=a(x-1)$. 因为所有的奇点都有积分直线经过, 故无极限环. 当$a<-1(>-1)$时, 奇点A_1为结点(鞍点), 无穷远奇点(1, 0, 0)为鞍点(结点), 另一无穷远奇点(1, a, 0)常为半鞍结点, 全局相图如图10·7 (k) (图10·7(l)).

对于方程(10·26)可类似地进行研究, 结果如下:

在情况α), 当$a<-1(>-1)$时全局相图如图10·7 (h) (10·7 (i)).

在情况β), 有三条积分直线, 其中两条经过原点, 一条不经过原点, 当$a<-1(>-1)$时, 得到图10·7(k) (10·7(l)).

在情况γ), 也有三条积分直线, 奇点$A_1(1, 0)$是鞍点, 系统无极限环. 当$b^2+4c=0$时三条积分直线中的两条通过原点. 两个无穷远奇点分别是(星形)结点和半鞍结点. 全局相图见10·7(l). 当$b^2+4c>0$时三条积分直线都过原点, 三个无穷远奇点中一个是结点, 两个是半鞍结点, 全局相图如图10·7(m). 综上所述, 可得

定理10·8 若具有星形结点的二次系统只有两个有限远奇点. 那末如果只有一条积分直线通过原点, 则另一奇点或为结点或为鞍点, 系统的全局结构如图10·7(h)和10·7(i). 如果只有两条积分直线通过原点, 则另一奇点为半鞍结点, 结点或鞍点, 系统的全局结构如图10·7(j), (k), (l). 如果有三条积分直线通过原点, 则另一奇点必为鞍点, 全局结构如图10·7(m). 所有情况都无极

限环.

4. 只有一个有限远奇点的情况.

此时系统显然无极限环. 经过适当的坐标旋转可使 (10·16) 中的 $b_2=0$、由于奇点的唯一性知必 $a_2=0$. 于是有

$$\frac{dx}{dt}=x(1+b_0x+b_1y), \quad \frac{dy}{dt}=y+a_0x^2+a_1xy. \quad (10\cdot28)$$

根据同一理由可知 (10·28) 中的系数还应满足下述条件之一: α) $(a_1-b_0)^2+4a_0b_1<0$; β) $b_1=0$, $a_1=b_0\neq0$, $a_0\neq0$; γ) $b_1=b_0=0$, $a_0\neq0$; δ) $b_1=b_0=a_0=0$.

当 α) 成立时, 无穷远有唯一的奇点 (0, 1, 0), 为半鞍结点. 赤道把抛物域和双曲域分开. 只有一条积分直线 $x=0$, 全局相图如图 10·7(n).

当 β) 成立时, (10·28)除 y 轴外还有积分直线 $x=-\frac{1}{b}$. 易知无穷远奇点(0, 1, 0)是半鞍结点, 两个双曲域都在赤道的同一边, 但这一边还有一部分属于抛物域, 全局相图如图 10·7(o).

当 γ) 成立时, 若 $a_1\neq0$, 则有两个无穷远奇点, 其一为 $\left(1, -\frac{a_0}{a_1}, 0\right)$, 为半鞍结点, 赤道把抛物域和双曲域分开; 另一为 (0, 1, 0), 也是半鞍结点. 有两条积分直线, 且都过原点. 全局相图如图 10·7(p). 若 $a_1=0$, 则有唯一的无穷远奇点 (0, 1, 0), 为半鞍结点, 赤道把抛物域和双曲域分开. 只有一条积分直线, 过原点, 全局相图如图 10·7(n).

当 δ) 成立时, (10·28)成为

$$\frac{dx}{dt}=x, \quad \frac{dy}{dt}=y(1+a_1x).$$

当 $a_1\neq0$ 时, 有两个无穷远奇点 (1, 0, 0)和(0,1,0), 都是半鞍结点, 全局相图见图 10·7(p). 当 $a_1=0$ 时则有相图 10·7(q), (10·28) 退化成为线性系统.

综上所述，我们得到

定理 10·9 具有星形结点的二次系统如果只有唯一的有限远奇点，则有且只有四种情况：(i) 只有一条积分直线，且过原点；(ii) 只有两条积分直线，其中之一过原点；(iii) 只有两条积分直线，都过原点；(iv) 所有的积分曲线都是过原点的直线. 系统无极限环. 相图见图 10·7(n)—(q).

总结以上的定理 10·6—10·9，我们有

定理 10·10 右方无公因式的具星形结点的二次系统的有限远奇点只有鞍点，结点和半鞍结点. 系统没有极限环. 全局相图有且只有 17 种不同的拓扑结构，如图 10·7(a)—(q).

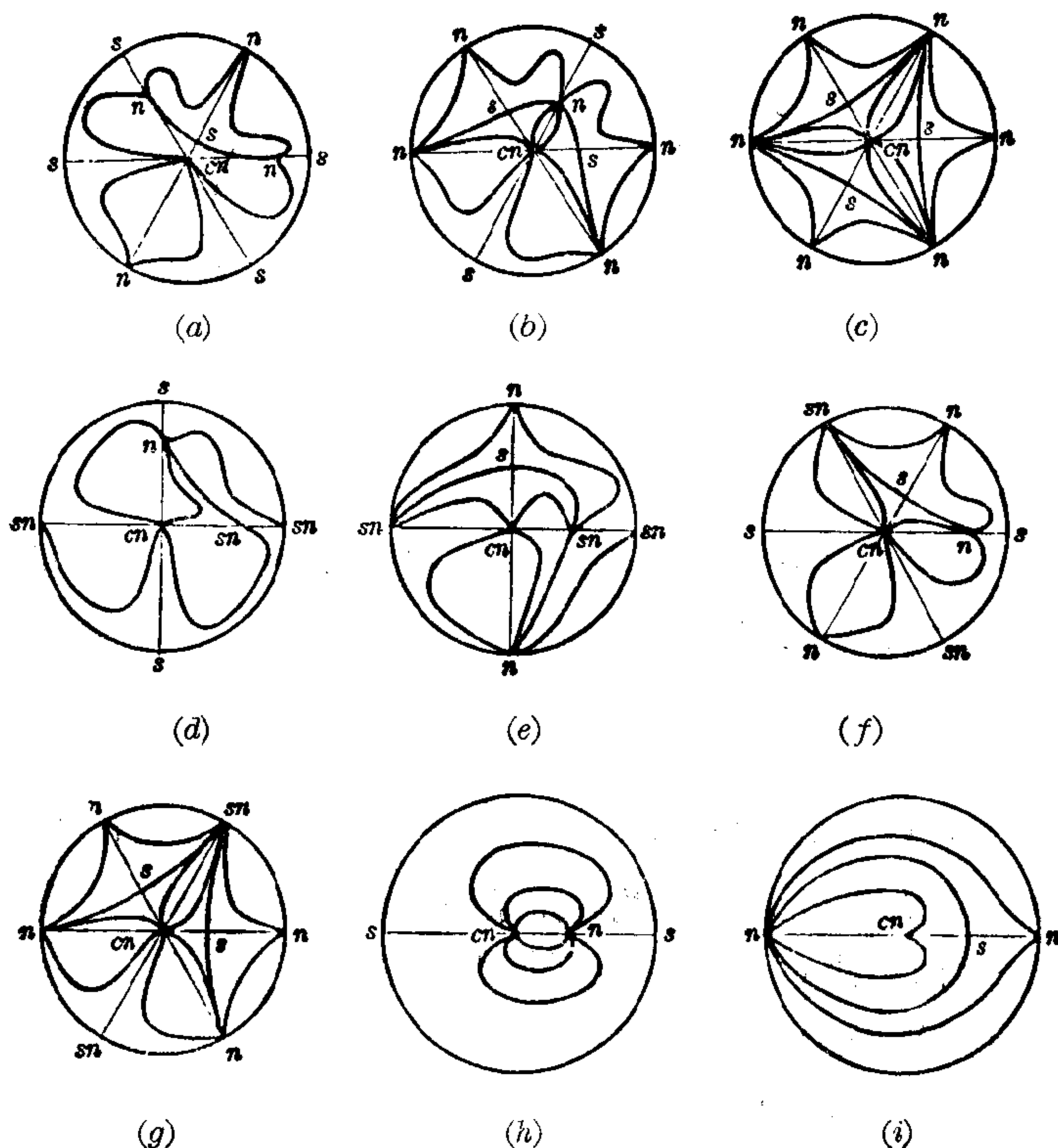


图 10·7

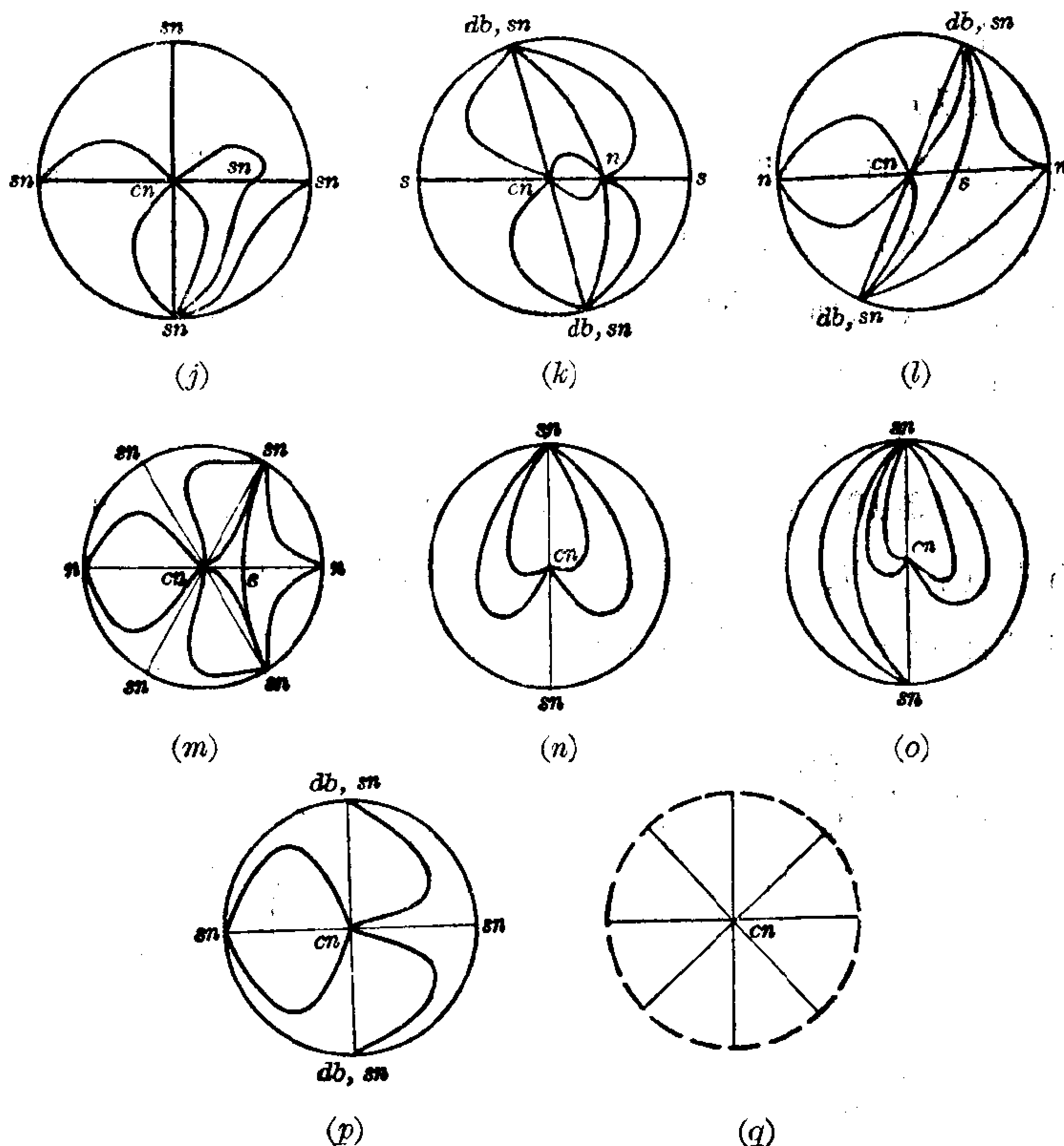


图 10·7 续

注意：在图10·7的诸图中，s 表鞍点，n 表结点，cn 表星形结点，sn 表半鞍结点，db 表二重奇点.

III. 没有极限环的结构稳定二次系统的拓扑分类

今以 X 表示次数不超过 n 的多项式微分系统所成的 Banach 空间，以 Σ_n 表示 X 中结构稳定系统所成的集合，X_s 表示 X 中满足§8的条件(VI)的一切系统所成的集合．已知：

(1) X_s 在 X 中是开且稠密的；

(2) 系统 $\alpha\in X_s$ 的充分必要条件是 $\alpha\in\Sigma_n$.

本节的最后这一部分要研究没有极限环的 Σ_2 的拓扑分类问

题. 这个问题最早由[171]提出并作了讨论，最后他得到25种不同的拓扑结构. 最近[172]指出,[171]的分类是不完全的,他补充了八个例子，因此加在一起至少应有33种不同的拓扑结构；他还研究了过鞍点的分界线的去向，从而肯定在某些情况不可能再有别的不同的拓扑结构了. 与[172]独立，[173]从逻辑可能性的角度得出结论说，没有极限环的结构稳定系统 Σ_2 最多只能有65种不同的拓扑结构. 然而他没有证明这65种是否都能在二次系统中实现. 事实上,以后读者可以看到,[173]的65种中有几种是肯定不能在二次系统中得到实现的.因此,结构稳定的无环二次系统究竟能有多少种不同的拓扑结构，这个问题至今仍未解决. 现在我们就来简略地介绍以上这些工作.

为了要研究这种系统的拓扑分类,首先要研究它在 Poincaré 闭半球面 $\overline{\Omega}$ 内部(相当于欧氏平面)和赤道 E 上的奇点的所有可能组合. 以后我们将采用以下的符号:

s: $\overline{\Omega}$ 内部的鞍点;

p: $\overline{\Omega}$ 内部的非鞍点 (指标+1的初等奇点);

S: E 上的鞍点;

F: E 上的源点;

P: E 上的渊点.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$: Σ_2 的元素.

定理 10·11 若 $\alpha\in\Sigma_2$, 则 α 在 $\overline{\Omega}$ 上的奇点组合必为下述12种情况之一:

a 类: (1) F; (2) psF; (3) $p_1p_2s_1s_2F$;

b 类: (1) p_1p_2S; (2) $p_1p_2p_3sS$;

c 类: (1) $s_1s_2F_1PF_2$; (2) $ps_1s_2s_3F_1PF_2$;

d 类: (1) SPF; (2) $psSPF$; (3) $p_1p_2s_1s_2SPF$;

e 类: (1) $p_1p_2S_1S_2F$; (2) $p_1p_2p_3sS_1S_2F$.

【证】 分为四步: (i) 由于 $X_s=\Sigma_2$ 当 $n=2$, 故知 α 在 $\overline{\Omega}$ 内

部和 E 上只有初等奇点. (ii) 在 E 上的奇点的坐标是三次方程的根, 从而知在 E 上只有一个或三个奇点. (iii) 由于 X_s 在 X 中开且稠密, 故零等倾线和无穷等倾线可以认为是非退化的椭圆或双曲线, 于是知道它们之间不可能有一个或三个交点, 即有限远奇点的个数为 0, 2 或 4. (iv) 由于在 $\overline{\Omega}$ 上奇点指标之和等于 1, 再用引理 10·3 即可证明本定理的结论, 详情从略, 作为习题.

下面为叙述方便起见, 采用记号 $s(p_1, p_2, p_3, P)$ 表示 $\overline{\Omega}$ 内部的鞍点 S 的四条分界线(L_1^+, L_2^+, L_1^-, L_2^-)分别与奇点 p_1, p_2, p_3, P 相连接, 其中分界线由前两点 p_1, p_2 出发而进入 s, 又另二分界线由 s 出发而进入 p_3 与 P (图 10·8), 用记号 $S(F,p)$ 表示 E 上的鞍点用不沿赤道的分界线 l^+, l^- 分别与奇点 F, p 相连接(图 10·9), 余仿此.

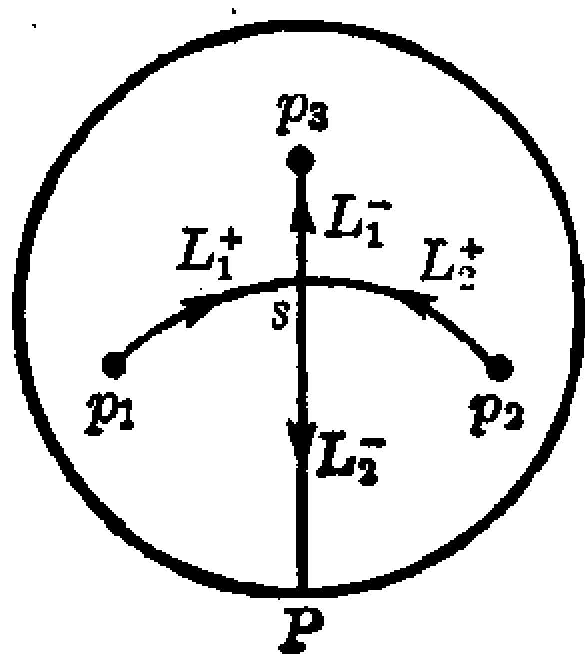


图 10·8

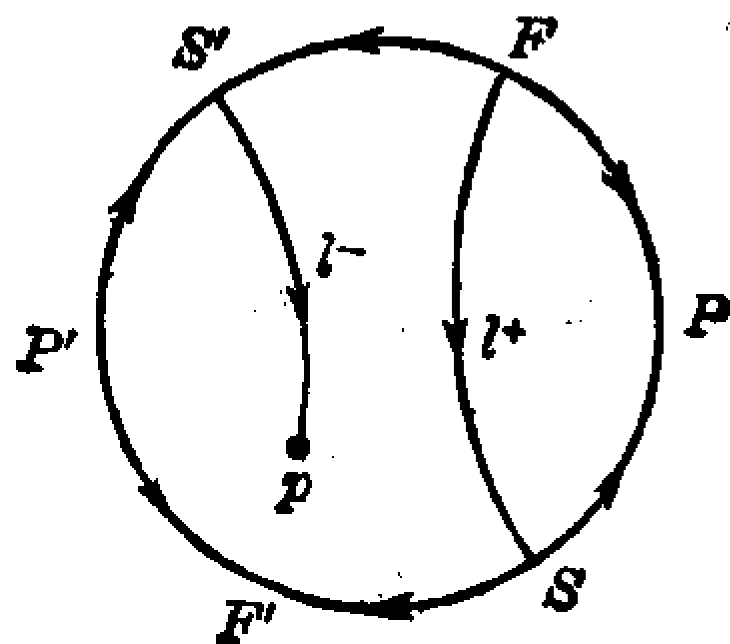


图 10·9

由于所讨论的系统没有极限环, 且鞍点之间又不能用分界线相连接, 因此, 由鞍点的分界线与哪些指标为 +1 的奇点相连接, 就可以确定对应的相图的拓扑结构了. 现在按定理 10·11 的 5 类 12 型分别来讨论.

1. a 类(1) F 型.

易知这情况只有一种拓扑结构, 如图 10·10. 实现的例子如:

$$\alpha_1:\ \frac{dx}{dt}=-2xy,\ \frac{dy}{dt}=x^2+y^2+\varepsilon\quad(\varepsilon>0).$$

2. a 类 (2) psF 型.

易知这种情况也只有一种拓扑结构, 其特征为 $s(F, F, p, F')$

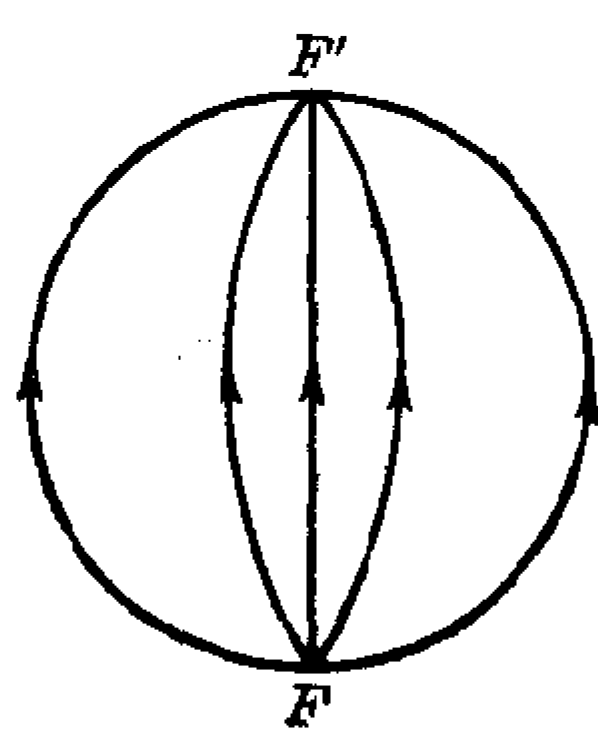


图 10·10

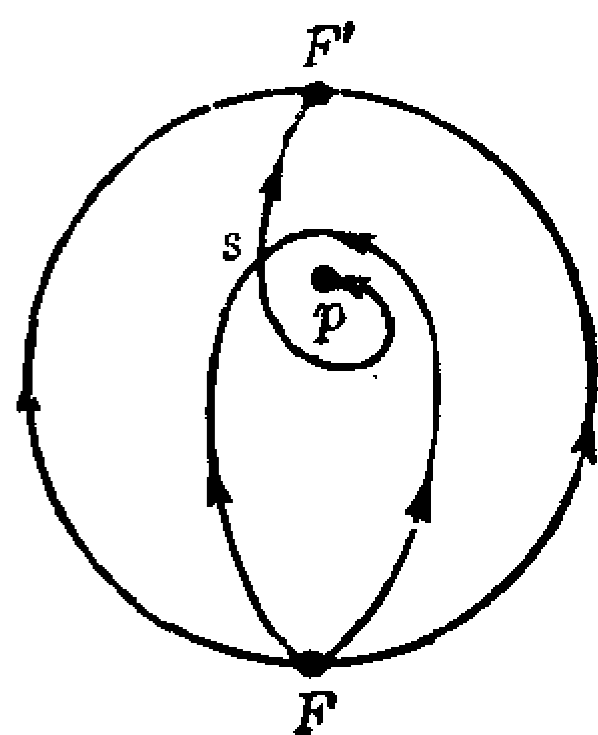


图 10·11

或 $s(F', F', p, F)$，前者如图 10·11. 实现的例子如:

$$\alpha_2:\ \frac{dx}{dt}=P-\theta Q,\ \frac{dy}{dt}=Q+\theta P.$$

它是由

$$\alpha:\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=P\equiv-y(\nu+2x),\\ \dfrac{dy}{dt}=Q\equiv\left(x+\dfrac{\mu}{2}\right)^2+y^2-\dfrac{\mu^2}{4}\end{cases}\quad(\mu<0<\nu)$$

旋转 θ 角($0<\theta\ll1$)而得到的，今后记为 $\alpha_2=\alpha^\theta$.

事实上，系统 α 的奇点为 psF 型，但 p 的特征根有零实部. 由于存在首次积分 $\varphi(x, y)=x\left(\frac{x^3}{3}+y^2\right)+\frac{\mu}{2}x^2+\frac{\nu}{2}y^2$，故 p 为中心. 经旋转 θ 角以后中心变为焦点，α 的一族闭轨线成为 α_2 的无切弧，故知 α_2 无极限环. α_2 仍为 psF 型，相图见图 10·11.

3. a 类 (3) $p_1p_2s_1s_2F$ 型.

关于这种类型有下述定理:

定理 10·12 $p_1p_2s_1s_2F$ 型的无极限环结构稳定二次系统有且只有五种不同的拓扑结构，其特征分别为

α_3: $s_1(F, F, p_1, p_2)$, $s_2(F, F, p_2, F')$;

α_4: $s_1(F, F, p_1, F')$, $s_2(F, p_2, F', F')$;

α_5: $s_1(F, F, p_1, F')$, $s_2(F, F, p_2, F')$;

α_6: $s_1(F, p_2, p_1, F')$, $s_2(F, p_2, p_1, F')$;

α_7: $s_1(F, p_2, p_1, p_1)$, $s_2(F, F, p_1, F')$.

【证】 先证至多只有上述五种不同的拓扑结构.

(1) 设 p_1, p_2 都是渊点(源点),则鞍点 s_1 的分界线的来去只有下述三种可能(若为源点,则把以下的后二元素和前二元素对调):

$$s_1(F,\ F,\ p_1,\ p_2),\ s_1(F,\ F,\ p_1,\ F'),\ s_1(F,\ F,\ p_2,\ F').$$

对 s_2 也是一样. s_1 与 s_2 组合后, 显然只有 α_3 和 α_5 两种不同的拓扑结构是可能的.

(2) 设 p_1 与 p_2 中一为渊点,一为源点. 则 s_1 的分界线的来去只有下述五种:

$$s_1(F,\ F,\ p_1,\ F'),\ s_1(F,\ p_2,\ p_1,\ p_1),\ s_1(F,\ p_2,\ p_1,\ F'),$$
$$s_1(F,\ p_2,\ F', F'),\ s_1(p_2,\ p_2,\ p_1,\ F').$$

对于 s_2 亦同样有五种. s_1 与 s_2 组合以后,显见只有 α_4, α_6, α_7 等三种不同的拓扑结构是可能的. 详细论证见[172].

另一方面, 上述五种不同拓扑结构都是可以实现的, 例子见[171]与[172].

4. b 类 (1) p_1p_2S 型.

易见这种情况只有一种拓扑结构, 其特征为 $S(p_1,\ p_2)$, 如图10·12.实现的例子如:

$$\beta_1=\beta_\varepsilon^\theta \quad (0<\theta\ll 1),\ 其中\ \beta_\varepsilon:\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-2xy,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=y^2-x^2+\varepsilon.\end{cases} \quad (\varepsilon>0)$$

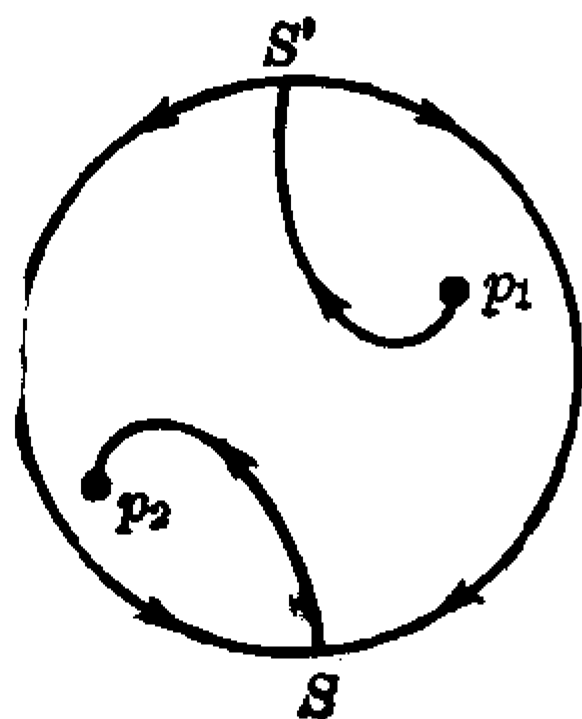


图 10·12

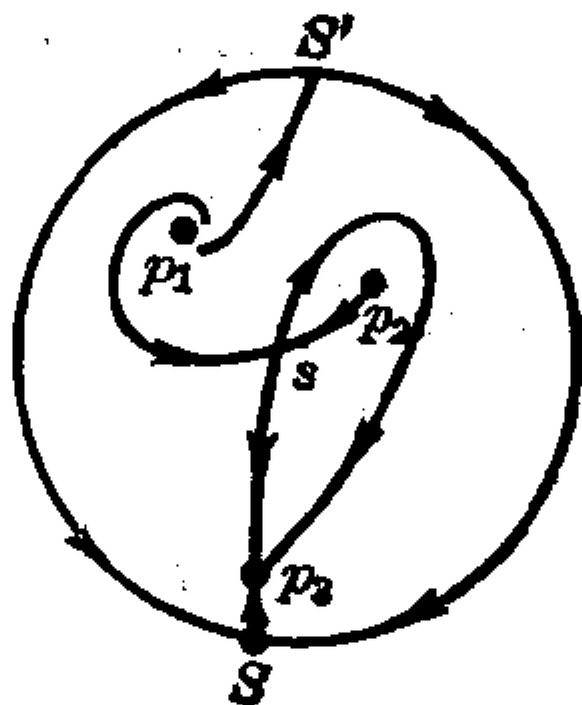


图 10·13

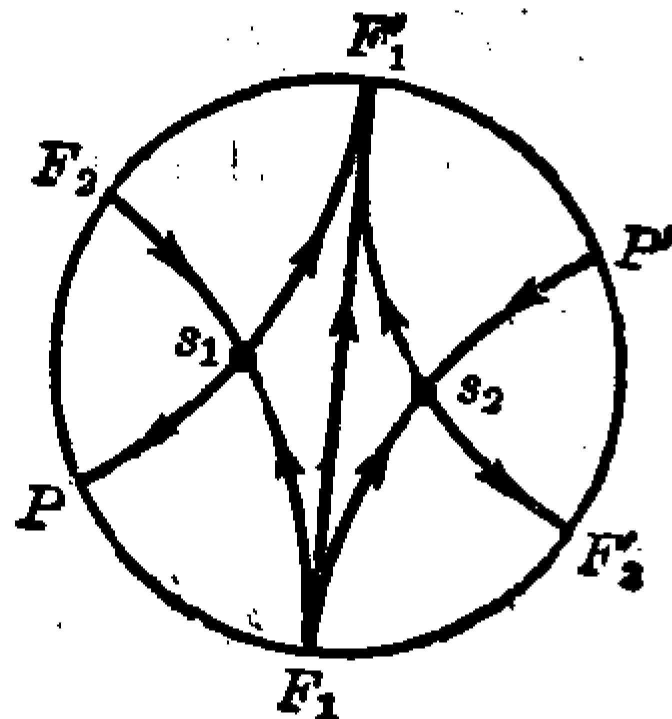


图 10·14

事实上，β_ε 的奇点为 p_1p_2S 型，其中 p_1, p_2 为中心，$x=0$ 是积分直线. 旋转 θ 角以后，中心变为焦点，且无极限环亦无鞍点间的联线，相图如图 10·12.

5. b 类(2) $p_1p_2p_3sS$.

易见这种情况只有一种拓扑结构，其特征为

$$s(p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_3),\quad S(p_1,\ p_3),$$

如图 10·13. 实现的例子如：

$$\beta_2=\beta_\lambda^\theta\quad(0<\theta\ll1),\text{其中 }\beta_\lambda:\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-\lambda x+2xy,\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=\lambda y+y^2-x^2.\end{cases}\quad(\lambda>0)$$

事实上，系统 β_λ 的奇点为 $p_1p_2p_3sS$ 型，其发散量的值为 $4y$，但 $x=0$ 是积分直线，故 β_λ 无极限环. 旋转 θ 角($0<\theta\ll1$)后，连接 S 与 S' 的分界线(它上面原来有两奇点 s 与 p_3)破裂. 仍无极限环，如图 10·13.

6. c 类 (1) $s_1s_2F_1PF_2$ 型.

易知这种情况只有一种拓扑结构，其特征为

$$s_1(F_1,\ F_2,\ P,\ F_1'),\quad s_2(F_1,\ P',\ F_2',\ F_1'),$$

相图如图 10·14. 实现的例子：

$$\gamma_1:\ \frac{dx}{dt}=x^2+2xy,\quad \frac{dy}{dt}=-2xy-y^2-\varepsilon.\ (\varepsilon>0)$$

具体讨论从略，作为习题.

7. c 类(2) $ps_1s_2s_3F_1PF_2$ 型.

关于这种类型有下述

定理 10·13 具 $ps_1s_2s_3F_1PF_2$ 型的无环结构稳定二次系统有且只有四种不同的拓扑结构，其特征为

γ_2: $s_1(F_1, p, P, F_2')$, $s_2(P', p, F_1', F_2')$, $s_3(F_2, p, P, F_1')$;

γ_3: $s_1(F_1, p, P, P)$, $s_2(F_1, P', P, F_2')$, $s_3(F_2, P', P, F_1')$;

γ_4: $s_1(F_1, F_2, P, F_2')$, $s_2(P', p, F_1', F_2')$, $s_3(F_2, p, F_1', F_2')$;

γ_5: $s_1(F_1, F_2, P, F_2')$, $s_2(F_2, P', F_1', F_2')$, $s_3(F_2, p, P, P)$.

我们简略指出证明的步骤. 首先注意, 由于所讨论的是二次系统, 任何一直线与系统的轨线不能有多于两个的切点(包括奇点在内)[1], 除非此直线本身是轨线. 因此下述两种情况在二次系统中不能实现:

(1) $s_1(F_1, p, F_2'', F_2')$, $s_2(F_1, P', P, F_2')$, $s_3(F_2, P', P, F_1')$, 如图10·15.

(2) $s_1(P', p, P, P)$, $s_2(F_1, P', P, F_2')$, $s_3(F_2, P', P, F_1')$, 如图10·16.

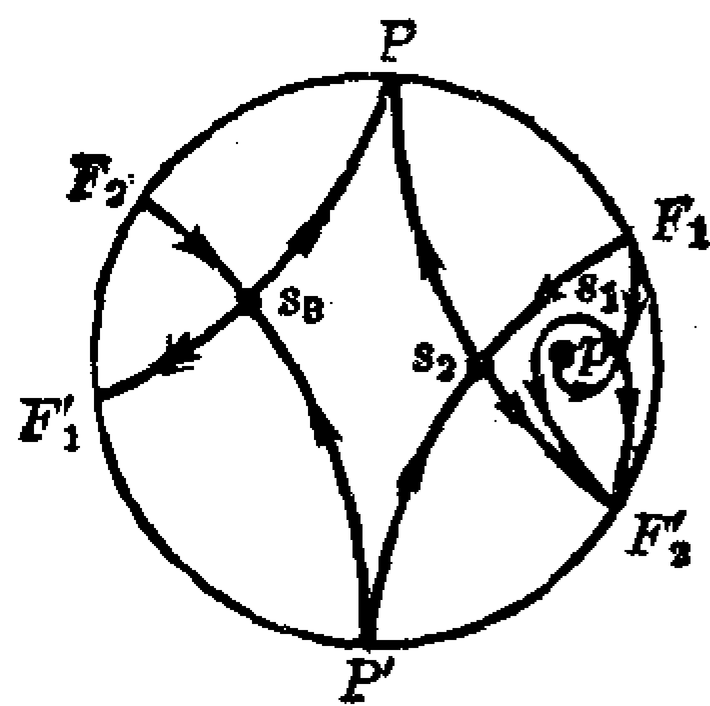


图 10·15

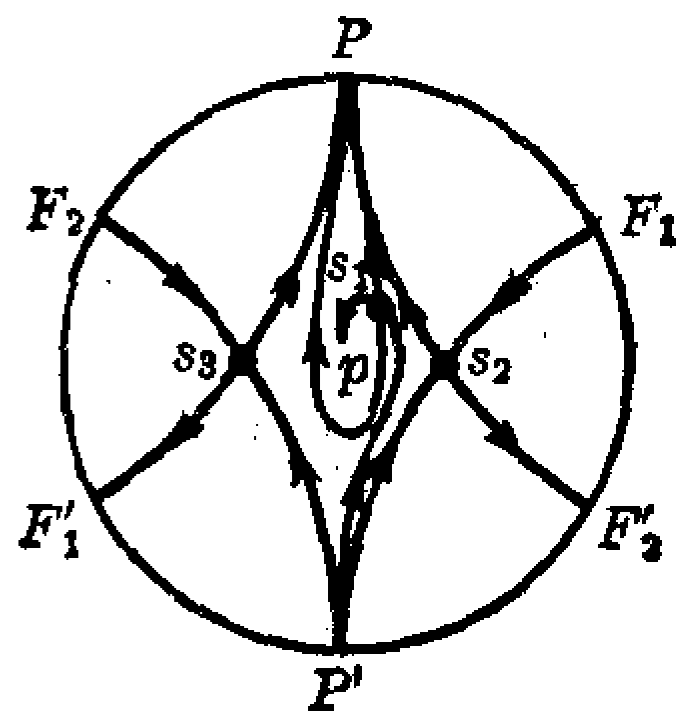


图 10·16

其次, 与定理10·12类似的讨论可知, 此时只有 γ_2, γ_3, γ_4, γ_5 等四种不同的拓扑结构是可能的. 可以证明, 它们也都是可以用二次系统来实现的, 例子见[171], 此处从略.

8. d类(1) SPF 型.

易知此时只有一种拓扑结构 $S(F, F')$, 且必可实现, 例子见[171].

9. d类 (2) $psSPF$ 型.

这种情况只有三种不同的拓扑结构, 其特征分别为

δ_2: $s(F, P', p, P)$, $S(P', p)$;

δ_3: $s(F, F, p, P)$, $S(P', P)$;

δ_4: $s(F, F, p, P)$, $S(F, F')$.

---

1) 证明见 §11 引理11·1.

它们也都是可以实现的，例子见[171].

10. d 类(3) $p_1p_2s_1s_2SPF$ 型.

关于它，至多只可能有 30 种不同的拓扑结构[1)]，其中已有 8 种可以实现(见[171]与[172])，余下 22 种尚待进一步实现或排除. 由于种类太多，不在此一一列出.

11. e 类 (1) $p_1p_2S_1S_2F$ 型.

易知这种情况只有三种不同的拓扑结构，其特征分别为

ε_1: $S_1(p_1, p_2)$, $S_2(F, F')$;

ε_2: $S_1(p_1, F')$, $S_2(p_2, F')$;

ε_3: $S_1(p_1, p_2)$, $S_2(p_1, p_2)$,

它们都有实现的例子，见[171].

12. e 类 (2) $p_1p_2p_3sS_1S_2F$ 型.

关于它至多只可能有九种不同的拓扑结构[2)]，已有四种可以实现，余下五种尚待今后进一步实现或排除.

总结以上的分析，可得

定理 10·14 没有极限环的结构稳定二次系统至多只可能有 60 种不同的拓扑结构，其中 33 种已证实可以实现[3)].

习 题

1. 已知 $\frac{dx}{dt}=x(A_1x+B_1y+C_1)$, $\frac{dy}{dt}=y(Ax+By+C)$无极限环. 试就该系统具有四个有限远奇点的情况用系数间的不等式讨论它的全局拓扑分类[175].

2. 设三次系统有积分曲线 $xy=0$, 和 $x^2+y^2=1$, 试讨论其全局拓扑相图.

---

1) 见[173]，但该文中表 1 的 No.7 与 No.8 以及 C_{10} 与 C_{13} 的拓扑结构相同，因此至多只可能有 30 种不同的拓扑结构.

2) 见[173]，但可证该文表 2 的 No.8, 9, 10 三种情况在二次系统中不能实现(见习题 9)，故此类型至多只可能有九种.

3) 最近朱德明同志发现，可能的不同拓扑结构比 60 种还要少，可以实现的拓扑结构至少为 36 种.

3．已知具三阶细焦点的二次系统

$$\frac{dx}{dt}=-y+lx^2+xy,\quad \frac{dy}{dt}=x+\frac{1}{5}x^2+3lxy$$

无极限环，试讨论其全局拓扑相图[174]．

4．用系统(10·28)的系数之间的不等式来表达该系统的不同拓扑结构．

5．详细证明定理10·11．

6．详细证明定理10·13．

7．设二次系统在赤道 E 上的奇点为 SPF 型，且 $S(F, F')$，若该系统在区域 $SF'P'S$（图中旁边的区域）和 $S'FPS'$ 中无奇点，则该系统在 $\overline{\Omega}$ 内部也无奇点，试证之．

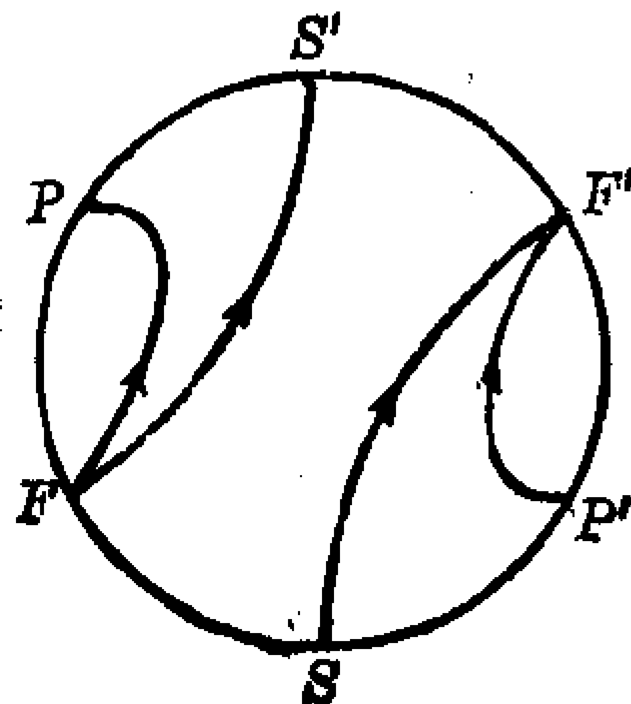


图　10·17

8．对 e 类(2) $p_1p_2p_3sS_1S_2F$ 型奇点，证明下述三种拓扑结构不能实现：

(1) $s(p_1, F, F', F''), S_1(p_3, p_2), S_2(F, F'')$;

(2) $s(p_1, F, F', F''), S_1(p_3, F''), S_2(p_2, F')$;

(3) $s(F, F, p_1, F'), S_1(p_3, F''), S_2(p_2, F')$．

9．研究

$$\frac{dx}{dt}=y-lx^2+y^2,\quad \frac{dy}{dt}=-x(1+ax+by)$$

的全局结构，其中 $a<0$, $l>0$, $D\equiv-4(b-l)^3-27a^2>0$, $-a<2\sqrt{l}$, $a+b\sqrt{l}>0$, $1<b<1+\frac{a^2}{4l}$．例如取 $a=-2$, $b=1.1$, $l=5$．

10．设 δ_ε: $\frac{dx}{dt}=x(-6x+4y+2)$, $\frac{dy}{dt}=y(7x+y-2)+\varepsilon x$, $0<\varepsilon\ll1$, 试研究 δ_0^0, $\delta_\varepsilon^{-\theta}(0<\theta\ll1)$的全局结构．

11．研究方程(10·1)右端有线性公因式时的全局相图的一切可能情况并作图．

§11. 二次微分系统的极限环的一般性质与相对位置

关于二次微分系统

$$\frac{dx}{dt}=P_2(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=Q_2(x, y), \tag{11·1}$$

除了前面两节所讨论的出现中心点的情况和不存在闭轨线的情况以外，更重要的是可能出现极限环的情况．这不论从理论还是从实用的观点来看都是毫无疑问的．为此，从本节开始，我们正式转入极限环的研究．首先研究(11·1)的极限环的一般性质与相对位置．这里所说的一般性质有的对周期环也成立，有的对 n 次微分系统也成立；但总的说来，其中多数只对二次微分系统的极限环成立．关于这一节的研究成果最早见于[11]，[12]，[14]和[17]，后来[19]和[20]得到新的突破，最近[176]和[177]又做了一些总结推广工作．我们这里在介绍成果时，证明方法上采用最简便而易于了解的．

引理 11·1 任一直线与(11·1)的轨线最多只能有两个切点(其中可能包含(11·1)的奇点)，除非该直线本身也是(11·1)的轨线．

【证】 设所给的直线为 $ax+by+c=0$，则切点的坐标应满足

$$ax+by+c=0, \quad \frac{-a}{b}=\frac{Q_2(x, y)}{P_2(x, y)}.$$

此方程一般只有两组解 (x_i, y_i) $(i=1, 2)$，除非前一方程是后一方程的一部分，这时 $ax+by+c=0$ 是轨线．特别，若

$$Q_2(x_i, y_i)=P_2(x_i, y_i)=0, \quad ax_i+by_i+c=0,$$

则 (x_i, y_i) 是直线 $ax+by+c=0$ 上的奇点．

注：此引理可推广到 n 次微分系统而得切点最多个数为 n；又若改直线为 m 次代数曲线，则切点最多个数为 $m(m-1+n)$.

引理 11·2　设 O, O' 是沿着 $P_2(x, y)=0$ 的一支(在它的两边 $P_2(x, y)$ 异号)或 $Q_2(x, y)=0$ 的一支上互相邻接的两个初等奇点，则其一的指标为 $+1$，另一的指标为 -1，只要在 O 与 O' 之间没有 $P_2(x, y)=0$(或 $Q_2(x, y)=0$)的另一支和这一支的交点；反之，如果在 O 与 O' 之间还有 $P_2(x, y)=0$ (或 $Q_2(x, y)=0$)的另一支和这一支的交点，则 O 与 O' 的指标同为 $+1$ 或同为 -1.

【证】　设 O 为 (x_0, y_0)，则方程(11·1)在 O 的一次近似方程的特征方程是

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial P_2}{\partial x}-\lambda & \dfrac{\partial P_2}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Q_2}{\partial x} & \dfrac{\partial Q_2}{\partial y}-\lambda \end{vmatrix}_{(x_0, y_0)}=0.$$

由于假设 O 是初等奇点，故

$$\left(\frac{\partial P_2}{\partial x}\frac{\partial Q_2}{\partial y}-\frac{\partial P_2}{\partial y}\frac{\partial Q_2}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)}\neq 0.$$

这表示 $P_2(x, y)=0$ 与 $Q_2(x, y)=0$ 在 O 点有不同的斜率，故它们在此点相交而不相切. 同样，在 O' 也是如此.

现在研究沿着 $P_2(x, y)=0$ 的一支上两邻接的初等奇点 O 与 O'. 假设在 O 与 O' 之间没有 $P_2(x, y)=0$ 的另一支和这一支的交点存在(图 11·1). 作一条包含 O 与 O' 的光滑的单闭曲线 C，使与 $P_2(x, y)=0$ 及 $Q_2(x, y)=0$ 的其他不过 O 与 O' 的分支不相遇，并且内部也不包含 O, O' 以外的奇点. 假设在 $P_2=0$ 的这一支的上方(或左方，如果这一支是一铅直轨线)有 $P_2>0$，下方(或右方)有 $P_2<0$. 又在 $Q_2=0$ 的这两支(它们可能在 C 的外部连在一起)之间有 $Q_2>0$，而在这两支之外有 $Q_2<0$. 于是可以画出在 C 上诸点 A_i, B_i, D_i, E_i, F_i, $G_i(i=1, 2)$ 由方程(11·1)所确定的向量场的方向. 由此立刻看出，当动点沿着 $\widehat{A_1B_1D_1}$ 从 A_1 跑到 D_1

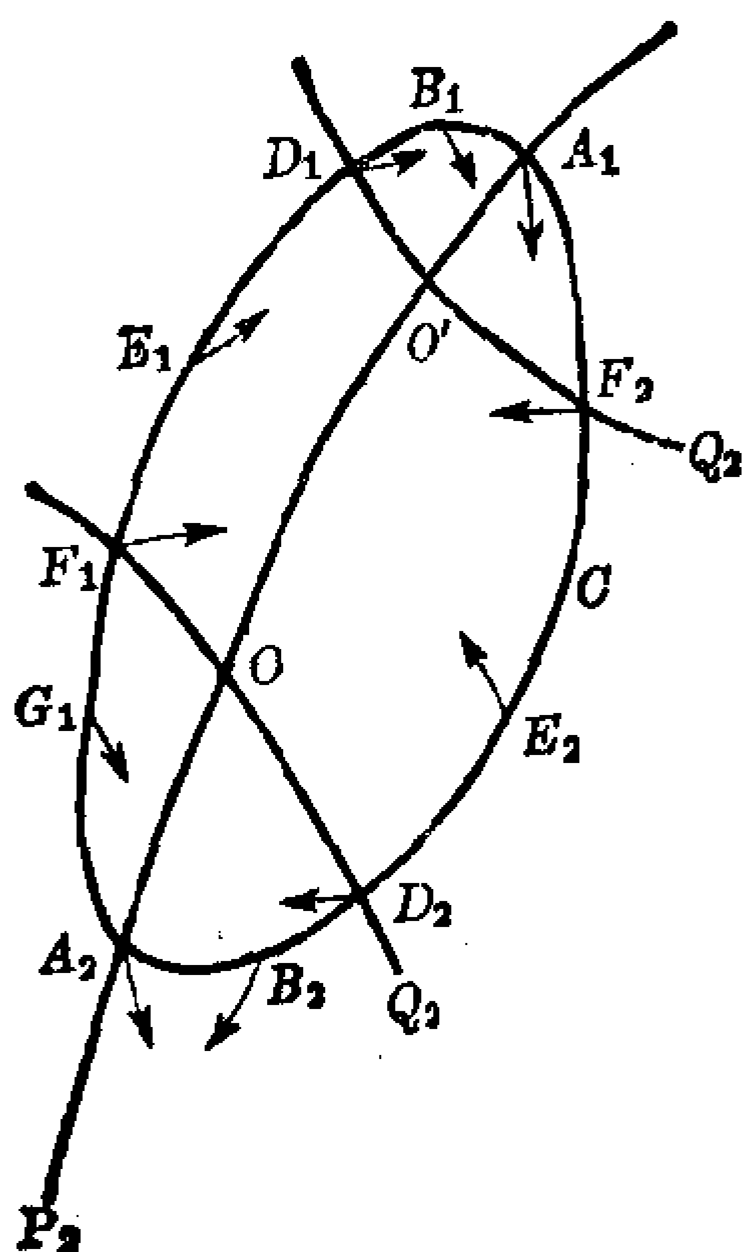


图 11·1

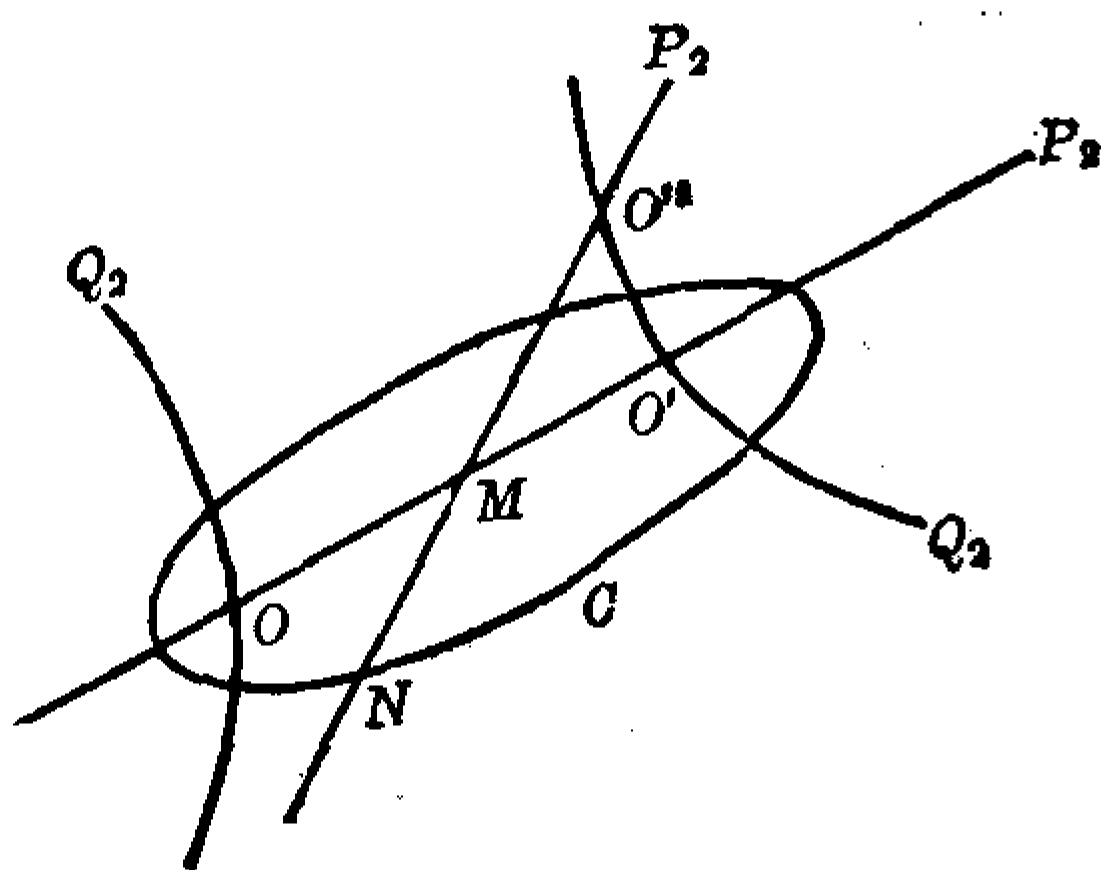


图 11·2

时，向量场的方向转了角度 $\frac{\pi}{2}$，从 D_1沿 $\widehat{D_1E_1F_1}$ 跑到 F_1 时转了角度 0，从 F_1 沿 $\widehat{F_1G_1A_2}$ 跑到 A_2 时转了角度 $-\frac{\pi}{2}$. 因此沿着 $\widehat{A_1D_1F_1A_2}$ 从 A_1 到 A_2，向量场的方向转了角度 0. 同理，沿着 $\widehat{A_2D_2F_2A_1}$ 从 A_2 到 A_1 时向量场的方向也转了角度 0. 换言之，闭曲线 C 关于(11·1)所确定的向量场的指标为零，因此 O 与 O' 的指标分别为 $+1$与-1，因为它们都是初等奇点.

如果在 O 与 O' 之间还有 $P_2=0$ 的另一支和这一支的交点(这时 $P_2=0$ 必为两相交直线，而 $\overline{OO'}$ 为其中的一直线)(如图 11·2)，则仿前可证 C 关于(11·1)所确定的向量场的指标为$+2$ 或 -2，因此 O 与 O' 的指标或同为$+1$，或同为-1.

注 1：这一性质不但可以推广到 n 次微分系统，而且可以推广到一般的平面定常系统.

注 2：如果把图 11·2 中的折线 $\widehat{OMO''}$ 看成 $P_2=0$ 的一支，而另一含 O' 的折线 $\widehat{NMO'}$ 看成 $P_2=0$ 的另一支，则可仿前证明初等奇点 O 与 O'' 的指标异号. 正因为如此，以后当双曲线退化为两相交直线时，我们总是把从交点出发的两相邻半直线看成双曲线的一支，而把余下的两相邻半直线看成双曲线的另一支.

引理 11·3 方程(11·1)最多只有三个指标为 $+1$ (或 -1) 的初等奇点.

【证】 不妨设 $P_2(x, y)=0$ 与 $Q_2(x, y)=0$ 无公因子, 否则有一条直线或曲线上充满着高阶奇点, 而其他初等奇点最多只能有一个. 显见方程(11·1)最多只有四个初等奇点. 如果它们同在 $P_2=0$ 或 $Q_2=0$ 的一支上, 则由引理 11·2, 其中两个指标为$+1$, 两个指标为-1. 因此, 如果 $P_2=0$ 或 $Q_2=0$ 是椭圆或抛物线,则引理显然成立. 今设 $P_2=0$ 和 $Q_2=0$ 都是双曲线, 且四个奇点不在 $P_2=0$ 的同一支上, 亦不在 $Q_2=0$ 的同一支上. 则或是某两个奇点在 $P_2=0$(或 $Q_2=0$)的同一支上, 而另二奇点在另一支上, 这时只有两个指标为$+1(-1)$的奇点; 或是某三个奇点在同一支上, 另一个奇点在另一支上, 这时便有可能出现三个指标为$+1$(或-1)的奇点, 但第四个奇点的指标必为-1(或$+1$).

注: 仿引理 11·3 的证明方法不难给 §10 引理 10·3 以一个新的几何证明, 并且由此容易看出, 为什么奇点的动力体系性质和它们所构成的四边形的几何性质之间会有这样巧妙的联系[176].

引理 11·4 过(11·1)的两奇点 S_1 与 S_2 的直线若不是积分直线, 则必由三个无切线段 $\overline{\infty S_1}$, $\overline{S_1S_2}$ 与 $\overline{S_2\infty}$ 所组成; 这时(11·1)的轨线从同一个方向穿过 $\overline{\infty S_1}$ 与 $\overline{S_2\infty}$, 而从相反的方向穿过 $\overline{S_1S_2}$.

【证】 由于奇点可视为切点, 故引理的前半部由引理 11·1 立刻推出. 为了证明后半部, 可先施行移转轴, 使直线 S_1S_2 成为 x 轴, 并设在 $\overline{\infty S_1}$ 上(11·1)的轨线都是自上而下地穿过它(图 11·3).

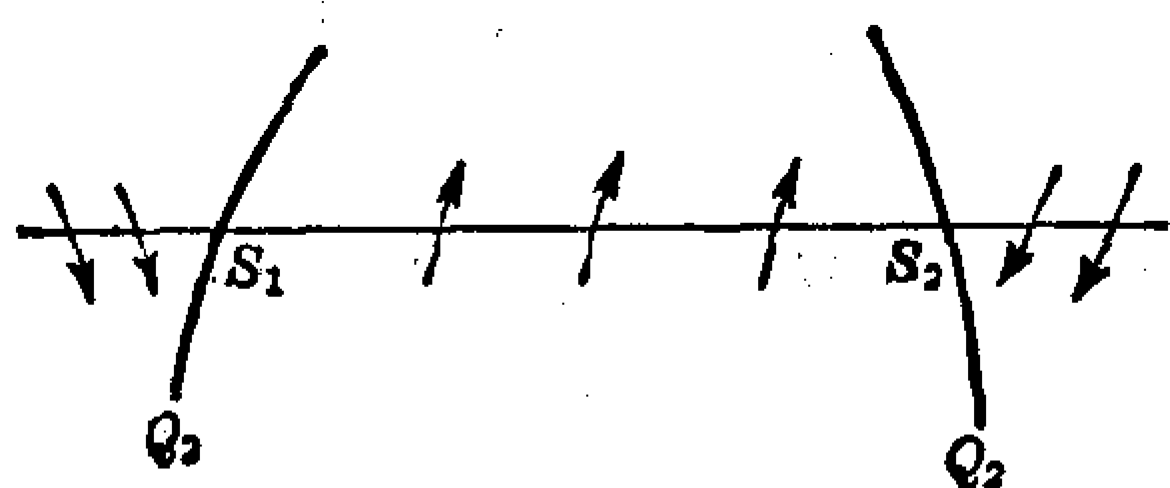


图 11·3

这说明 $\overline{\infty S_1}$ 位于 $Q_2(x, y)<0$ 的区域中. 今 $Q_2(x, y)=0$ 应过 S_1 与 S_2 两点, 但又不能以 x 轴作为它的一部分, 由二次曲线

的性质可知 $Q_2(x, y)=0$ 应在 S_1 与 S_2 两点与 x 轴互相穿过．这样，$\overline{S_1S_2}$ 应位于 $Q_2(x, y)>0$ 的区域中，$\overline{S_2\infty}$ 应位于 $Q_2(x, y)<0$ 的区域中．引理证毕．

进一步可以证明[177]：

引理 11·5 连接方程(11·1)的有限远奇点和它的无限远奇点的直线或者是轨线，或者是无切直线(除了那个有限远奇点以外)．

【证】 设此有限远奇点为原点(0, 0)，于是(11·1)可以写成

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2,\\\frac{dy}{dt}&=b_{10}x+b_{01}y+b_{20}x^2+b_{11}xy+b_{02}y^2.\end{aligned}\tag{11·2}$$

它在(0, 0)的特征方程是

$$\lambda^2-(a_{10}+b_{01})\lambda+(a_{10}b_{01}-a_{01}b_{10})=0.$$

若(0, 0)不是焦点或中心点，则有

$$(a_{10}+b_{01})^2-4(a_{10}b_{01}-a_{01}b_{10})=(a_{10}-b_{01})^2+4a_{01}b_{10}\geqslant 0.\tag{11·3}$$

设(11·2)的无限远奇点为$(1, \eta, 0)$，则易见 η 应满足方程

$$\sum_{i+j=2}(a_{ij}\eta-b_{ij})\eta^j=0.\tag{11·4}$$

这是 η 的三次方程，它至少有一实根．于是引理中所说的直线可写为 $L=y-\eta x=0$．求 L 沿着(11·2)的轨线的改变量，易见(由于 η 满足(11·4))有

$$\left.\frac{dL}{dt}\right|_{L=0}=x(b_{10}+(b_{01}-a_{10})\eta-a_{01}\eta^2).\tag{11·5}$$

由此可见，如果上式右边括弧内的值为零，则 $y-\eta x=0$ 是轨线；否则，它就是无切直线，但在奇点两边，轨线的穿过方向不同．

引理 11·6 方程(11·1)的闭轨线 Γ 内部不能含有结点，鞍点或高阶奇点[178, 179]．

【证】 设 Γ 内部含有一奇点 O，不妨设 O 为坐标原点，并且它

是结点，鞍点或高阶奇点．于是(11·1)可以写为(11·2)的形式．由于现在(11·3)成立，故可取η使(11·5)式右边括弧内的值为零．然后取过O的直线$L=y-\eta x=0$，求L沿(11·2)的轨线的改变量，易见现在有

$$\left.\frac{dL}{dt}\right|_{L=0}=x^2\Big[\sum_{i+j=2}(b_{ij}-a_{ij}\eta)\eta^j\Big]. \tag{11·6}$$

由此可见，如果上式右边括弧内的值为零，则$y-\eta x=0$是轨线；否则，轨线与它相交时都从同一个方向穿过它．不论在哪一种情况，O的外围都不可能存在闭轨线，与假设相矛盾．

推论 方程(11·1)的极限环Γ的内部只能含有唯一的奇点，它一定是焦点．

注：引理11·6及其推论即使对于三次微分系统也是不成立的．[180]举例说明存在这样的三次微分系统，它有一个内部包含三个奇点的极限环．

引理11·7 方程(11·1)的闭轨线或其上仅含一个奇点的奇闭轨线上不能含有直线段．

【证】 设方程(11·1)的闭轨线Γ上含有直线段，则此直线段所决定的直线l与Γ有无数个切点，由引理11·1知道，l本身也应是(11·1)的轨线．但这样，在Γ离开l之点(至少有两点)将破坏微分方程的解的唯一性，故不可能．当Γ上仅含一个奇点时同样也不可能[1]．

注：由引理11·7的证明可知，若Γ上含有两个奇点，则结论不一定成立．事实上易证[14]

引理11·8 连接奇闭轨线Γ上两个鞍点的直线段必定属于Γ，但设Γ上别无其他奇点．

【证】 如果此直线段不属于Γ，则由引理11·4知道它是无切

1) 如果奇闭轨线Γ能以赤道作为它的一部分，那末Γ上也可以只含一个有限远奇点，同时又含半直线，例见[179]．

线段，这时它将与 Γ 的某一段弧包围一个内部无奇点的区域，而与它相交，当 t 增加(或减少)时进入此区域的轨线将无处可去了.

具体例子：

$$\frac{dx}{dt}=-y-y^2,\quad \frac{dy}{dt}=x-x^2.$$

全局轨线图请读者自己画.

定理 11·1 方程(11·1)的闭轨线或仅含一个鞍点而位于有界区域中的奇闭轨线必定是严格的凸闭曲线，它只与 $P_2(x, y)=0$ 和 $Q_2(x, y)=0$ 的各一支相交于两点[11].

【证】 如果 Γ 不是严格凸闭，由于 Γ 上不能含有直线段，所以一定可以找到一直线 l，使与 Γ 有四个以上的交点，如图 11·4. 根据 Γ 与 l 的穿过方向可知，在线段 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ 上至少各存在一个与(11·1)的轨线相切之点(可能是奇点)，但由引理 11·1 知道这是不可能的.

其次，由于 Γ 上不能含直线段，故 Γ 只能有一个最高点 H，一个最低 G，一个最右点 R，一个最左点 L (图 11·5). 根据 Γ 上弧段的升降情况，显见 H 与 G 应是 $Q_2(x,y)=0$ 的同一支与 Γ 的仅有的两个交点，R 与 L 应是 $P_2(x, y)=0$ 的同一支与 Γ 的仅有的两个交点.

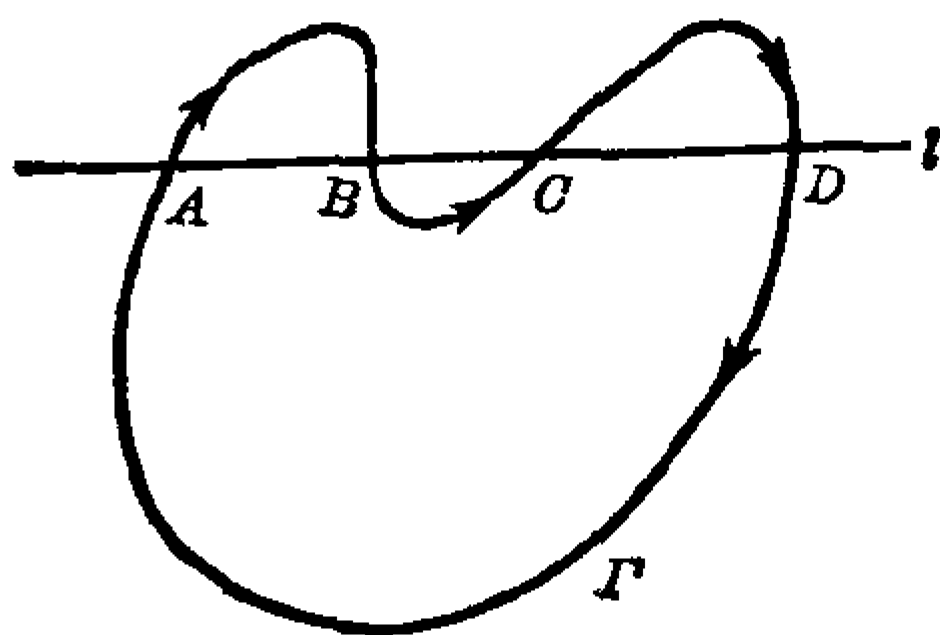


图 11·4

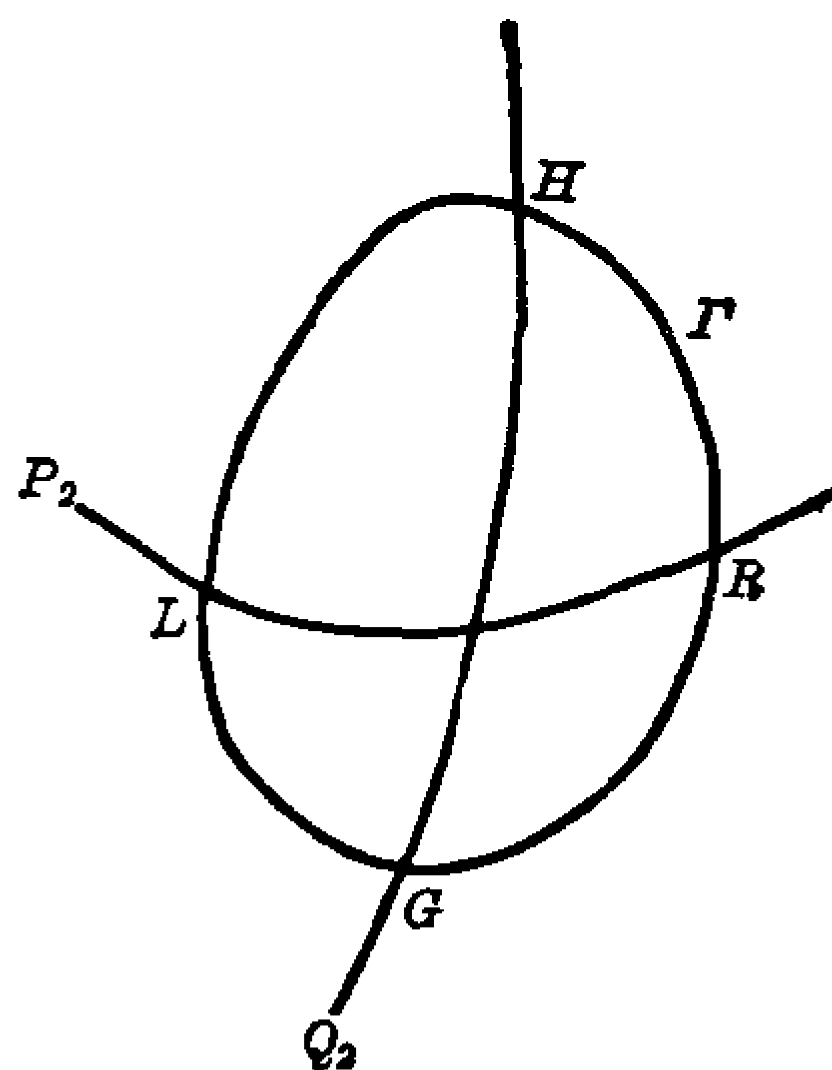


图 11·5

在这四点中，如果有某两相邻的点，例如 H 与 R 重合，则 $H=R$ 便是奇点，从而 Γ 成为奇闭轨线。这时，按照定理中的假定，L 与 G 便不能重合，并且它们也不能与 H 重合。

注：同样可证含有两个或三个鞍点的奇闭轨线也是凸闭曲线，但其上必含直线段. 又定理 11·1 对三次微分系统不一定对，例如 van der Pol 方程的极限环当 μ 较大时就不是凸的.

定理 11·2 对于方程(11·1)来说，下列两种相对位置不可能存在(图 11·6(a)，(b))[11].

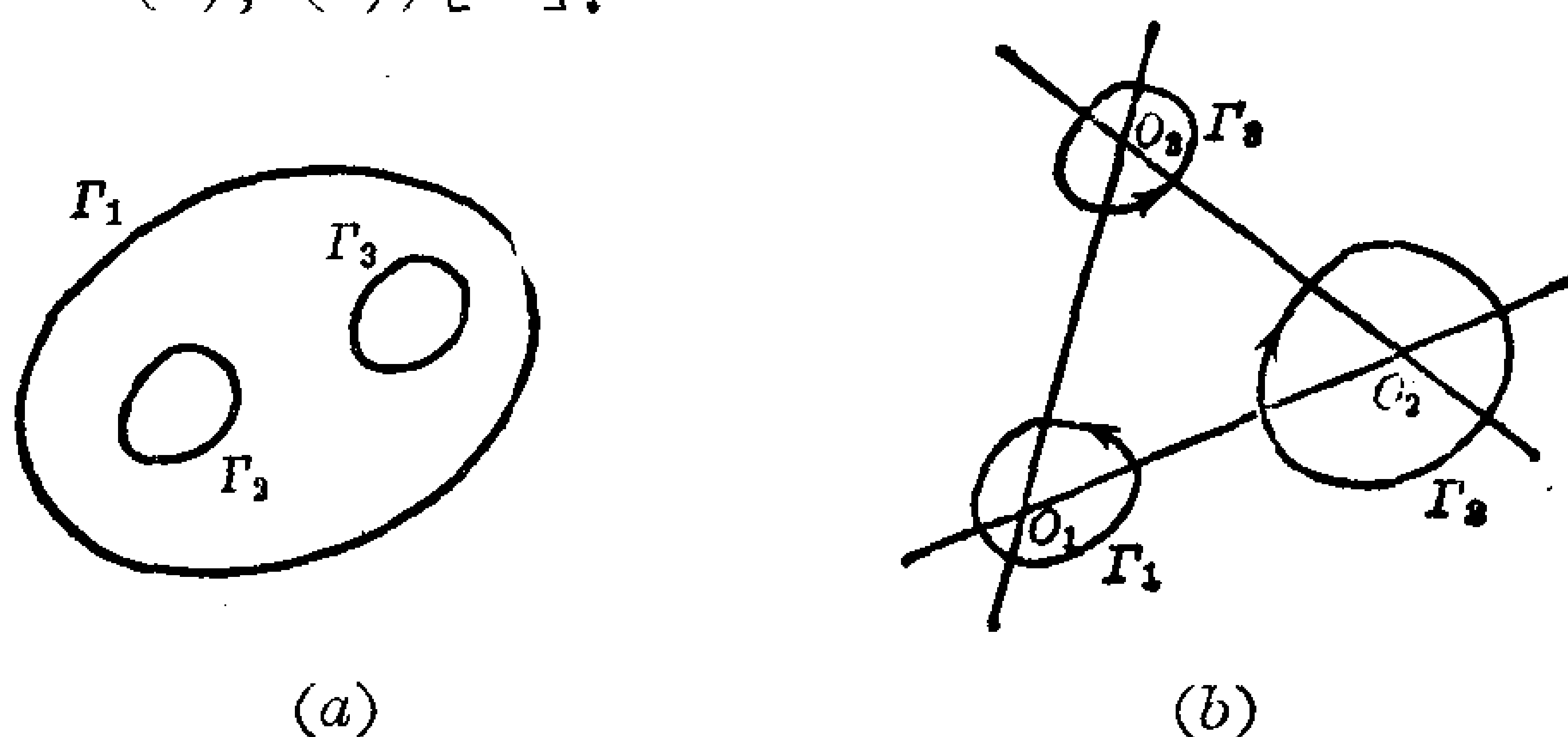


图 11·6

【证】 因为在图 11·6(a)中 Γ_1 内部应包含多于一个奇点，不可能. 在图 11·6(b)中连接三个奇点的线段 $\overline{O_1O_2}$，$\overline{O_2O_3}$ 与 $\overline{O_3O_1}$ 都应是无切线段. 今设 Γ_1 上的正方向(即 t 增加的方向)是逆时针方向，于是 Γ_2 上的正方向便应是顺时针方向，从而 Γ_3 上的正方向便应是逆时针方向. 这样一来，$\overline{O_3O_1}$ 便不可能是无切线段了.

仿此可证

推论 方程(11·1)的中心点与焦点的总数$\leqslant 2$.

定理 11·3 方程(11·1)的极限环的相对位置只可能有下列两种情况[11]:

1) 只在一个焦点外围出现一个或多个极限环;

2) 极限环分别出现在两个不同的焦点外围.

在定理 11·3 的基础之上进一步的问题是各种可能分布的具体实现. 在这方面，[11]，[14]，[17]，[19]，[20] 都做了工作. 由

于在[19]中已举例说明方程(11·1)有可能出现四个极限环，因此我们至少应当讨论(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2,2)等分布是否确实可能实现．这里(m, n)表示在第一个焦点外围出现m个极限环，在第二个焦点(如果存在的话)外围出现n个极限环[1]．

关于这个问题，以往的工作又可分为两种类型：1)举例说明，或是从理论上论证二次微分系统有可能出现(1, 0), (2, 0), (3, 0)分布[21]，(1, 1)分布[11]，(1, 2)分布[14]和(1, 3)分布[19, 20]，但所论方程的极限环是否恰好就只有这么多，会不会比这更多一些，却无法证明．2) 严格证明某一二次微分系统的极限环一定是(1, 0)分布[17](见例3)，另一二次微分系统的极限环一定是(1, 1)分布[181]．至于(4, 0)分布和(2, 2)分布，究竟能否实现，目前还不清楚．

例 1 [181] 方程

$$\frac{dx}{dt}=\delta x-y-\frac{1}{2}x^2+xy,\quad \frac{dy}{dt}=x\left(1-\frac{x}{2}\right) \tag{11·7}$$

当$0<\delta<\frac{1}{2}$时在(0, 0)与$(2, 2-2\delta)$外围各有唯一的极限环，当$\delta\leqslant 0$时无环，当$\delta=\frac{1}{2}$时两环扩大而成为由赤道与直线$x=1$所构成的两个分界线环．

证明用环域定理，旋转向量场理论和[111]的唯一性定理，请读者自己去完成．

例 2 [19] 方程

$$\frac{dx}{dt}=-y-\delta_2 x-3x^2+(1-\delta_1)xy+y^2,\ \frac{dy}{dt}=x\left(1+\frac{2}{9}x-3y\right) \tag{11·8}$$

当$0<\delta_2\ll\delta_1\ll 1$时出现(1, 3)分布．

---

1) 对于二次微分系统，在 §9 中已指出，中心点与极限环不可能同时存在，不论它们是否套在一起．

【证】 首先考虑方程

$$\frac{dx}{dt}=-y-3x^2+xy+y^2,\ \frac{dy}{dt}=x\left(1+\frac{2}{9}x-3y\right).\quad(11\cdot9)$$

容易看出(11·9)只有两个有限远奇点$O(0, 0)$与$N(0, 1)$，后者是不稳定粗焦点．经过坐标变换，把(11·9)化为(9·30)的 Баутин 的标准形式，可得

$$\lambda_1=0,\ \lambda_2=\frac{77}{41\sqrt{82}},\ \lambda_3=\frac{1152}{41\sqrt{82}},\ \lambda_4=-\sqrt{82},$$

$$\lambda_5=0,\ \lambda_6=\frac{3644}{369\sqrt{82}}.$$

由此可按§9的公式算出

$$\bar{v}_1=\bar{v}_3=0,\quad \bar{v}_5<0,$$

因此$O(0, 0)$是(11·9)的稳定二阶细焦点．

(11·9)的无限远奇点$(1, \eta, 0)$由方程

$$\eta^3+\eta^2-\frac{2}{9}=0$$

确定，它只有一个实(正)根，易证对应的无限远奇点是鞍点，经过鞍点的分界线的走向如图11·7所示．

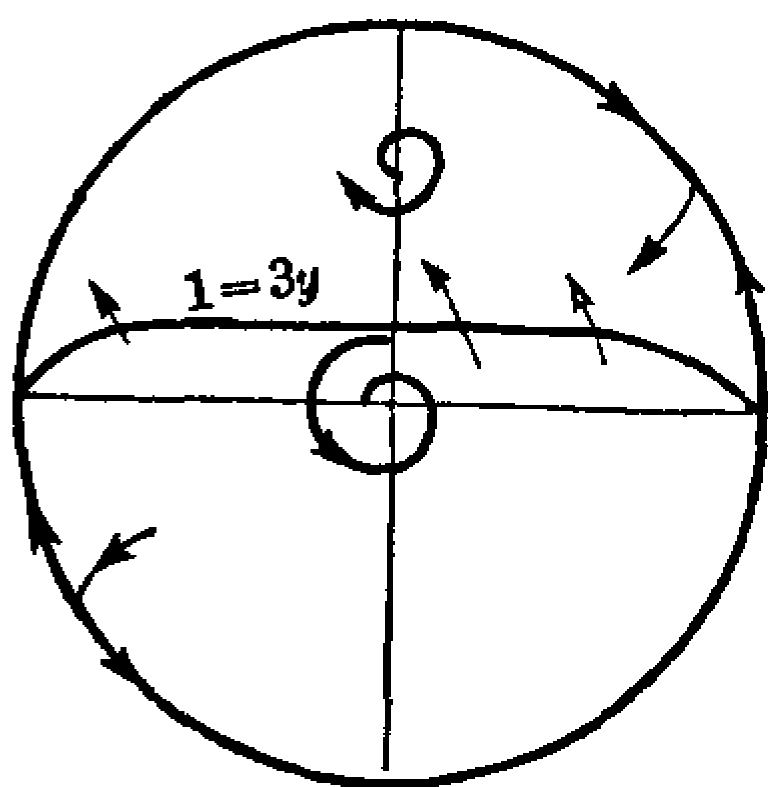


图　11·7

又在直线$1-3y=0$上有

$$\frac{dy}{dt}=\frac{2}{9}x^2\geqslant0,$$

这表示(11·9)的轨线都自下而上地穿过此直线，故由环域定理知方程(11·9)在O与N外围同时存在极限环，即存在(1,1)分布(但方程(11·9)是否恰好只有两个极限环，不得而知)．易见最靠近N的极限环Γ_1必为内稳定环，最靠近O的极限环Γ_2必为内不稳定环．

然后应用§9 Баутин 的方法，变动(11·9)的右方，使成为

$$\frac{dx}{dt}=-y-3x^2+(1-\delta_1)xy+y^2,\ \frac{dy}{dt}=x\left(1+\frac{2}{9}x-3y\right),\ (11\cdot10)$$

其中 $0<\delta_1\ll 1$. 对于 (11·10)，由于 $\bar{v}_3=2\delta_1>0$, $O(0, 0)$已变为不稳定的一阶细焦点，由§3 定理 3·7 知道，在它的邻近将再出现一个稳定极限环 $\Gamma_3(\subset\Gamma_2)$. 由于当 δ_1 足够小时，Γ_1 与 Γ_2 都不消失，故对方程(11·10)有(1, 2)分布.

最后，再给(11·10)第一个方程的右边添加一项 $-\delta_2 x$, 而使成为(11·8)，其中 $0<\delta_2\ll\delta_1\ll 1$. 于是 O 又从不稳定细焦点变为稳定粗焦点，故在其更小的邻域中又出现一个不稳定极限环 Γ_4, 且这时 Γ_1, Γ_2, Γ_3 仍然存在. 因此方程(11·8)在 O 点外围至少有三个极限环，在 N 点外围至少有一个极限环. 证毕.

类似的例子也在[20]中得到. 但其出发的方程

$$\frac{dx}{dt}=-y-10x^2+5xy+y^2,\ \frac{dy}{dt}=x+x^2-25xy \qquad (11\cdot 11)$$

在 O 点外围无环，而以 O 为三阶细焦点. 这例子虽不如例 2 的好，但它却纠正了 Баутин 关于 $\bar{v}_7$ 的公式(9·40)中的一个符号错误，给读者以方便.

在这以后，[182]和[183]又将存在(1, 3)分布的二次系统的范围拓广，使其出发方程的系数不全是确定的数字. 例如[183]中得到如下的结果:

设方程

$$\frac{dx}{dt}=-y+lx^2+\frac{(2l+b)a}{l+n}xy+ny^2,\ \frac{dy}{dt}=x+ax^2+bxy \qquad (11\cdot 12)$$

满足条件: 1) $a\neq 0$; 2) $3n(l+2n)\leqslant n(n+b)<0$; 3) 无限远奇点唯一，则可证$\left(0, \frac{1}{n}\right)$外围至少有一极限环，而$O(0, 0)$是三阶不稳定细焦点. 于是只要 $0<-\lambda\ll-\eta\ll-\varepsilon\ll 1$, 方程

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\lambda x-y+lx^2+\left(\frac{(2l+b)a}{l+n}+\varepsilon\right)xy+ny^2,\\ \frac{dy}{dt}&=x+ax^2+\left(b+\frac{\varepsilon(l+n)+\eta}{a}\right)xy\end{aligned} \qquad (11\cdot 13)$$

就在 O 外围至少有三个极限环，在 M 外围至少有一个极限环.

同样，例 1 中的方程也已在[184]中被拓广而成为研究：在什么条件下

$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+lx^2+mxy,\ \frac{dy}{dt}=x(1+ax)$$

存在两个(且只有两个)互不包含的极限环的问题[1].

最后，举一个(1, 0)分布的最显明的例子[17].

例 3 若方程(11·1)以圆或椭圆 Γ 为极限环，则 Γ 是方程(11·1)的唯一的极限环，并且它是单重环.

【证】 首先，经过仿射变换可将 Γ 变为单位圆 $x^2+y^2=1$，易见此时(11·1)应化为如下的形式：

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-y(ax+by+c)-k_2(x^2+y^2-1),\\ \frac{dy}{dt}&=x(ax+by+c)+k_1(x^2+y^2-1),\end{aligned}\tag{11·14}$$

其中 $k_1^2+k_2^2\neq0$. 此方程有两个奇点，它们都在直线 $k_2x=k_1y$ 上. 再转轴使此直线变为纵坐标轴，则(11·14)变为(仍以 x, y 记点的直角坐标)

$$\frac{dx}{dt}=-y(a'x+b'y+c')-k(x^2+y^2-1),\ \frac{dy}{dt}=x(a'x+b'y+c'),$$

其中 $k\neq0$. 上式又可化为

$$\frac{dx}{d\tau}=-y(\alpha x+\beta y+\gamma)-(x^2+y^2-1),\ \frac{dy}{d\tau}=x(\alpha x+\beta y+\gamma).\tag{11·15}$$

根据假定，单位圆 $x^2+y^2=1$ 应是极限环，故其上不能有奇点，即应有

$$\gamma^2>\alpha^2+\beta^2.\tag{11·16}$$

又圆内的奇点不能是中心点，故

$$\alpha\neq0.\tag{11·17}$$

---

1) 类似的结果也为[185]所得到.

现在分析具有中心点的方程:

$$\frac{dx}{d\tau}=-y(\beta y+\gamma)-(x^2+y^2-1),\ \frac{dy}{d\tau}=x(\beta y+\gamma),\quad (11\cdot18)$$

它和方程(11·15)有相同的闭轨线 $x^2+y^2=1$ 和相同的奇点. 容易画出它的轨线全图, 如图 11·8($\beta=-1$), 图 11·9($\beta<-1$), 图 11·10($-1<\beta<0$), 图 11·11($\beta>0$)及图 11·12($\beta=0$).

现在把方程(11·15)中的 α 看成是参变量, 则当 α 变动时(11·15)构成一个方程族, 而在 $\alpha=0$ 时即得方程(11·18). 计算

$$\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}=\frac{-x^2(x^2+y^2-1)}{x^2(\alpha x+\beta y+\gamma)^2+[y(\alpha x+\beta y+\gamma)+x^2+y^2-1]^2}\quad (11\cdot19)$$

可知, (11·15)在 $x^2+y^2=1$ 的外部与内部分别构成旋转方向相反的广义旋转向量场, 而 $x^2+y^2=1$ 是族中每一方程的闭轨线. 由于(11·18)有环绕指标为 $+1$ 的一个或两个中心点的一系闭轨线, 故由§3 定理 3·2 知道, 当 $\alpha\neq0$ 时方程(11·15)在单位圆外部和内部都不存在闭轨线. 此外由(11·19)还可看出, 如果在单位圆外部邻近(11·15)的轨线当 τ 增加时穿出(进)(11·18)的闭轨线, 则在单位圆内部邻近(11·15)的轨线当 τ 增加时应穿进(出)(11·18)的闭轨线, 即 $x^2+y^2=1$ 应是方程(11·15)的稳定或不稳定环, 而不可能是半稳定环.

最后, 为了证明 $x^2+y^2=1$ 是(11·15)的单重环, 可设它有参数方程

$$x=\cos t(\tau),\ y=\sin t(\tau),$$

其中 $t(\tau)$ 易见满足方程

$$\frac{dt}{d\tau}=\alpha\cos t+\beta\sin t+\gamma\quad (>0\ 当\ \gamma>0).$$

于是沿着单位圆 x, y 是 t 的 2π 周期函数, 然后计算发散量沿单位圆对 τ 积分一周的值, 易证它不等于零, 故为单重极限环.

关于三次微分系统有二次代数极限环的充要条件见[186, 187]. 又[188]中证明: 代数曲线 $y^n+x^m=1$ 能为二次微分系统的

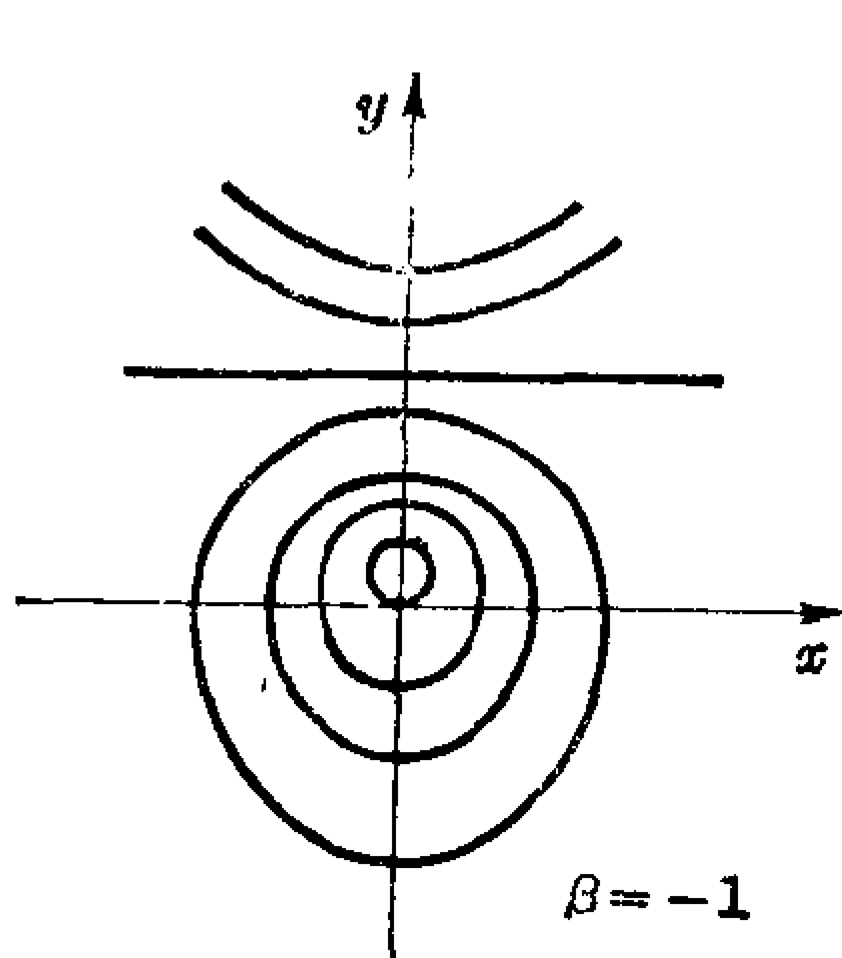


图 11·8

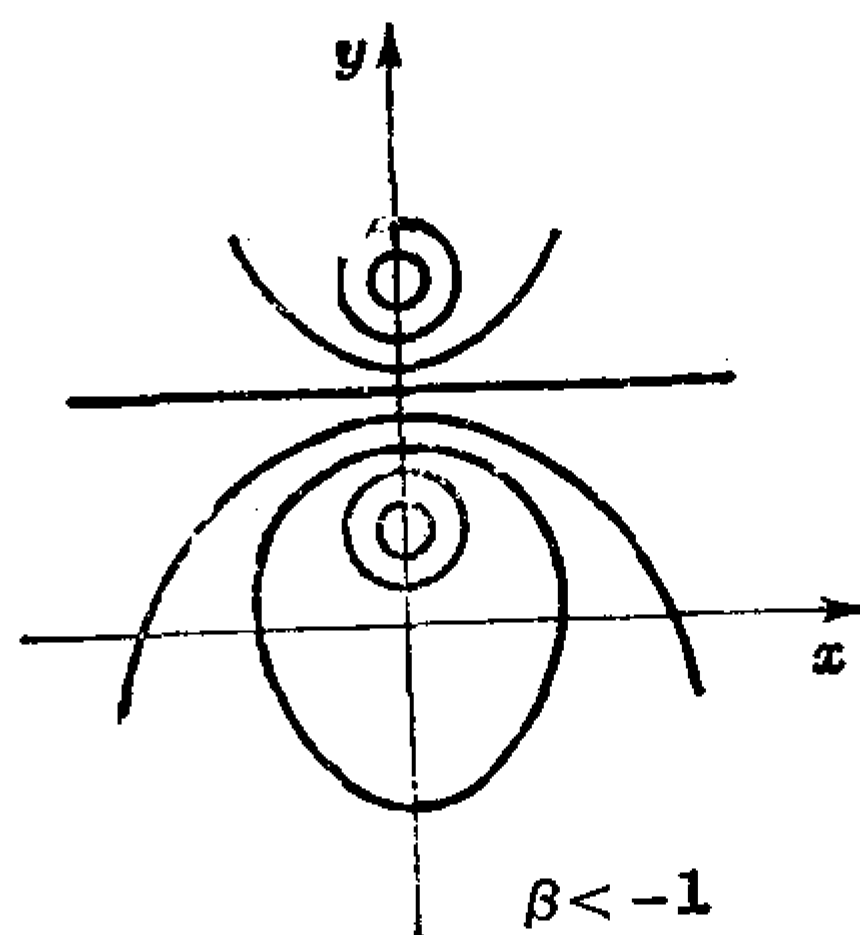


图 11·9

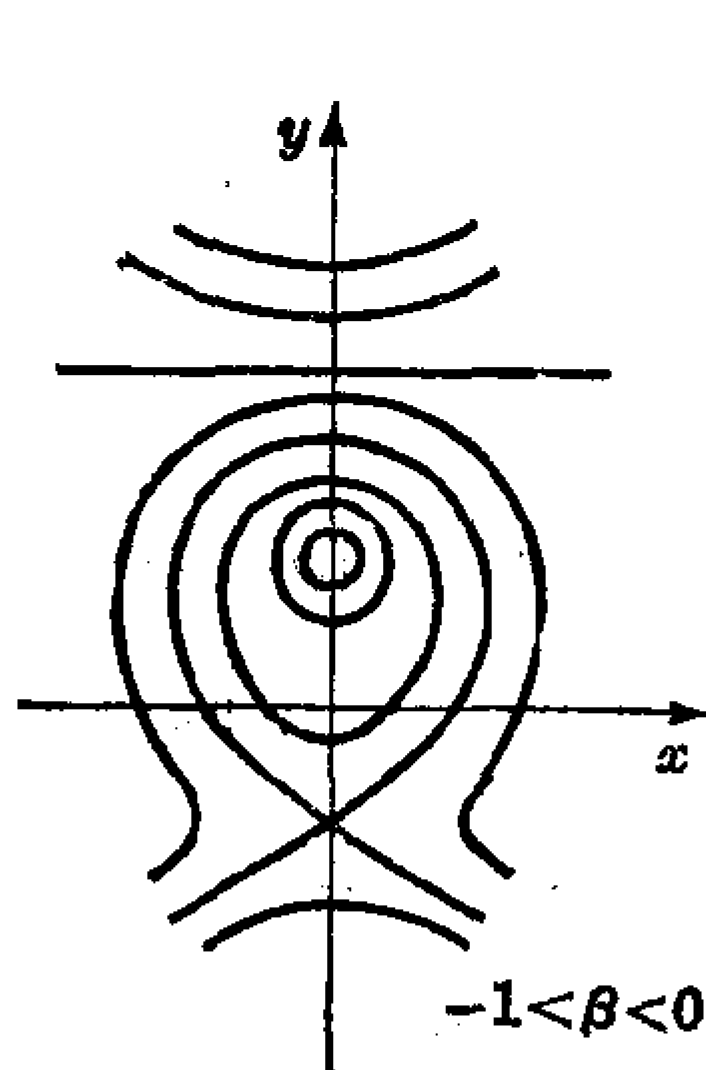


图 11·10

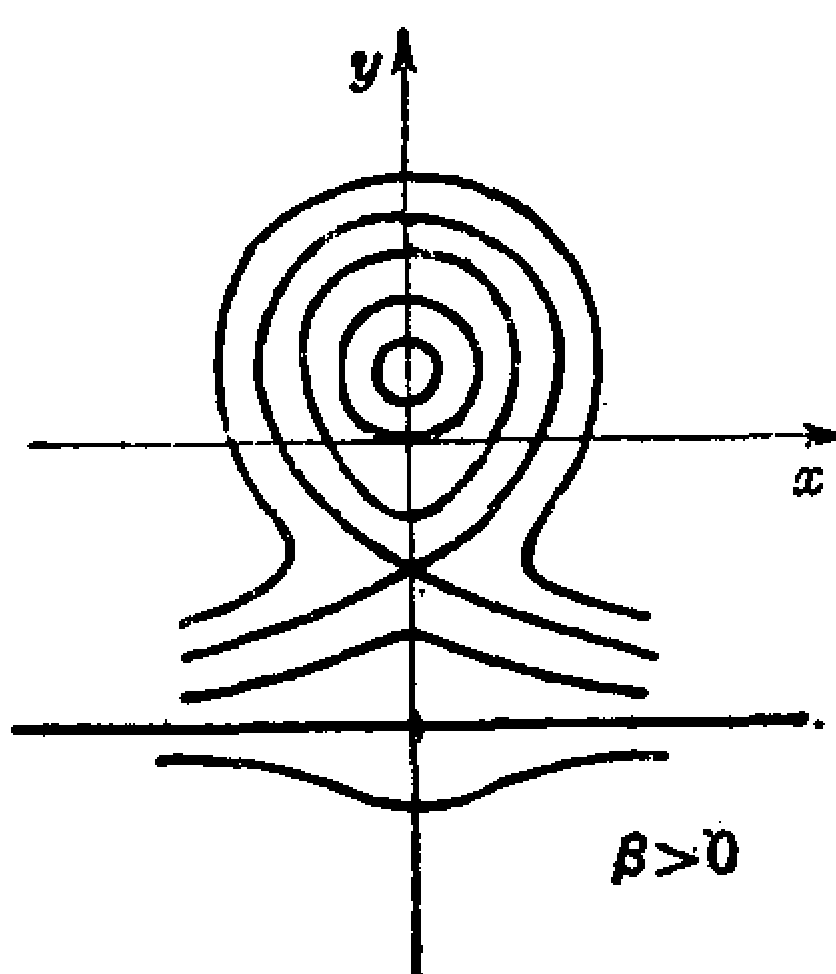


图 11·11

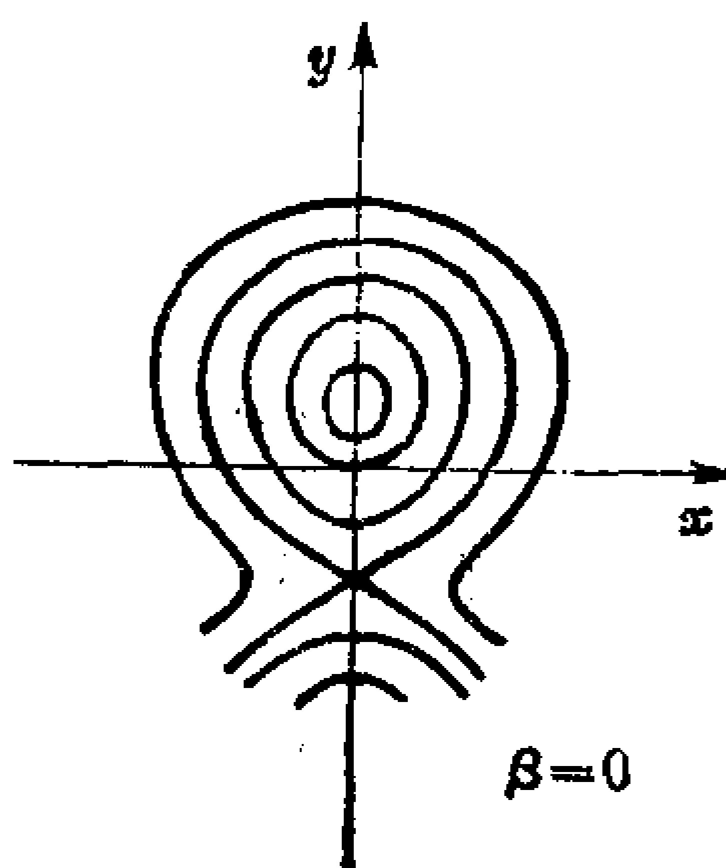


图 11·12

极限环的充要条件是$n=m=2$；能为三次微分系统的极限环的充要条件是$n=m=2$，或$m=2n=4$，或$n=2m=4$. 此外，在[189, 190]中还研究了二次微分系统存在四次代数曲线解的条件.

由于本节所介绍的是二次微分系统的极限环的一般性质，所以在这里我们也把过去已经证明过的以及今后将要证明的有关二次微分系统的重要性质一起在这里罗列一下，以便于读者查考：

1. 二次微分系统不可能既有中心点又有极限环(§9).

2. 线性部分以原点(奇点)为星形结点的二次微分系统没有极限环(§10).

3. 有两条积分直线的二次微分系统没有极限环.

4．有一条积分直线和一个细焦点的二次微分系统没有极限环(§15)．

5．有一条积分直线的二次微分系统最多只能有一个极限环(§15)．

6．发散量为零的点的轨迹 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0$ 是直线，闭轨线若存在必与它相交．

7．若二次微分系统在两个奇点的发散量都等于零，则它没有极限环(§15)．

8．若二次微分系统的奇点个数多于两个，且其中之一是细焦点，则它的极限环只能出现在一个焦点外围[19]．

9．若二次微分系统有两个细焦点，则它们都只能是一阶细焦点[191]．

10．向量场有对称中心的二次微分系统最多只能有两个极限环，他们应是(1, 1)分布(§15)．

11．具有三阶细焦点的二次微分系统必无直线解[176]．

12．如果奇闭轨线上面有三个鞍点，则它必定是以鞍点为顶点的三角形[14]．

13．若 Γ_1 与 Γ_2 都是上面有一个鞍点的奇闭轨线，则它们不能以此鞍点作为共同的奇点[14]．

习　　题

1．证明当方程(11·1)中的 $P_2(x, y)=0$ 或 $Q_2(x, y)=0$ 为椭圆时，它包含在(11·1)的闭轨线内部的弧段不能超过椭圆全长之半．

2．证明由方程 $\frac{dx}{dt}=-338x+32y+169x^2-16y^2$, $\frac{dy}{dt}=-288x+18y+144x^2-9y^2$ 出发作均匀旋转向量场，当旋转角度 θ 通过 $\frac{\pi}{4}$ 时在(0, 0)与(1, 1)两奇点外围能同时产生极限环[11]．

3．先分析 $\frac{dx}{dt}=xy$, $\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{3}(x-1)(x+2)+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}xy-\frac{1}{3}y$ 的

轨线的全局结构，再由此方程出发作均匀旋转向量场，证明当 $0<-\theta\ll 1$ 时可以出现极限环的(1, 2)分布[14].

4. 证明方程 $\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2$, $\frac{dy}{dt}=x(1+ax+by)$ 当 1) $b+n\neq 0$, 2) $b+n=\delta=m+a=0$ 时，即使有极限环也不可能是单调接近的.

5. 证明例 1 的结论.

6. 证明有两条积分直线的二次微分系统没有极限环.

7. 证明带有三个鞍点的二次微分系统的奇闭轨线一定是以这些鞍点为顶点的三角形.

8. 证明引理 11·2 的后半部以及它后面注 2 中的结论.

9. 画出引理 11·8 后面的方程的轨线图.

10. 证明书中关于方程(11·13)的结论.

11. 证明例 3 中的 Γ 是单重环.

12. 证明若在 $\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+lx^2+mxy$, $\frac{dy}{dt}=x(1+ax)$ 中有 $2a+m=0$, $a<0$, $l<0$, $l^2-8a^2<0$, $0<\delta<\frac{l}{2a}$，则在全平面有且只有两个互不包含的极限环[184].

§12. 二次微分系统的分类，I 类方程的极限环

对于二次微分系统

$$\frac{dx}{dt}=P_2(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=Q_2(x, y), \tag{12·1}$$

除了研究其极限环的相对位置以外，更重要的问题是：已给一个方程(12·1)，如何判别它有无极限环？如果有的话，到底有几个？为了研究这个问题，不论是形式(12·1)，其中 P_2, Q_2 是一般的二次多项式，还是我们在 §9 中遇到过的 Баутин 的写法(9·30)，都有不方便之处．因为，首先，要找它的奇点的坐标，有时就得解 x 或 y 的四次方程，相当麻烦．因此我们现在先介绍分类法，这就是：把有可能出现极限环的方程(12·1)经过简单的变换化为三类标准形式之一，然后逐一进行研究[12]．

不妨假设 $P_2(x, y)$ 与 $Q_2(x, y)$ 没有公因子，否则(12·1)可以简约为线性方程，它显然不存在极限环．由二次曲线的理论知道，至少存在一个实数 λ，使

$$\lambda P_2(x, y)+Q_2(x, y)=0 \tag{12·2}$$

成为退化二次曲线（如果 $Q_2(x, y)=0$ 为退化，则可取 $\lambda=0$，如果 $P_2(x, y)=0$ 为退化，则可看成是 $\lambda=\infty$，见下面的附注）．当这退化二次曲线表示一点或没有实的轨迹时，由(12·1)经过变换 $y'=\lambda x+y$, $x'=x$，所得的方程为

$$\frac{dy'}{dt}=\lambda P_2+Q_2=Q_2'(x', y'), \quad \frac{dx'}{dt}=P_2'(x', y'), \tag{12·3}$$

其中 $Q_2'(x', y')=0$ 表示一点或无实的轨迹．根据 §11 的理论知道，这时方程必不存在闭轨线．因此不妨设

$$\lambda P_2+Q_2=R_1R_2,$$

其中 $R_i(i=1,\ 2)$是实的、关于 $x,\ y$ 的次数不高于一次的多项式,且至少有一个不是常数. 容易证明(作为习题),如果对于 $i=1,2,$ 变换

$$y'=y+\lambda x,\quad x'=R_i \tag{12·4}$$

的行列式常为零,则方程有一条或两条积分直线,同时也没有闭轨线. 因此只须讨论 $i=1$ 或 2 时变换(12·4)的行列式不等于零的情况. 这时方程(12·1)在此变换之下[1]成为

$$\frac{dx'}{dt}=P_2'(x',\ y'),\quad \frac{dy'}{dt}=x'(ax'+by'+c). \tag{12·5}$$

仍改写 $x',\ y'$ 为 $x,\ y$, 根据 $a,\ b,\ c$ 的不同数值, 方程(12·5)可被分成三类:

I. $a=b=0,\ c\neq 0,$

$$\frac{dx}{dt}=k+\delta x+ey+lx^2+mxy+ny^2,\quad \frac{dy}{dt}=cx. \tag{12·6}$$

II. $a\neq 0,\ b=0,\ c\neq 0,$

$$\frac{dx}{dt}=k+\delta x+ey+lx^2+mxy+ny^2,\ \frac{dy}{dt}=x(ax+c). \tag{12·7}$$

III. $b\neq 0,$

$$\frac{dx}{dt}=k+\delta x+ey+lx^2+mxy+ny^2,\quad \frac{dy}{dt}=x(ax+by+c). \tag{12·8}$$

至于 $b=c=0$ 而 $a\neq 0$ 的情况可以不必讨论,因为这时 $Q_2(x,y)\geqslant 0$ 在全平面成立,不可能存在闭轨线.

根据§11 的理论,方程(12·6),(12·7)或(12·8)要有闭轨线,则其内部应含唯一的指标为 $+1$ 的焦点或中心点. 把原点移到此奇点,然后作适当的变换

$$x=\mu x',\quad y=\nu y',\quad t=\lambda t',$$

可将方程(12·6),(12·7),(12·8)分别化为

1) 若 $\lambda=\infty$,可先在(12·1)中把 $x,\ y$ 交换,再作变换(12·4),其中 $\lambda=0$.

I. $$\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2,\ \frac{dy}{dt}=x, \tag{I}$$

II. $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2,\\ \dfrac{dy}{dt}=x(1+ax),\ a\neq 0,\end{cases} \tag{II}$$

III. $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2,\\ \dfrac{dy}{dt}=x(1+ax+by),\ b\neq 0.\end{cases} \tag{III}$$

今后我们就将对 I, II, III 类方程逐一详细进行研究.谈到分类,除了我国的分类法以外,也还有苏联学者的分类法. [192] 将 (12·1) 化为两类[1]:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=b_{00}+xy,\\ \dfrac{dy}{dt}=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2=Q_2(x,y),\end{cases} \tag{A}$$

$$\frac{dx}{dt}=b_{20}x^2+y,\quad \frac{dy}{dt}=Q_2(x,\ y) \tag{B}$$

关于(II), (III)类方程在某些情况下的极限环的不存在性或唯一性定理以及 §11 末所列的有趣的性质 7), 他们就是把方程先化为 (A)或(B), 然后再化为 Liénard 型方程而得到证明的.

有了两种不同的分类法，自然就产生这样的问题：能否一劳永逸地求出两类系数之间的关系，以免人们在研究工作有需要的时候再来慢慢把这一类型的方程化为那一类型，或是反之. 这一工作已在[193]中做了一部分，他得到了(A)或(B)中的系数由(III)中的系数来表出的表达式,具体结果如下:

(一) $n\neq 0$. 记 k 为

$$a+(b-l)k-mk^2-nk^3=0 \tag{12·9}$$

1) 由(12·1)到(A)或(B)的化法将在 §15 中详细介绍.

的非零根[1]. $\alpha=k^3-\delta k^2+k$, $\beta=kl-a-nk^3$. 当 $\beta=0$, $\alpha\neq0$ 时(III)可化为(B), 其中:

$$a_{00}=0,\ a_{10}=-k\alpha+k^2-\delta k^3=-k^4,$$

$$a_{20}=-\frac{a\alpha}{nk^3}-\frac{\delta k^2-k}{nk^3}\left[2a+bk-nk^3+\frac{1}{\alpha}(a+bk)(\delta k^2-k)\right],$$

$$a_{01}=\delta k^2, a_{11}=\frac{1}{nk^3}\left[2a+bk+\frac{2}{\alpha}(a+bk)(\delta k^2-k)\right],$$

$$a_{02}=\frac{-1}{nk^3\alpha}(a+bk).$$

当 $\beta\neq0$ 时(III)可化为(A), 其中

$$b_{00}=\alpha\left[\frac{\alpha}{\beta}(a-kl)+k-\delta k^3\right],$$

$$a_{00}=\frac{1}{\beta}[k\alpha\beta+a\alpha^2-b_{10}(k\beta+\alpha(2a+bk))+b_{10}^2(a+bk)$$
$$+b_{00}(a-kl)],$$

$$a_{10}=\frac{1}{\beta}[-(k\beta+2a\alpha)-b_{20}(k\beta+\alpha(2a+bk))+b_{10}(2a+bk)$$
$$+2b_{10}b_{20}(a+bk)],$$

$$a_{20}=\frac{1}{\beta}[a+b_{20}(2a+bk)+(a+bk)b_{20}^2],$$

$$a_{01}=\frac{1}{\beta}[k\beta+\alpha(2a+bk)-2b_{10}(a+bk)],$$

$$a_{11}=\frac{-1}{\beta}[a+kl+bk+2(a+bk)b_{20}],\ a_{02}=\frac{1}{\beta}(a+bk),$$

其中

$$b_{10}=\delta k^2-k-\frac{2\alpha}{\beta}(a-kl), b_{20}=\frac{1}{\beta}(a-kl).$$

这里没有考虑 $\alpha=\beta=0$ 的情况, 因为可证此时(III)一定不存在极限环.

(二) $n=0$. 当 $m=0$ 时请读者自己作为习题去化化看[2]. 今

---

1) (12·9)只有(实的)零根的情况[193]中未讨论, 请读者自己补足.

2) $n=m=0$ 的情况[193]误以为没有极限环, 遗漏未做.

设 $m\neq 0$. 这时可证(III)可以化为(A)，其中

$$b_{00}=l+m\delta,\ a_{00}=m^2+ma-b(2l+m\delta)+l(l+m\delta),$$

$$a_{10}=m^2+2am-b(3l+m\delta),\ a_{01}=b,$$

$$a_{20}=ma-bl,\ a_{11}=b+l,\ a_{02}=0.$$

当然，反过来用(A)或(B)中的系数来表达(III)中的系数，这一工作也是可以做的.

其次，如何在我们的分类法之下用 $\delta,\ l,\ m,\ n,\ a,\ b$ 来表达 §9 中的 $\bar{v}_1,\ \bar{v}_3,\ \bar{v}_5$ 和 $\bar{v}_7$，也是一个重要的问题[1]. 为此，应首先找出 §9 中的 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4,\ \lambda_5,\ \lambda_6$ 的表达式. 这可以按照 §9 定理 9·2 前面那一段所说的办法来做，即先作变换

$$x=\frac{-\delta\eta}{\sqrt{4-\delta^2}}-\xi,\quad y=\frac{-2\eta}{\sqrt{4-\delta^2}},\tag{12·10}$$

然后施行转轴，取

$$\tan\varphi=\frac{-(2a+b\delta)\sqrt{4-\delta^2}}{b\delta^2+2\delta(a-m)-4(l+n)}\tag{12·11}$$

及 $$\xi=x\cos\varphi-y\sin\varphi,\eta=x\sin\varphi+y\cos\varphi,\tau=\frac{1}{2}\sqrt{4-\delta^2}\,t,\tag{12·12}$$

便得

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\lambda_1x-y-\lambda_3x^2+(2\lambda_2+\lambda_5)xy+\lambda_6y^2,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=x+\lambda_1y+\lambda_2x^2+(2\lambda_3+\lambda_4)xy-\lambda_2y^2\end{cases}\tag{12·13}$$

其中 $\lambda_1=\dfrac{\delta}{\sqrt{4-\delta^2}}$. 又当 $\delta\neq 0$ 时 $\lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_L$ 的表达式太繁，且用处不大，不在此详细写出.

今后重要的是当 $\lambda_1=0$，亦即 $\delta=0$，(0, 0)为细焦点时(12·13)中各项系数的值. 这时

---

1) §16 的最后一定理的证明说明 $\bar{v}_3,\ \bar{v}_5,\ \bar{v}_7$ 的 Баутин 表达式以及方程(12·1)的 Баутин 写法对于研究二次系统的某些性质很有其方便之处.

$$
\left.\begin{aligned}
&\tan\varphi=\frac{a}{l+n},\ \cos\varphi=\frac{l+n}{\sqrt{a^2+(l+n)^2}},\\
&\sin\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+(l+n)^2}},\quad \lambda_1=0,\\
&\lambda_3=[a^2+(l+n)^2]^{-3/2}[l(l+n)^3+a(m+a)(l+n)^2\\
&\qquad+a^2(l+n)(b+n)],\\
&\lambda_6=[a^2+(l+n)^2]^{-3/2}[ma(l+n)^2+a^2(b-l)(l+n)\\
&\qquad-a^4-n(l+n)^3],\\
&2\lambda_2+\lambda_5=[a^2+(l+n)^2]^{-3/2}[(2a+m)(l+n)a^2+ba^3\\
&\qquad\qquad+a(2l-2n-b)(l+n)^2-m(l+n)^3],\\
&\lambda_2=[a^2+(l+n)^2]^{-3/2}[na^3+ma^2(l+n)\\
&\qquad+a(l-b)(l+n)^2-a(l+n)^3],\\
&2\lambda_3+\lambda_4=[a^2+(l+n)^2]^{-3/2}[a^2(l+n)(b-2l+2n)\\
&\qquad\qquad+a(2a+m)(l+n)^2-ma^3-b(l+n)^3].
\end{aligned}\right\}\quad(12\cdot14)
$$

由此又可求出

$$
\left.\begin{aligned}
\lambda_4&=\frac{-ma-(l+n)(b+2l)}{\sqrt{a^2+(l+n)^2}},\\
\lambda_5&=\frac{a(b+2l)-m(l+n)}{\sqrt{a^2+(l+n)^2}},\\
\lambda_3-\lambda_6&=\sqrt{a^2+(l+n)^2}.
\end{aligned}\right\}\quad(12\cdot15)
$$

这样，$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4,\ \lambda_5,\ \lambda_6$ 通过 $\delta,\ l,\ m,\ n,\ a,\ b$ 的表达式已全部得出．由此要进一步求出 $\bar{v}_3,\ \bar{v}_5,\ \bar{v}_7$ 的表达式也是不难的．

与§9定理9·2的中心点条件相比较，可得

定理12·1 方程(III)以原点为中心点的四组条件是:

1) $\delta=0,\ m(l+n)-a(b+2l)=0,\ ma+(l+n)(b+2l)=0$;
(相当于 $\lambda_1=\lambda_4=\lambda_5=0$),

2) $\delta=0,\ a=l+n=0$ (相当于 $\lambda_1=\lambda_3-\lambda_6=0$);

3) $\delta=0,\ m(l+n)=a(b+2l),\ a[a^2(n+b+2l)-(b+n)(l+n)^2]=0$ (相当于 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_5=0$);

4) $\delta=0,\ m=5a,\ b=3l+5n,\ ln+2n^2+2a^2=0$

(相当于 $\lambda_1=\lambda_5=\lambda_4+5\lambda_3-5\lambda_6=\lambda_3\lambda_6-2\lambda_6^2-\lambda_2^2=0$).

证明从略，作为习题.

注 1：在方程的转化时 φ 可以相差一个 π，这时相应的 λ_2, λ_3, …, λ_6 都变号，而 λ_1, $\bar{v}_i(i=3,\ 5,\ 7)$ 则不变.

注 2：虽然理论上要求出 $\bar{v}_5$, $\bar{v}_7$ 的表达式 ($\bar{v}_3$ 不难)，借以判定原点的稳定性及其为细焦点的阶数是可以办到的，但表达式很繁，不易进行简化. [183]先从研究具形式

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=x+b_{20}x^2+b_{11}xy+b_{02}y^2\end{cases}\tag{12·16}$$

的二次系统以(0, 0)为 k 阶细焦点($k=1,\ 2,\ 3$)的充要条件着手，然后进而导出(0, 0)为中心点的充要条件，所得的两组结果都较为简单而便于应用. 下面介绍[183]的几个定理，证明从略.

定理 12·2 对系统(12·16)引入判定量

$$\begin{aligned}&W_1=A\alpha-B\beta,\\ &W_2=[\beta(5A-\beta)+\alpha(5B-\alpha)]\gamma,\\ &W_3=(A\beta+B\alpha)\gamma\delta,\end{aligned}\tag{12·17}$$

其中

$$\begin{aligned}&A=a_{20}+a_{02},\ B=b_{20}+b_{02},\ \alpha=a_{11}+2b_{02},\ \beta=b_{11}+2a_{20},\\ &\gamma=b_{20}A^3-(a_{20}-b_{11})A^2B+(b_{02}-a_{11})AB^2-a_{02}B^3,\\ &\delta=a_{02}^2+b_{20}^2+a_{02}A+b_{20}B,\end{aligned}\tag{12·18}$$

则 1) (0, 0)是 k 阶细焦点 ($k=1,\ 2,\ 3$)，当且仅当下列第 k 组条件成立：

$$1^\circ\ W_1\neq0;\ 2^\circ\ W_1=0,\ W_2\neq0;\ 3^\circ\ W_1=W_2=0,\ W_3\neq0.\tag{12·19}$$

2) k 阶细焦点的稳定性由 W_k 的符号决定，当 $W_k<0$ (>0) 时为稳定(不稳定)；

3) 原点为中心点，当且仅当 $W_1=W_2=W_3=0$.

由于在研究(0, 0)的稳定性时，只有当 $W_1=0$ 时才有必要去考察 W_2，只有当 $W_1=W_2=0$ 时，才有必要去考察 W_3. 因此，如果改以

$$
\begin{aligned}
&W_1=A\alpha-B\beta,\\
&W_2'=\begin{cases}(5A-\beta)\beta\gamma, & \text{当 } A\neq 0,\\ (5B-\alpha)\alpha\gamma, & \text{当 } B\neq 0,\\ 0, & \text{当 } A=B=0;\end{cases}\\
&W_3'=\begin{cases}A\beta\gamma\delta, & \text{当 } A\neq 0,\\ B\alpha\gamma\delta, & \text{当 } B\neq 0,\\ 0, & \text{当 } A=B=0\end{cases}
\end{aligned}
\tag{12·20}
$$

来代替(12·17)中的 W_1, W_2, W_3，则定理 12·2 的结论保持不变.

推论 系统(12·16)以原点为中心点，当且仅当下列四组条件至少有一组成立.

1) $A=B=0$ (相当于 $\lambda_1=\lambda_3-\lambda_6=0$);

2) $\alpha=\beta=0$ (相当于 $\lambda_1=\lambda_4=\lambda_5=0$);

3) $A\alpha-B\beta=\gamma=0$ (相当于 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_5=0$);

4) $5A-\beta=5B-\alpha=\delta=0$

(相当于 $\lambda_1=\lambda_5=\lambda_4+5\lambda_3-5\lambda_6=\lambda_3\lambda_6-2\lambda_6^2-\lambda_2^2=0$).

定理 12·3 对于系统(III)，引入判定量

$$
\begin{aligned}
&\overline{W}_1=m(l+n)-a(b+2l),\\
&\overline{W}_2=ma(5a-m)[(l+n)^2(n+b)-a^2(b+2l+n)],\\
&\overline{W}_3=ma^2[2a^2+n(l+2n)][(l+n)^2(n+b)-a^2(b+2l+n)],
\end{aligned}
\tag{12·21}
$$

则定理 12·2 (改其中的 W_i 为 $\overline{W}_i$)对系统(III)成立. 系统(III)以原点为中心点，当且仅当下列条件至少有一组成立:

1) $a=l+n=0$;

2) $m(l+n)=a(b+2l)$,

$a[(l+n)^2(n+b)-a^2(b+2l+n)]=0$, $a\neq 0$;

3) $m=b+2l=0$;

4) $m=5a,\ b=3l+5n,\ 2a^2+n(l+2n)=0$.

下面转而研究(I)类方程的极限环的不存在性，存在性和唯一性. 首先，证明一个不存在性定理.

定理 12·4 方程

$$\frac{dx}{dt}=-y+lx^2+mxy+ny^2, \qquad \frac{dy}{dt}=x \qquad (\mathrm{I})_{\delta=0}$$

当 $m(l+n)=0$ 时以原点为中心点，当 $m(l+n)\neq 0$ 时没有闭和奇闭轨线.

【证】 我们用 Dulac 函数法来证明本定理. 首先对 $n=0$ 的情况取 Dulac 函数

$$B(x,\ y)=e^{mx-2ly-\frac{m^2}{2}y^2}, \qquad (12\cdot 22)$$

则有
$$\frac{\partial}{\partial x}(BP_2)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ_2)=mlx^2e^{mx-2ly-\frac{m^2}{2}y^2}.$$

当 $ml=0$ 时，上式右边恒等于零，(12·22)成为方程$(\mathrm{I})_{\delta=0}$的积分因子，显见原点是中心点；当 $ml\neq 0$ 时，上式右边在全平面保持常号，故$(\mathrm{I})_{\delta=0}$不存在闭或奇闭轨线.

若在方程$(\mathrm{I})_{\delta=0}$中 $n\neq 0$，则取

$$B(x,\ y)=e^{(\alpha mn-2l)y}(x-\alpha ny+\alpha)^{\alpha m}, \qquad (12\cdot 23)$$

其中 $\alpha=\frac{1}{2n^2}(m+\sqrt{4n^2+m^2})$ 是 $n^2\alpha^2-m\alpha-1=0$ 的正根. 可以算出

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP_2)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ_2)=\alpha m(l+n)x^2(x-n\alpha y+\alpha)^{m\alpha-1}e^{(\alpha mn-2l)y}.$$

因此，当 $m(l+n)=0$ 时原点是中心点；当 $m(l+n)\neq 0$ 时上式右边在半平面 $x-n\alpha y+\alpha>0$ 中保持常号. 注意原点位于此半平面中，且直线 $x-n\alpha y+\alpha=0$ 被方程$(\mathrm{I})_{\delta=0}$的轨线从同一方向穿过，可知$(\mathrm{I})_{\delta=0}$不存在闭轨线. 又因鞍点 $\left(0,\frac{1}{n}\right)$在直线 $x-n\alpha y+\alpha=0$ 上，若存在奇闭轨线，则它应经过鞍点，且以过鞍点的某两条分界线作

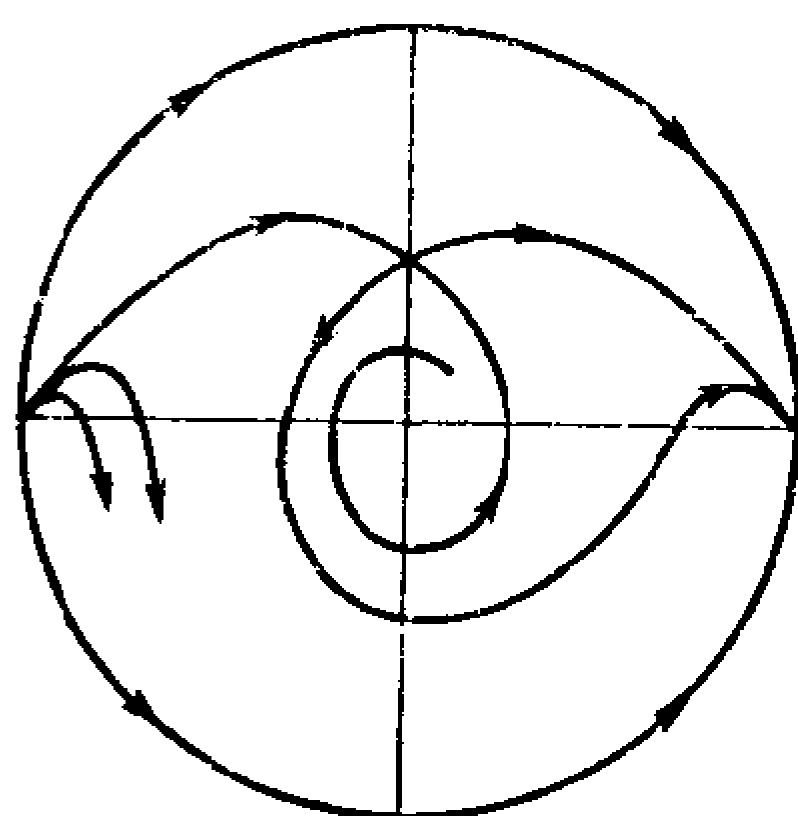

$n>0,\ l>0,\ 4nl>1$

图 12·1

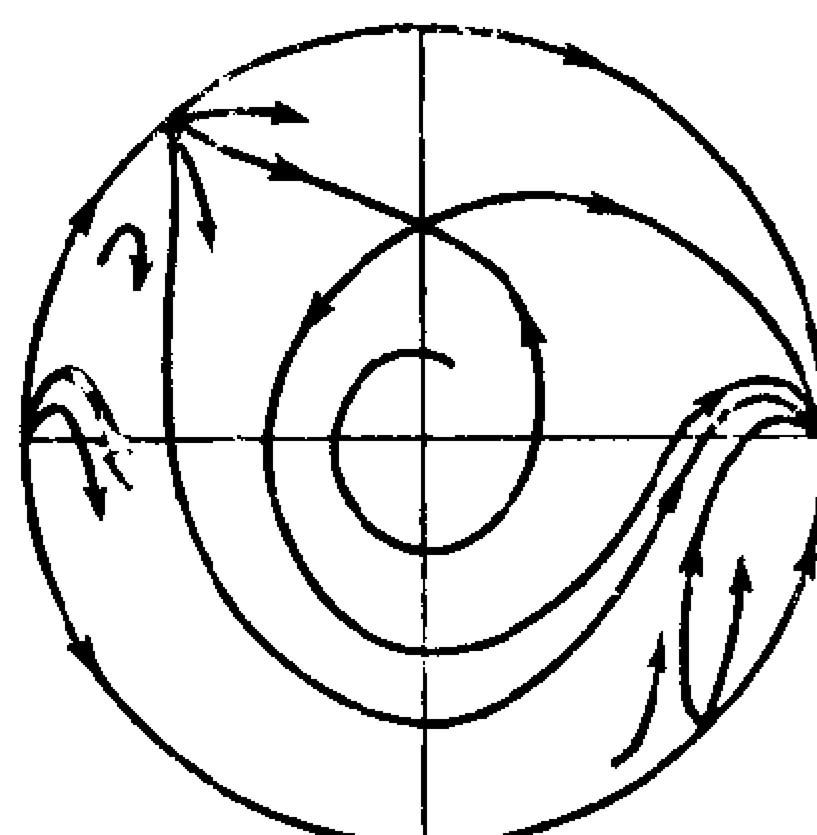

$n>0,\ l>0,\ 4nl=1$

图 12·2

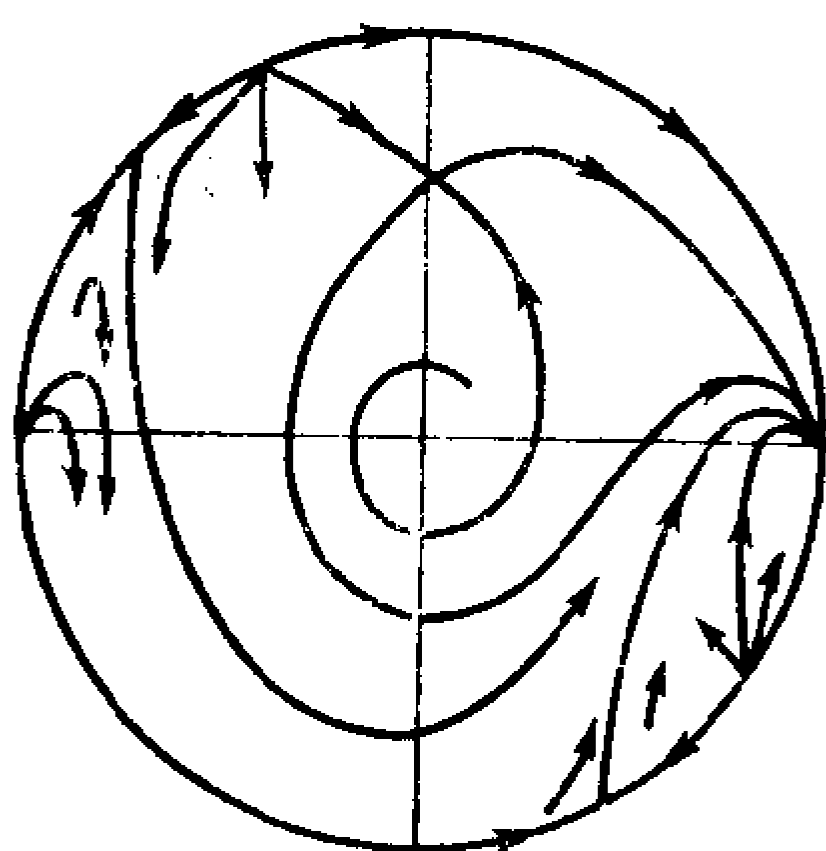

$n>0,\ l>0,\ 4nl<1$

图 12·3

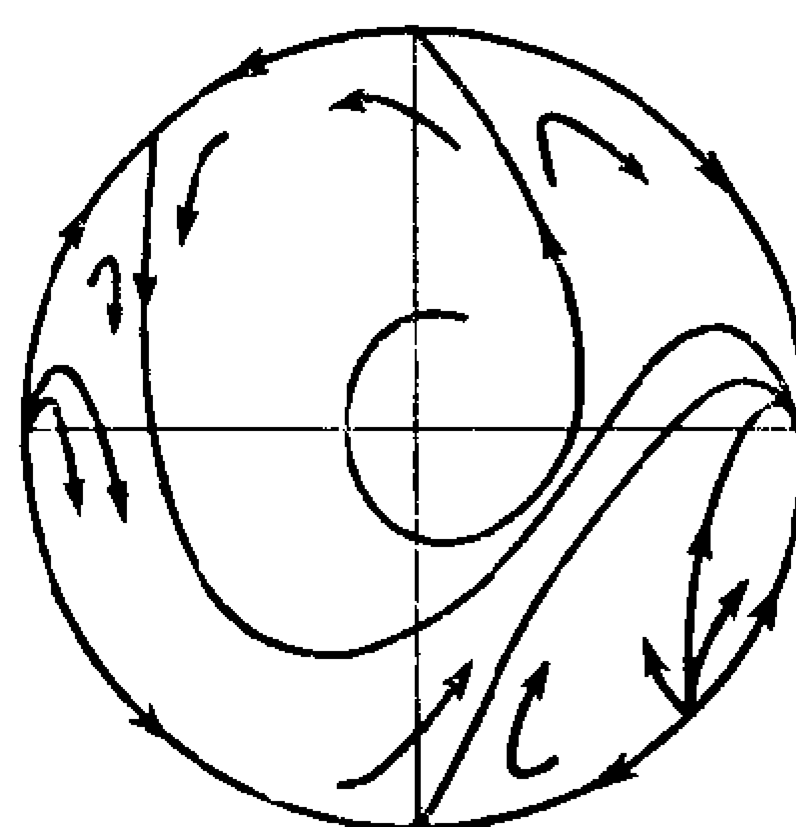

$l>0,\ n=0$

图 12·4

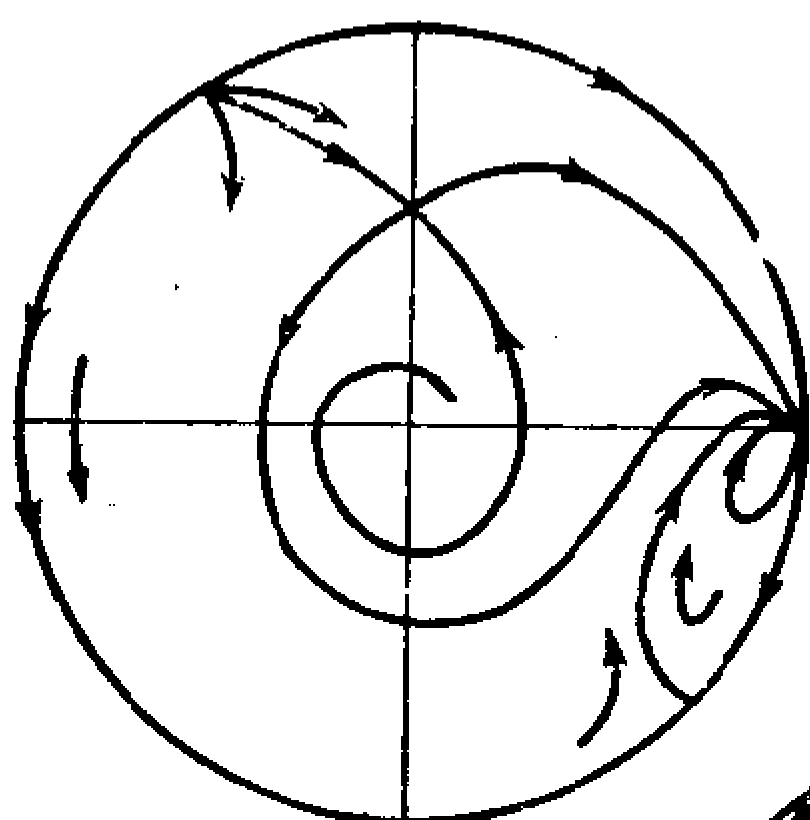

$l=0,\ n>0$

图 12·5

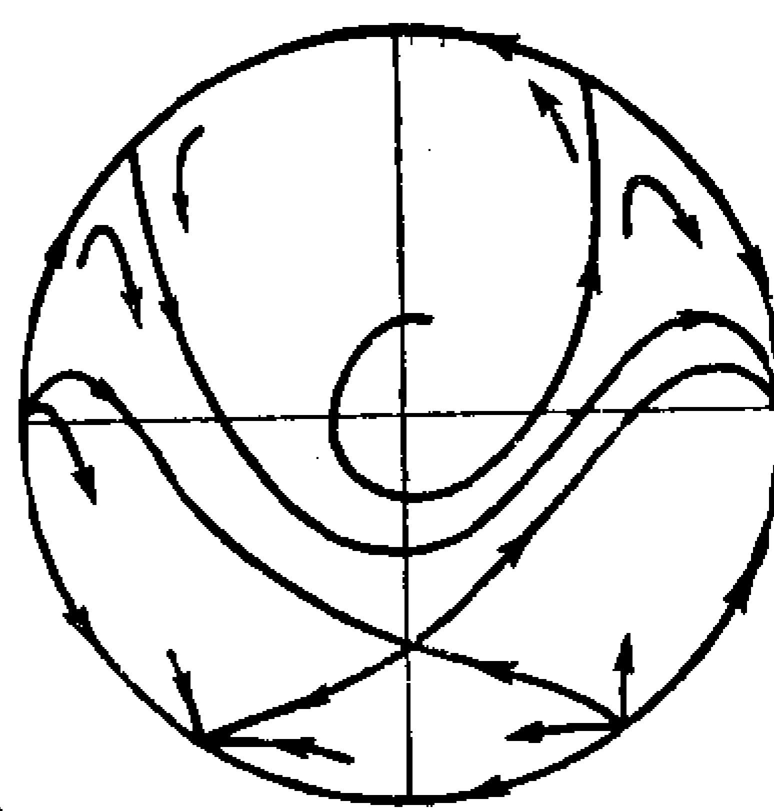

$l>0,\ -l<n<0$

图 12·6

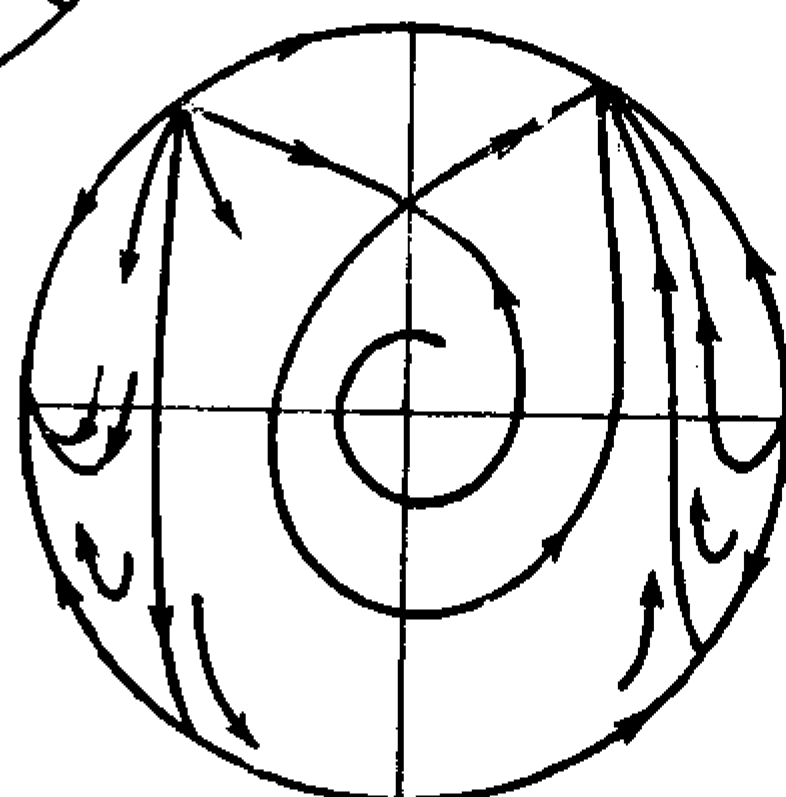

$n>-l>0$

图 12·7

为它的构成部分，由前面的讨论知道这也是不可能的．定理证毕．

$(\mathrm{I})_{\delta=0}$ 的全局轨线图已在[194]中研究清楚，如图 12·1—12·7，其中已设 $m=1$．中心点的情况（$m=0$ 或 $l+n=0$）可由§9推出，不再另画．

定理 12·5 方程(I)当 $m(l+n)=0$ 而 $\delta\neq0$ 时无闭与奇闭轨线，当 $\delta m(l+n)>0$ 时亦然；当 $\delta m(l+n)<0$ 且 $|\delta|$ 足够小时存在唯一的极限环．

【证】 方程(I)当 δ 变动时构成以 δ 为参数的广义旋转向量场的完全族．由于当 $m(l+n)=\delta=0$ 时(I)有一系的闭轨线，所以当 $m(l+n)=0$ 而 $\delta\neq0$ 时无闭与奇闭轨线．其次，若 $\delta m(l+n)<0$，则当 $|\delta|$ 由零增大时原点的稳定性发生改变，故由§3定理 3·7 知道，在原点附近将出现极限环．又由§6 VII 段知道，当 $|\delta|$ 足够小时在原点外围存在唯一的极限环（这一结论即使对方程(III)也是对的，只要 $\delta[m(l+n)-\alpha(b+2l)]<0$；但对(III)，$\delta$ 变动并不构成旋转向量场）．由于这个极限环当 $|\delta|$ 从零增加时它单调扩大而遮盖了原点的邻域（如果极限环不唯一，则有的单调缩小；但以后我们将可看到不论 $|\delta|$ 多大，只要极限环存在，它总是唯一的），故由§3的不相交定理（定理 3·2）可知，在 $\delta m(l+n)>0$ 时(I)不存在极限环．定理证毕[1)]．

下面的工作就是要把定理 12·5 中的假定"$|\delta|$ 足够小"去掉，即要证：只要方程(I)存在极限环，它总是唯一的．这方面国内有[16, 195, 196, 197]等工作，到 1967 年已完全解决这一问题，但[196]与[197]分别到 1975 和 1978 年才发表．在苏联有[118]与[198]的工作．我们的证明方法说明，要解决(I)类方程的极限环

1) $\delta_m(l+n)>0$ 时(I)不存在极限环也可由微分方程的比较定理看出．例如，设 $m(l+n)>0$，则已知原点为 $(\mathrm{I})_{\delta=0}$ 的不稳定焦点，且方程无极限环．于是可知 $(\mathrm{I})_{\delta>0}$ 的原点也是不稳定焦点，且当 t 增加时从同一常点出发的 $(\mathrm{I})_{\delta>0}$ 的轨线常在 $(\mathrm{I})_{\delta=0}$ 的轨线的外侧，故前者也没有极限环．

的唯一性问题，[111]的唯一性定理已经够用了.

由于 $m\neq 0$ 是(I)类方程存在极限环的必要条件，故今后不妨设 $m=1$[1)]. 同时不失一般性，可设

$$m=1,\ l+n>0,\ \delta<0. \tag{12·24}$$

引理 12·1 当 1) $n>0,\ \delta+\dfrac{1}{2n}\leqslant 0$; 或 2) $n\leqslant 0,\ \delta(1+n\delta)\leqslant -l$; 或 3) $l\leqslant 0,\ \delta+n\leqslant 0$ 时，(I)无闭轨线与奇闭轨线.

【证】 1) 我们采取类似于§1定理1·13的办法，取

$$M(x,y)=\exp\left[\frac{1-4nl}{2n}\left(y+\frac{x}{2n}\right)\right],\ B(x,\ y)=2nM(x,\ y),$$

$$\begin{aligned}\overline{P}&=Q_2B-P_2M\\&=\exp\left[\frac{1-4nl}{2n}\left(y+\frac{x}{2n}\right)\right]\{2nx-(-y+\delta x+lx^2+xy+ny^2)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{Q}&=-P_2B\\&=-2n(-y+\delta x+lx^2+xy+ny^2)\exp\left[\frac{1-4nl}{2n}\left(y+\frac{x}{2n}\right)\right],\end{aligned}$$

于是由 Green 公式，如果(I)在原点外围存在闭或奇闭轨线 Γ，它必为正定向，故有

$$\oint_\Gamma \overline{P}\,dx+\overline{Q}\,dy=-\iint\limits_{\mathrm{int}\Gamma}\left(\frac{\partial\overline{P}}{\partial y}-\frac{\partial\overline{Q}}{\partial x}\right)dx\,dy.$$

但容易算出上式左边之值为

$$\oint_\Gamma (BQ_2-P_2M)P_2\,dt-BP_2\cdot Q_2\,dt=-\oint_\Gamma MP_2^2\,dt<0,$$

而右边之值为

$$-\iint\limits_{\mathrm{int}\Gamma}(1+2n\delta)M(x,y)\,dx\,dy>0,$$

矛盾，故 Γ 不存在[2)].

---

1) 为了研究任一二次系统，一般常可通过适当的 $x,\ y,\ t$ 的相似变换，而把方程(III)中某三个非零的系数固定于确定的数值.

2) 这一结果最先由[194]得到，但证明较繁，且有附加条件 $l>0$. 这里采用的是[27]的证法.

2) 先作变换 $y'=y+\delta$, $x'=x$, 再把 x', y' 仍记为 x, y, 则(I)变为

$$\frac{dx}{dt}=\delta(1+n\delta)-(1+2n\delta)y+lx^2+xy+ny^2,\ \frac{dy}{dt}=x,\quad (12\cdot25)$$

然后仿前取:

$$M(x,\ y)=\exp\left[\frac{1-4nl}{4n^2+k}(x+2ny)\right],\ B(x,\ y)=2nM(x,\ y),$$

$$N(x,\ y)=kM(x,\ y),\ k=\mu[\delta(1+n\delta)+l]-(1+2n\delta),$$

$$\mu>0\quad 且\quad 4n^2+k\neq0.$$

再取 $\bar{P}=Q_2'B-P_2'M$, $\bar{Q}=-P_2'B-NQ_2$, 其中 P_2', Q_2' 为 (12·25) 两方程的右方. 以后的证明与 1) 一样, 从略[1].

3) 当 $n>0$, $l\leqslant0$ 而 $\delta=0$ 时 $(\mathrm{I})_{\delta=0}$ 的轨线图见图 12·5 与 12·7. 由此可见, 从右边进入鞍点$\left(0,\frac{1}{n}\right)$的分界线在过鞍点且与分界线在此点相切的直线的下方. 今若 $\delta+n=0$, 则分界线在鞍点$\left(0,\frac{1}{n}\right)$的切线为 $ny+x=1$, 令 $V=ny+x$, 计算 V 沿(I)的轨线的改变量, 得

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{V=1}=(\delta+n)x+lx^2=lx^2\leqslant0.$$

由此可见, 当 δ 从零减少到 $-n$ 时, 上列两图中从右边进入$\left(0,\frac{1}{n}\right)$的分界线不但已转到从左边离开$\left(0,\frac{1}{n}\right)$的分界线的外边去, 而且已经转到直线 $ny+x=1$ 的上方去了, 所以这时极限环当然早已不存在了. 当 $\delta<-n$ 时情况更是如此. 引理证毕.

推论 $n>0$, $l\leqslant0$ 而 $n+l>0$ 时只要 $\delta\leqslant\frac{-1}{\sqrt{2}}$, 方程(I)必已不存在极限环.

【证】 因为 n 与 $\frac{1}{2n}$ 中必有一个不小于 $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

---

1) 这一结果最先在本书第一版中得到, 但证明很繁.

引理 12·2 设 $\delta<0,\ l>0,\ a>0,\ a-l<0$, 则方程

$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+lx^2+xy,\quad \frac{dy}{dt}=x+ay \tag{12·26}$$

当 $\delta+l=0$ 时不存在闭轨线.

【证】 作变换 $x=1-e^{-\bar{x}},\ y=\bar{y}$, 则 (12·26) 化为

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=-\bar{y}-l+le^{-\bar{x}},\quad \frac{d\bar{y}}{dt}=1-e^{-\bar{x}}+a\bar{y}.$$

再化为二阶方程, 得

$$\ddot{\bar{x}}+(le^{-\bar{x}}-a)\dot{\bar{x}}+(1-al)(1-e^{-\bar{x}})=0,$$

最后化到 Liénard 平面, 得到

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=-z+(a\bar{x}+le^{-\bar{x}}-l),\ \frac{dz}{dt}=(1-al)(1-e^{-\bar{x}}). \tag{12·27}$$

今设(12·27)存在闭轨线 Γ, 不妨设 Γ 是最靠近原点的那一条. 由于 $a-l<0$, 易见(0, 0)是(12·27)的稳定焦点或结点. 但是另一方面, 计算发散量沿着 Γ 积分一周的值, 得到

$$\oint_\Gamma(a-le^{-\bar{x}})dt=\oint_\Gamma(a-le^{-\bar{x}})dt-\oint_\Gamma l(1-e^{-\bar{x}})dt=\oint_\Gamma(a-l)dt<0,$$

即 Γ 亦须是稳定环, 不可能. 引理证毕.

引理 12·3 当 $l>0,\ n>0,\ \delta\leqslant-\frac{1}{l}$ 时方程

$$\frac{dx}{dt}=-y-F(x),\ \frac{dy}{dt}=g(x) \tag{12·28}$$

在半平面 $x<\frac{1}{n}$ 上不存在极限环, 其中

$$F(x)=\frac{-1}{l^2}[(lx+\delta l+1)e^{-lx}-\delta l-1],\ g(x)=(x-nx^2)e^{-2lx}.$$

【证】 当 $\delta=-\frac{1}{l}$ 时, (12·28)成为

$$\frac{dx}{dt}=-y+\frac{x}{l}e^{-lx},\ \frac{dy}{dt}=(x-nx^2)e^{-2lx}. \tag{12·29}$$

记
$$H(x,\ y)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x(s-ns^2)e^{-2ls}ds,$$

则 $H(x,\ y)=C$ 是一系包围(0, 0)的闭曲线, 它是方程组

$$\frac{dx}{dt}=-y,\ \frac{dy}{dt}=(x-nx^2)e^{-2lx} \tag{12·30}$$

的闭轨线族，沿着方程组(12·29)的轨线计算 $\frac{dH}{dt}$，得

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial x}\ \frac{dx}{dt}+\frac{\partial H}{\partial y}\ \frac{dy}{dt}=\frac{x^2}{l}(1-nx)e^{-3lx}>0,\ 当\ x<\frac{1}{n}.$$

故(12·29)不存在极限环. 由于方程组(12·28)可由(I)经变量代换转化过来[1]，而(I)关于参数 δ 构成广义旋转向量场，所以当 $\delta<-\frac{1}{l}$ 时(12·28)也不存在极限环. 引理证毕[2].

定理 12·6 对于任意的 $\delta,\ l,\ n$，方程(I)至多只能有一个极限环.

【证】 由前知可设(12·24)式成立，即 $l+n>0,\ \delta<0$. 下面分几种情况分别加以证明.

(一) $n=0$ 或 $l=0$ 的情况.

当 $n=0$ 时(I)成为

$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+lx^2+xy,\ \frac{dy}{dt}=x. \tag{12·31}$$

令 $x=1-e^{-x'}$，$y=-y'$，$t=-\tau$，则(12·31)变为

$$\frac{dx'}{d\tau}=-y'-[(\delta+l)e^{x'}-(\delta+2l)+le^{-x'}]=-y'-F(x'),$$

$$\frac{dy'}{d\tau}=1-e^{-x'}=g(x'),$$

这里 $g(x')=1-e^{-x'}$ 连续，$x'g(x')>0$ 当 $x'\neq 0$，又

$$G(\pm\infty)=\int_0^{\pm\infty}g(x)dx=+\infty.$$

又由 $f(x')=F'(x')=(\delta+l)e^{x'}-le^{-x'}$ 看出 $f(x')$ 连续，$f(0)=\delta<0$，而

$$\frac{d}{dx'}\left[\frac{f(x')}{g(x')}\right]=\frac{e^{-x'}[-\delta+(\delta+l)(e^{x'}-1)^2]}{(1-e^{-x'})^2}>0,$$

---

1) 见后面的方程(12·34).

2) 参看定理 12·5 证明中的脚注.

因为由引理 12·1 知道，当极限环存在时必须 $\delta+l>0$. 这样，$\frac{f(x')}{g(x')}$ 在 $(-\infty, 0)$ 与 $(0, +\infty)$ 中都是不减函数，由 § 6 定理 6·4 即得证极限环的唯一性[1).

当 $l=0$ 时(I)成为

$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+xy+ny^2, \quad \frac{dy}{dt}=x. \tag{12·32}$$

令 $x'=y$, $y'=x-\delta y-\frac{1}{2}y^2$, $\tau=-t$, 则(12·32)化为

$$\frac{dx'}{d\tau}=-y'-F(x'), \quad \frac{dy'}{d\tau}=g(x'), \tag{12·33}$$

其中 $F(x')=\delta x'+\frac{1}{2}x'^2$, $g(x')=x'-nx'^2$. 易见(12·33)若存在极限环，必位于半平面 $x<\frac{1}{n}$ 中，注意到 $1+n\delta>0$, 于是和 $n=0$ 的情况一样，容易验证 $f(0)=F'(0)=\delta<0$, $\frac{f}{g}$ 在 $(-\infty, 0)$ 与 $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ 中为不减函数. 这就证明了(12·33)，从而(12·32)至多只有一个极限环.

(二) $l>0$, $n>0$ 的情况.

在(I)中作变换

$$x=\bar{u}e^{lx'}, \ y=x', \ \frac{dt}{d\tau}=e^{-lx'},$$

可得 $$\frac{d\bar{u}}{d\tau}=(-x'+nx'^2)e^{-2lx'}+(\delta+x')\bar{u}\,e^{-lx'}, \ \frac{dx'}{d\tau}=\bar{u}.$$

再化为 x' 的二阶方程，得

$$\ddot{x}'=(-x'+nx'^2)e^{-2lx'}+(\delta+x')e^{-lx'}\dot{x}',$$

最后化到 Liénard 平面，并改 τ 为 $-\tau$, 得

$$\begin{cases}\frac{dx'}{d\tau}=-y'+\frac{l\,x'+\delta l+1}{l^2}\,e^{-lx'}-\frac{\delta l+1}{l^2}=-y'-F(x'),\\ \frac{dy'}{d\tau}=(x'-nx'^2)e^{-2lx'}=g(x').\end{cases} \tag{12·34}$$

---

1) 实际上我们用的只是它的特例，即[111]的唯一性定理，其条件见定理 6·4 后面的注意 1. 本书以后凡提到定理 6·4 时，如无特别声明，都是指[111]的唯一性定理.

(12·34)若有极限环必位于半平面 $x<\frac{1}{n}$中．这时有

$$f(0)=F'(0)=\delta<0,\ x'g(x')=x'^2(1-nx')e^{-2lx'}>0\ \text{当}\ x'\neq 0.$$

为了证明(I)至多只有一个极限环，只需证明在$(-\infty,0)$与$\left(0,\frac{1}{n}\right)$区间中有

$$\frac{d}{dx'}\left[\frac{f(x')}{g(x')}\right]=\frac{W(l,\ x')}{(x'-nx'^2)^2}e^{lx'}>0, \tag{12·35}$$

其中

$$\begin{aligned}W(l,\ x')&=-lnx'^3+(l+n-ln\delta)x'^2+(2n\delta+l\delta)x'-\delta\\&=(-\delta-x')(lx'-1)(nx'-1)+(1+n\delta)x'\\&=W_1(x')+W_2(x'),\end{aligned} \tag{12·36}$$

而 $W_1(x')=(-\delta-x')(lx'-1)(nx'-1)$, $W_2(x')=(1+n\delta)x'$.

为了证明(12·35)，除了 $x<\frac{1}{n}$, $l>0$, $n>0$ 以外，由于引理12·1 与引理12·3，只需在条件$-\frac{1}{n}<\delta<0$及$-\frac{1}{l}<\delta<0$之下来证明 $W(l,\ x')>0$ 即可．

i) 当 $x'\leqslant 0$ 时，由(12·36)的第一行立刻看出 $W(l,\ x')>0$.

ii) 当 $0<x'\leqslant-\delta$ 时，由于 $W_1(x')>0$, $W_2(x')>0$，故

$$W(l,\ x')>0.$$

iii) 当 $-\delta<x'<\frac{1}{n}$ 时，注意到

$$W(l,\ -\delta)=W(0,\ -\delta)=-\delta(1+n\delta)>0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x'}W(l,\ -\delta)=-l\delta(1+n\delta)>\frac{\partial}{\partial x'}W(0,\ -\delta)=0,$$

故有 $\varepsilon>0$ 使当$-\delta<x'<-\delta+\varepsilon$ 时成立

$$W(l,\ x')>W(0,\ x'), \tag{12·37}$$

但$W(l,\ x')-W(0,x')=lx'(-\delta-x')(nx'-1)$只有三个零点$x'=0$, $x'=-\delta$ 和 $x'=\frac{1}{n}$. 因此在整个区间$-\delta<x'<\frac{1}{n}$中(12·37)都成立．显见

$$W(0, x') = nx'^2 + 2n\delta x' - \delta = n(x'+\delta)^2 - \delta(1+n\delta) > 0,$$

故当 $-\delta < x' < \dfrac{1}{n}$ 时有 $W(l, x') > 0$.

综合 i), ii), iii), 即得(12·35).

(三) $n<0$ 的情况.

在(I)中作变换

$$x = x' + \lambda y', \quad y = y', \tag{12·38}$$

其中

$$\lambda = \frac{-1+\sqrt{1-4nl}}{2l} > 0. \tag{12·39}$$

是方程

$$l\lambda^2 + \lambda + n = 0 \tag{12·40}$$

的正实根, 则(I)变为

$$\begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = (\delta-\lambda)x' + (\delta\lambda - \lambda^2 - 1)y' + lx'^2 + (2l\lambda+1)x'y', \\ \dfrac{dy'}{dt} = x' + \lambda y'. \end{cases} \tag{12·41}$$

再令

$$x_1 = \frac{2\lambda l+1}{\lambda^2 - \delta\lambda + 1}x', \ y_1 = \frac{2\lambda l+1}{\sqrt{\lambda^2-\delta\lambda+1}}y', \quad \tau = \sqrt{\lambda^2-\delta\lambda+1}\,t, \tag{12·42}$$

则方程(12·41)又变为

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{d\tau} = \dfrac{\delta-\lambda}{\sqrt{\lambda^2-\delta\lambda+1}}x_1 - y_1 + \dfrac{l\sqrt{\lambda^2-\delta\lambda+1}}{2\lambda l+1}x_1^2 + x_1y_1 \\ \qquad = -y_1 + \delta' x_1 + l' x_1^2 + x_1 y_1, \\ \dfrac{dy_1}{d\tau} = x_1 + \dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-\delta\lambda+1}}y_1 = x_1 + a' y_1, \end{cases} \tag{12·43}$$

其中

$$\begin{cases} \delta' = \dfrac{\delta-\lambda}{\sqrt{\lambda^2-\delta\lambda+1}} < 0, \ l' = \dfrac{l\sqrt{\lambda^2-\delta\lambda+1}}{2\lambda l+1} > 0, \\ a' = \dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-\delta\lambda+1}} > 0. \end{cases} \tag{12·44}$$

注意

$$\delta'+l'=\frac{(\lambda l+1)\delta+(l+n)}{(2\lambda l+1)\sqrt{\lambda^2-\delta\lambda+1}},\tag{12·45}$$

当 $\delta=0$ 时有 $\delta'+l'>0$. 又

$$\frac{\partial}{\partial\delta}(\delta'+l')=\frac{\lambda^3 l-\lambda^2 l\delta+3\lambda l+\lambda^2-\delta\lambda+2}{2(2\lambda l+1)(\lambda^2-\delta\lambda+1)^{3/2}}>0.\tag{12·46}$$

可见 $\delta'+l'$ 是 δ 的单调递增函数，当 δ 从 0 变为负值时，$\delta'+l'$ 单调减少. 这时

$$a'-l'=\frac{\lambda l\delta-(l+n)}{(2\lambda l+1)\sqrt{\lambda^2-\delta\lambda+1}}<0.$$

由引理12·2及(12·45)式知道，当 $\delta=-\dfrac{l+n}{\lambda l+1}$ 时方程 (I) 不存在闭轨线. 但(I)关于参数 δ 构成广义旋转向量场，故 (I) 当 $\delta\leqslant-\dfrac{l+n}{\lambda l+1}$ 时都不存在闭轨线[1]. 于是由(12·46)知道，(12·43)当 $\delta'+l'\leqslant 0$ 时都不存在闭轨线. 因此以后要研究(12·43)的极限环的唯一性，不妨假设其中 $\delta'+l'>0$.

为了要应用§6的定理6·4来证明方程(I)的极限环的唯一性，可先在(12·43)中令 $y_1=-\bar{y}$, $x_1=\bar{x}$, 并将 τ 改号，使得原点成为不稳定，便得

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau}=-\bar{y}-\delta'\bar{x}-l'\bar{x}^2+\bar{x}\bar{y},\quad \frac{d\bar{y}}{d\tau}=\bar{x}-a'\bar{y}.\tag{12·47}$$

然后象引理12·2中对方程(12·26)那样，在(12·47)中作同样的变量代换，再化为二阶方程，最后化到 Liénard 平面，即得(仍记自变数为 t, 因变数为 x, y)

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y-[(\delta'+l')e^x+l'e^{-x}+a'x-\delta'-2l']=-y-F(x),\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=(1-a'l')(1-e^{-x})+a'(\delta'+l')(e^x-1)=g(x).\end{cases}\tag{12·48}$$

1) 参看定理12·5证明中的脚注.

现在只要验证§6定理6·4的条件是否满足就好了，我们有

$$f(x)=(\delta'+l')e^{x}-l'e^{-x}+a',\ f(0)=a'+\delta'<0,\quad (12\cdot 49)$$

这里 $f(x)=F'(x)$. 又

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{c}(1-2a'l')(\delta'+l')(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}})^2\\ +(a'l'-1)(a'+\delta')e^{-x}-a'(\delta'+l')(a'+\delta')e^{x}\end{array}\right\}}{[(1-e^{-x})(1-a'l')+a'(\delta'+l')(e^{x}-1)]^2}>0.\quad (12\cdot 50)$$

因为

$$\delta'+l'>0,\ 1-2a'l'=\frac{1}{2\lambda l+1}>0,\ a'l'-1=\frac{-\lambda l-1}{2\lambda l+1}<0,\ a'+\delta'<0.$$

此外，由 $g(x)=(1-e^{-x})(1-a'l'+a'(\delta'+l')e^{x})$ 知 $g(x)=0$ 的轨迹为一铅直直线 $x=0$，故 $xg(x)>0$ 当 $x\neq 0$. 综上所述，即知[111]的唯一性定理的一切条件都满足.

（四）$l<0$ 的情况.

这时仍取 $\lambda(<0)$ 如(12·39)式所示. 那末从(12·41)式一直到(12·49)式都照样能成立. 例如，变换(12·42)仍有意义，因为 $\lambda^2-\delta\lambda+1$ 当 $|\delta|$ 甚小时为正，而当 $\lambda^2-\delta\lambda+1=0$ 时方程(12·41)有过原点的积分直线 $x'=0$，显然已不存在闭轨线了. 因此在研究极限环的唯一性时不妨设

$$\lambda^2-\delta\lambda+1>0 \text{ 或 } \delta>\frac{\lambda^2+1}{\lambda}.\quad (12\cdot 51)$$

利用(12·51)易见

$$\lambda^3 l-\lambda^2 l\delta+3\lambda l+\lambda^2-\delta\lambda+2=(\lambda-\delta)(\lambda^2 l+\lambda)+2(1+2\lambda l)-\lambda l$$

$$=-n(\lambda-\delta)+2(1+2\lambda l)-\lambda l=-\lambda(l+n)+2(1+2\lambda l)+n\delta$$

$$>-\lambda(l+n)+\frac{n\lambda^2+n}{\lambda}+2(1+2\lambda l)$$

$$=\frac{n-l\lambda^2}{\lambda}+2(1+2\lambda l)=1+2\lambda l>0.$$

故(12·46)式亦成立. 最后，由于 $a'-l'<0$ 显然成立，故引理12·2也成立. 根据引理12·1的结果知可设 $\delta'>-\frac{1}{2n}$，这时(12·50)式

右边的分子有正的最小值，从而(12·50)式也成立．定理证毕．

有了这个定理再加上旋转向量的理论，立刻知道当 $\delta m(l+n)<0$，且 $|\delta|$ 从 0 零大时，因原点改变稳定性而产生的唯一极限环将单调扩大，最后在 δ 取值 $\delta^*=f(l, m, n)$ 时遇有限远或无限远鞍点成为分界线环而消失．由图 12·1—12·7 诸情况容易看出：只有在 $n\leqslant 0$ 的时候分界线环上有两个无限远鞍点和一段赤道，而当 $n>0$ 时分界线环上只有一个有限远鞍点 $\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$.

至于函数 $\delta^*=f(l, m, n)$ 是代数函数还是超越函数，分界线环是代数曲线还是超越曲线，这两问题都远未解决．在这方面苏联 И. Г. Розет[199] 做了一些数值计算，他在 $n\neq 0$ 时把 $(\mathrm{I})_{m=1}$ 化为

$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+px^2+qxy-y^2,\ \frac{dy}{dt}=x\ \left(p=-\frac{1}{n}, q=-\frac{1}{n}\right),$$

然后根据大量数值计算的结果画出分枝曲线图 12·8($n=0$ 的情况)和分枝曲面图 12·9．但即使在 $n=0$ 的情况他也没有得出 $\delta=f(l)$ 曲线的一个近似表达式．

至于用定性方法得出保证(I)存在极限环的 δ 的变动范围的结果也不多，见本节习题．

注意 1：(I) 类方程可直接化为二阶非线性方程，因此它在实用上的价值最大．

注意 2：由定理 12·4 可知(I) 类方程的焦点最多只能是一阶细焦点，但(II)类方程却可以有三阶细焦点，见习题 4．

注意 3：苏联数学家在[200]和[201]中又对定理 12·4 给以

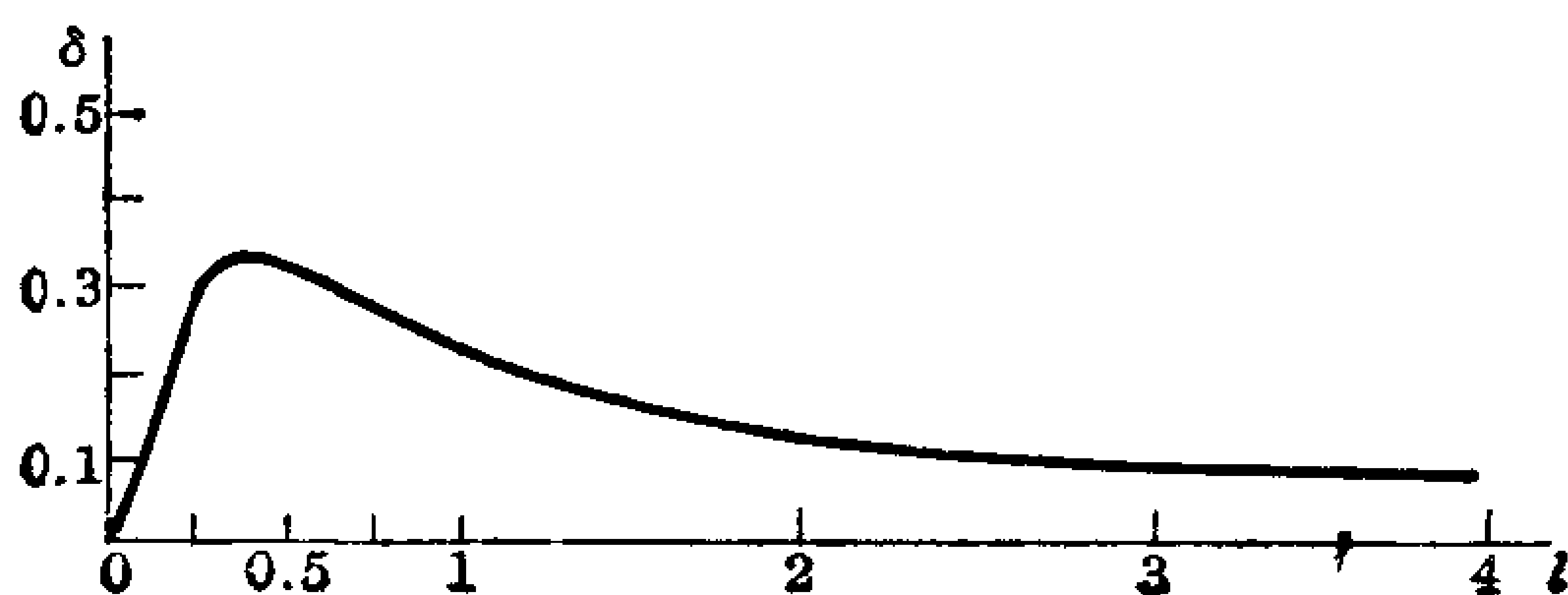


图 12·8

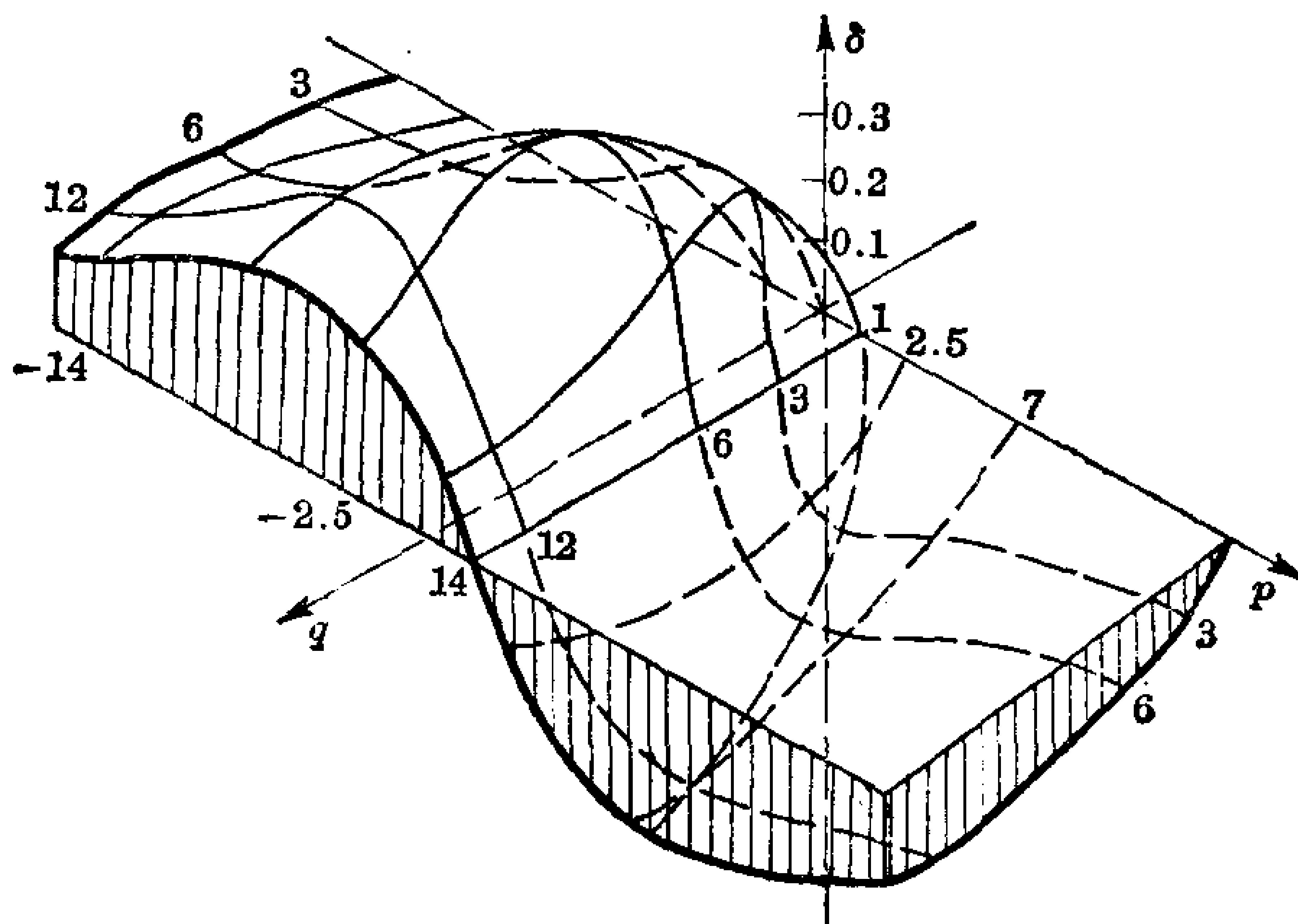


图　12·9

新的证明．这种证明不存在闭轨线的方法后来又在[202]和[203]中得到推广和应用．

习　　题

1．证明(12·4)式前面的论断．

2．讨论当(12·9)只有零实根时两种分类法之间的关系，又当 $m=n=0$ 时两种分类法之间的关系．

3．证明定理 12·1．

4．利用 § 9 的 Баутин 方法证明(II)类方程在原点附近有可能出现三个极限环．

5．证明定理 12·2 的(12·17)可以改用(12·20)来代替．

6．证明图 12·1 到图 12·7 的正确性，并画出 $m(l+n)=0$ 时 $(\mathrm{I})_{\delta=0}$ 的全局图形．

7．补证引理 12·1 的结论 2)．

8．设在(I)中 $l=0,\ m=1,\ \delta<0$，且 $0<n\leqslant\frac{1}{3}$，$\sqrt{\frac{-\delta}{n}}\leqslant\frac{n}{2}$，则在原点附近存在不稳定极限环．

9．设在 $(\mathrm{I})_{m=1}$ 中有 $4ln=1$，先证当 $\delta=-2l=-\frac{1}{2n}$ 时 $(\mathrm{I})_{m=1}$ 已不存在极限环，然后再证极限环存在时必为唯一[195]．

10．证明当 $\alpha=\beta=0$ 时方程 (III) 不存在极限环，又 $m=n=0$ 时则有可能存在极限环．

§13. 第II类方程无极限环时轨线的全局结构[205]

在上节中我们已经看到，关于第I类方程最主要的是两个问题，一个是确定 $P_2(x, y)$ 中 x 的系数 δ 的变动范围，以保证极限环的存在；另一个是极限环的唯一性问题．至于第II类方程，除了上述两个问题以外，还有另外三个重要的问题，即：1）已知方程不存在闭轨线时，应如何确定其轨线的全局结构？2）当方程有两个指标为+1的奇点时，两奇点附近的极限环的产生与消失是怎样彼此互相影响的？3）当一个奇点外围有可能出现多于一个极限环时，环的唯二性，唯三性等问题．本节先研究第一个问题．首先，易见成立：

定理 方程

$$\frac{dx}{dt}=-y+mxy+ny^2, \quad \frac{dy}{dt}=x(1+ax) \tag{13·1}$$

当 $mn=0$ 时有一个或两个中心点，当 $mn\neq0$ 时无闭轨线与奇闭轨线．

证明时可取 Dulac 函数

$$B(x, y)=\frac{1}{1-mx}, \tag{13·2}$$

详情从略，作为习题．

在 $mn=0$ 时(13·1)的轨线的全局结构容易确定（$m=0$ 时见图13·5，$n=0$ 时作为习题）．现在假设 $mn\neq0$，于是经过适当的 x, y, t 的仿射变换可设 $n=-1$，$a<0$．这样就得到方程

$$\frac{dx}{dt}=-y(1+y-mx), \quad \frac{dy}{dt}=x(1+ax). \tag{13·3}$$

这方程有四个奇点：$O(0, 0)$是焦点，当 $m>0$ 时为稳定，$m<0$ 时

为不稳定；$M(0,\ -1)$是鞍点，此外还有

$$N\left(-\frac{1}{a},0\right) \text{ 和 } R\left(-\frac{1}{a},-\frac{a+m}{a}\right).$$

容易算出(13·3)在点N的一次近似方程的特征根是 $\pm\sqrt{\frac{a+m}{a}}$，因此当$m<-a$时N是鞍点，从而R是焦点或结点，位于N下方；当$m=-a$时$R=N$成为高阶奇点；当$m>-a$时N是焦点，R是鞍点，位于N上方。下面先就$m<-a$的情况来研究(13·3)的轨线的全局结构。

首先，研究直线$\overline{MN}$：

$$x+\frac{y}{a}=-\frac{1}{a}$$

上轨线的穿过方向。令$U=x+\frac{y}{a}$，则在$\overline{MN}$上有

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dt}&=\left(x+\frac{y}{a}+\frac{1}{a}\right)(x-ay)+\left(m-\frac{1}{a}+a\right)xy\\&=\left(m-\frac{1}{a}+a\right)xy,\end{aligned}$$

由此可见，当$m=\frac{1}{a}-a$时$\overline{MN}$是轨线，而当$m\neq\frac{1}{a}-a$时此直线被两奇点M与N分为三段，在每一段上轨线都有相同的穿过方向。

其次，研究无限远奇点。将(13·3)化为齐次坐标，再令$x=1$，$\frac{dt}{d\tau}=z$，可得方程

$$\frac{dz}{d\tau}=z(yz+y^2-my),\quad \frac{dy}{d\tau}=z+a+y^2z+y^3-my^2. \tag{13·4}$$

由此可见，无限远奇点$A_i(1,\ y_i,\ 0)$的y坐标满足方程

$$y^3-my^2+a=0, \tag{13·5}$$

当$a(27a-4m^3)<0$或$27a>4m^3$时(13·5)有三个相异的实根，对应的无限远奇点为$A_i(1,\ y_i,\ 0)\ (i=1,\ 2,\ 3)$，易见应有

$$y_1<y_2<0<y_3.$$

若 $27a=4m^3$，则 $A_1=A_2$ 成为无限远高阶奇点；若 $27a<4m^3$，则 A_1 与 A_2 消失，只剩下一个 A_3.

容易算出在奇点 A_i 的一次近似方程的两个特征根是

$$\lambda_1=y_i^2-my_i,\quad \lambda_2=3y_i^2-2my_i.$$

利用方程(13·5)可以看出

$$\lambda_1=-\frac{a}{y_i}<0 \text{ 对 } i=1,\ 2;\ >0 \text{ 对 } i=3. \tag{13·6}$$

又 λ_2 表示(y,σ)平面上的曲线

$$\sigma=y^3-my^2+a\quad (a<0,\ m<-a)$$

在它和 y 轴的交点$(y_i,0)$处的斜率，故知当 $m<0$ 时有

$$\lambda_2>0 \text{ 对 } i=1,\ 3;\ <0 \text{ 对 } i=2. \tag{13·7}$$

当 $m\geqslant 0$ 时只有一个 $A_3(1,y_3,0)$，对它有 $\lambda_2>0$. 由(13·6)，(13·7)两式可知 A_1 是鞍点，A_2 是稳定结点，A_3 是不稳定结点.

最后，研究直线 $\overline{MA_i}$ 上轨线的穿过方向，此直线的方程是

$$y_ix-y-1=0.$$

令 $V=y_ix-y$，则在 $\overline{MA_i}$ 上有：

$$\frac{dV}{dt}=(y_ix-y-1)\left(-\frac{a}{y_i}+y_iy\right)+\left(my_i-\frac{a}{y_i}-y_i^2\right)xy$$
$$-\left(1+\frac{a}{y_i}\right)x=-\frac{y_i+a}{y_i}x. \tag{13·8}$$

由此可见，当且仅当 $y_i=-a$，亦即 $y_3=-a>0$ 时 $\overline{MA_i}$ 才是方程(13·2)的轨线，这时 $-a$ 应满足方程(13·5)，从而 $m=\dfrac{1}{a}-a$，即 $\overline{MA_3}$ 与 $\overline{MN}$ 在 $m=\dfrac{1}{a}-a$ 时重合成为轨线. 要判定(13·8)右边的符号，注意 y_i 所满足的方程 (13·5)可以改写为

$$(y_i+a)^3-(3a+m)(y_i+a)^2+(3a^2+2am)(y_i+a)$$
$$-a^2\left(m-\frac{1}{a}+a\right)=0.$$

在条件 $m<-a$ 之下有 $3a+m<0$，$3a^2+2am>0$，由此可见

1. 当$m<\frac{1}{a}-a$时$y_i+a<0$对$i=1, 2, 3$;

2. 当$m>\frac{1}{a}-a$时$y_1+a<0$, $y_2+a<0$, $y_3+a>0$.

这样$\overline{MA_i}$上轨线的穿过方向就可由(13·8)来确定.

此外，还可确定$m\neq\frac{1}{a}-a$时，N, R与诸直线$\overline{MA_i}$的相对位置如下:

1 当$m>\frac{1}{a}-a$时N在$\overline{MA_2}$与$\overline{MA_3}$之间;

2. 当$m<\frac{1}{a}-a$时N在$\overline{MA_3}$的上方;

3. R恒在一切$\overline{MA_i}$的下方.

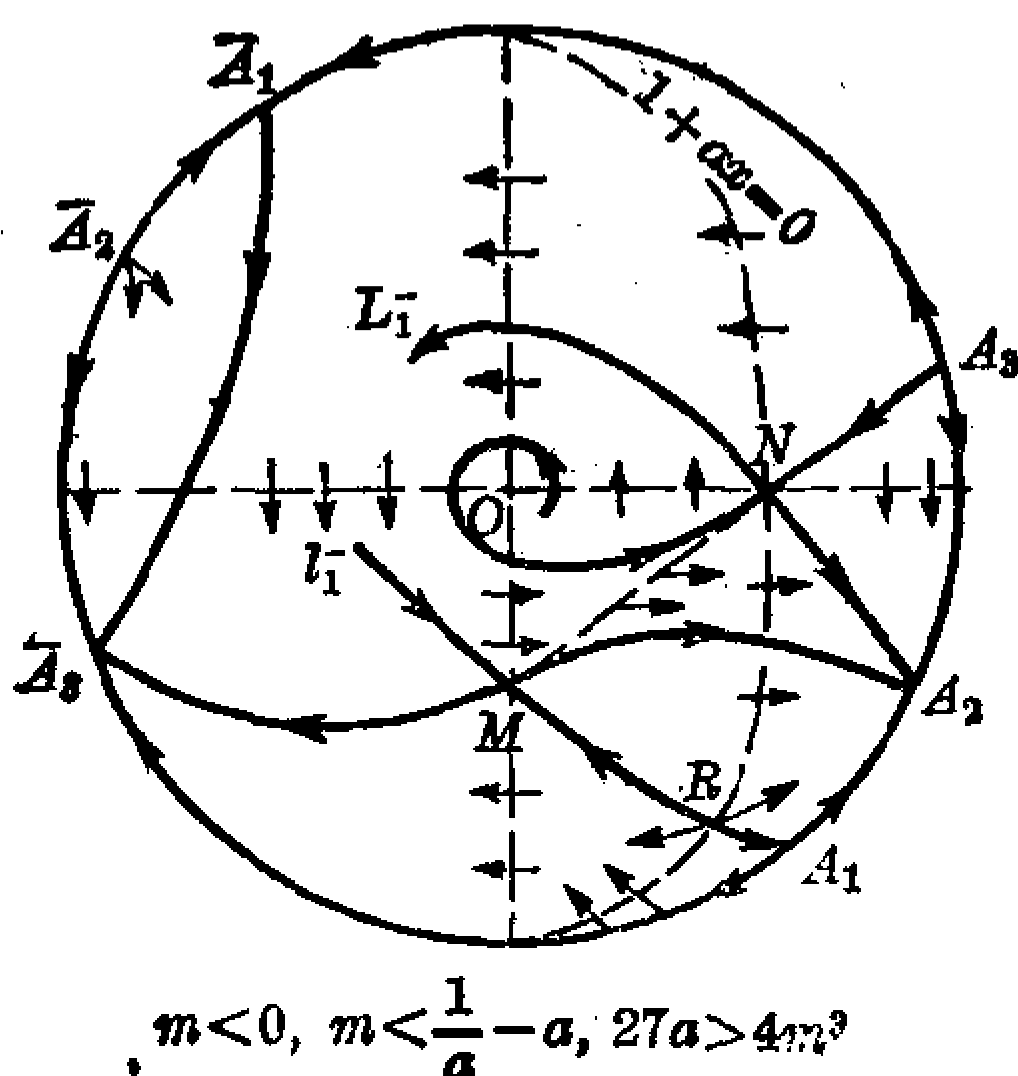
图 13·1 所画的就是

$$m<\frac{1}{a}-a,\ 27a>4m^3$$

时的轨线分布情况. 利用等倾线

$$P_2(x, y)=0,\ Q_2(x, y)=0$$

以及诸直线$\overline{MN}$, $\overline{MA_i}$上轨线的穿过方向，可以把经过鞍点M, N, A_1, $\overline{A}_1$的分界线的去向完全确定，除了两条以外. 例如从M出发进入右半平面的分界线必定夹在$\overline{MA_3}$与$\overline{MA_2}$之间，因为如果它在$\overline{MA_3}$的上方(或在$\overline{MA_2}$的下方)，那末它的下方(上方)邻近的轨线亦将进入$\overline{MA_3}$的上方(或$\overline{MA_2}$的下方)，这是不可能的. 于是这条分界线最后就必进入A_2. 此外，从右上方进入N的分界线必定来自A_3，从右下方进入M以及进入A_1的分界线必定来自R，从N向右下方出去的分界线必定进入A_2，从M向左下方出去的分界线以及从$\overline{A}_1$出来的分界线都应进入



$m<0$, $m<\frac{1}{a}-a$, $27a>4m^3$

图 13·1

$\bar{A}_3$, 这些都是很显然的. 现在我们来证明: 从左下方进入 N 的分界线必定来自 O. 因若来自 A_3, 则从 N 向左上方出去的分界线只能绕向 O, 但 O 当 $m<0$ 时为不稳定奇点, 因而在 O 外围将出现稳定极限环, 这是不可能的. 其次, 点 N 左方两分界线不可能重合而构成包围点 O 的分界线环, 因为在定理 12·1 的附注 2 中已说过, 方程(13·3)不存在奇异闭轨线[1]. 否定了上述两种可能性, 并注意 $\overline{MN}$ 上轨线的穿过方向, 就可知道自左下方进入 N 的分界线必定来自 O.

为了确定方程(13·3)的轨线的全局结构, 我们还必须知道从 N 向左上方出去的分界线与自左上方进入 M 的分界线的相对位置. 利用前面所说的方法, 在条件

$$m<\frac{1}{a}-a,\ 27a>4m^3$$

之下我们无法肯定究竟它们的相对位置是怎样的. 在这里存在着两种可能性, 即:

1. 在条件 $m<\frac{1}{a}-a,\ 27a>4m^3$ 之下, 这两条分界线的相对位置实际上是完全确定了的, 不过我们找不到方法来证明罢了.

2. 在条件 $m<\frac{1}{a}-a,\ 27a>4m^3$ 之下, 这两条分界线的相对位置确实还可能出现三种不同的情况.

---

1) 我们就这一具体情况来把不存在奇异闭轨线的证明说得更清楚一些. 比较方程(13·3)的轨线在两点 $F_1(x, y)$ 与 $F_2(x, -y)$ 的斜率的绝对值, 其中 $y>0$, 且 F_1, F_2 都在直线 $1-mx+y=0$ 的上方, 可得

$$\left|\frac{dy}{dx}\right|_{F_1}=\frac{|x(1+ax)|}{y(1+y-mx)}<\frac{|x(1+ax)|}{y(1-y-mx)}=\left|\frac{dy}{dx}\right|_{F_2}.$$

因此根据比较定理就可知道, 对于直线 $1-mx+y=0$ 上方的闭轨线或奇异闭轨线 Γ, Γ 位于 x 轴上方的部分关于 x 轴的对称线将全部包含于 Γ 位于 x 轴下方的部分与 x 轴之间, 设 G 为 Γ 的内域, 则易见此时应有

$$\iint\limits_G\left(\frac{\partial P_2}{\partial x}+\frac{\partial Q_2}{\partial y}\right)dxdy=\iint\limits_G my\,dx\,dy>0,$$

这是和 Bendixson 定理相矛盾的, 故 Γ 不存在.

到底是1对还是2对呢？这就是本节所要解决的第一个问题.

在解决这问题之前，我们先来看一下当 m 与 a 满足其他一些类似的条件时，方程(13·3)的轨线的全局结构[1]，用和前面一样的办法可以画出在条件

$$\frac{1}{a}-a<m<0,\quad 27a>4m^3$$

之下的全局结构图(图13·2)，这时没有出现象图13·1的那类问题，主要的原因是由于线段 $\overline{MN}$ 上轨线的穿过方向与图13·1不同了. 仿此，可以画出

$$m=\frac{1}{a}-a<0,\quad 27a>4m^3$$

时轨线的全局图形，这只要在图13·2中把 $\overline{MN}$ 改为轨线就可以了，其他分界线的去向都与图13·2一样，故不另画.

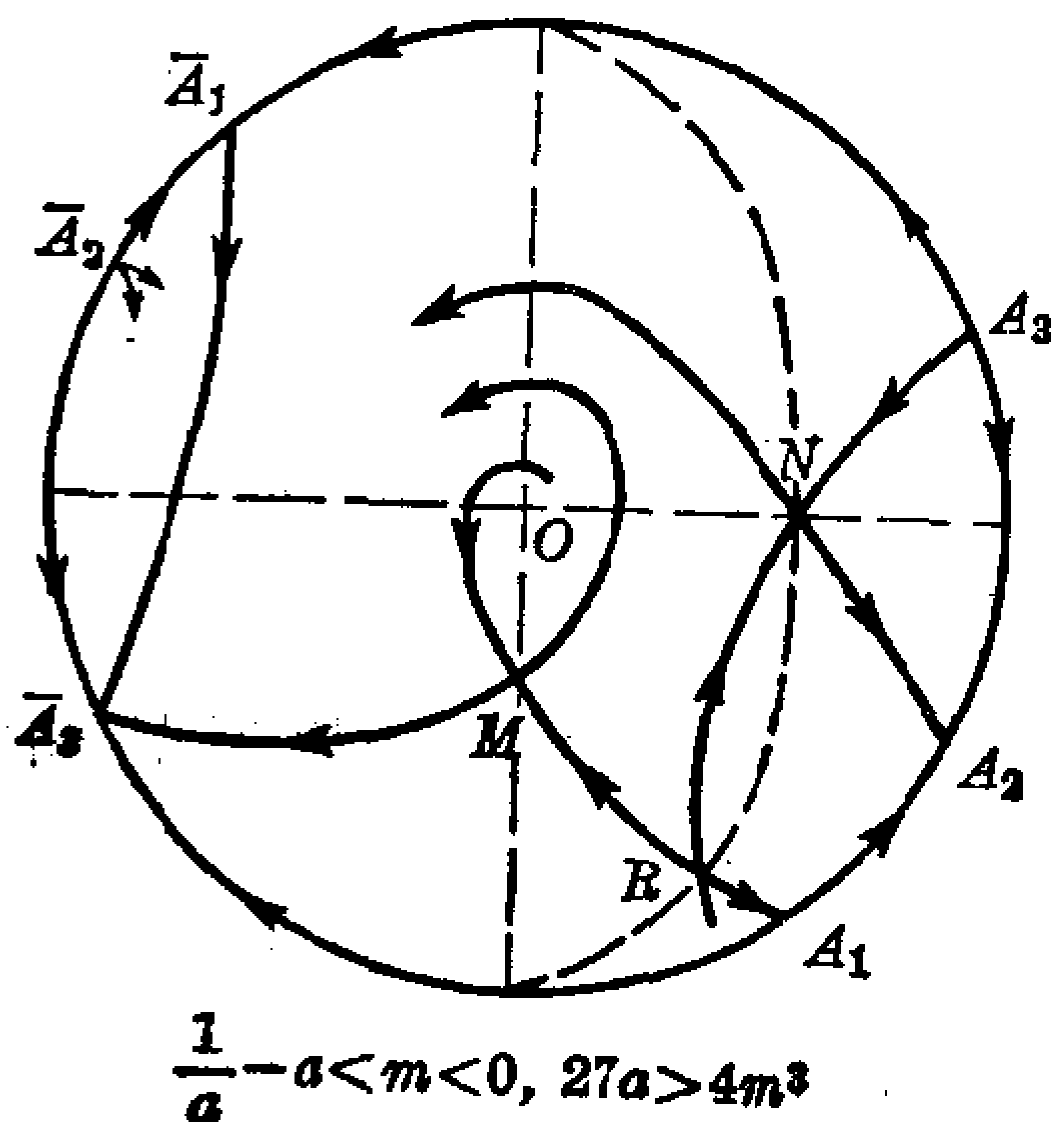


图 13·2

若在以上三种情况中保持其余的不等式，而把 $27a>4m^3$ 改为

$$27a=4m^3,$$

那末对应的全局结构图就可由原来的图形中令 $A_1=A_2$ 而得到，这时 $A_1=A_2$ 是半鞍结点.

若再改 $27a=4m^3$ 为

$$27a<4m^3$$

(但仍设 $m<0$)，则 $A_1=A_2$ 消失，这时在第四象限中就产生从 N 出来的分界线与进入 M 的分界线的相对位置应如何确定的问题. 但是由于现在 R 是不稳定焦点或结点，又已知方程(13·3)没有闭

1) 关于这些条件的可共存性．请参看后面的图13·11.

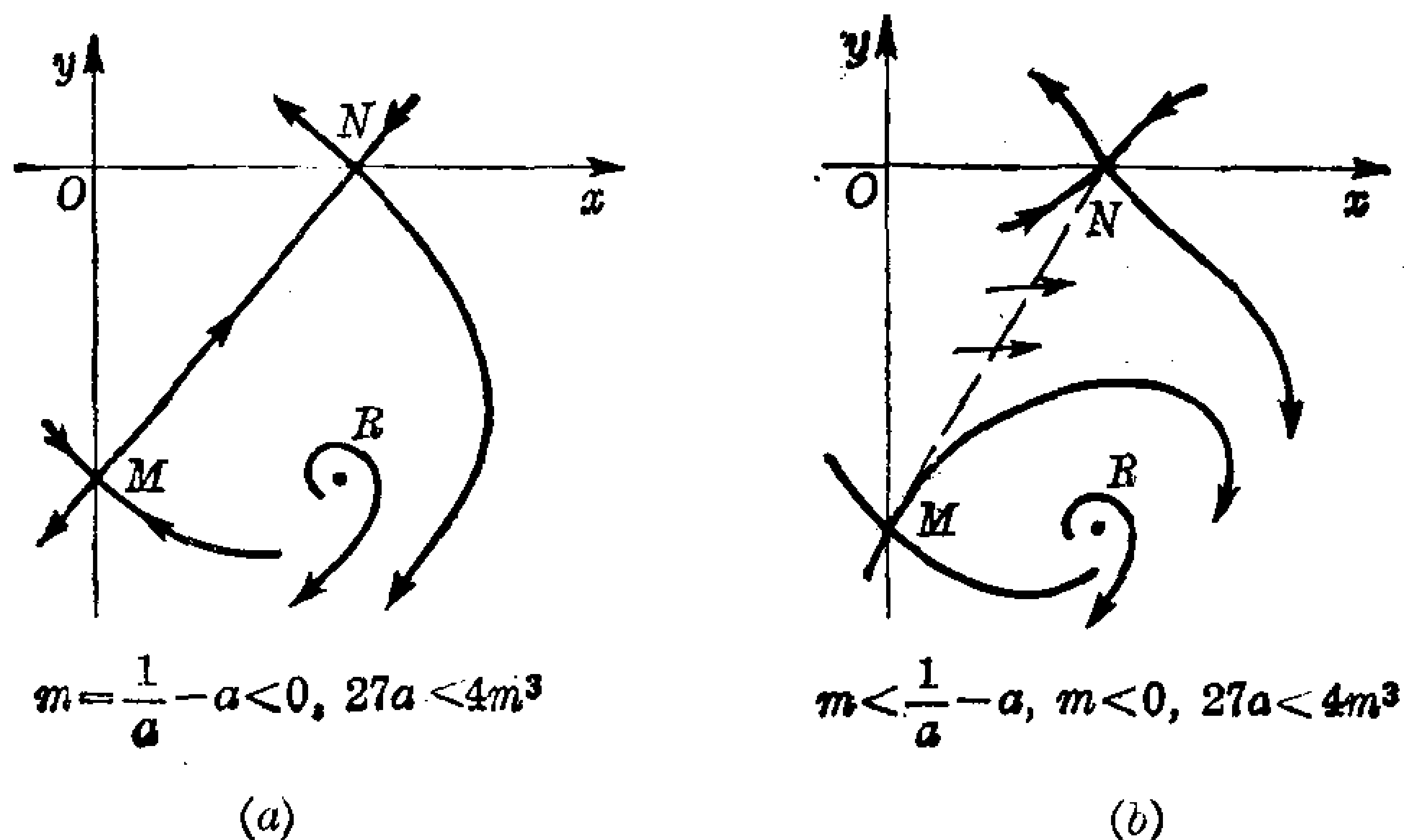
轨线 所以在$m<\frac{1}{a}-a$时这两分界线的相对位置仍可确定，如图13·3(a)，13·3(b)所示，只有

$$\frac{1}{a}-a<m<0,\quad 27a<4m^3$$

的情况才产生上述两分界线的相对位置的问题.

为了叙述方便计，经过M的四条分界线记以l_1^+，l_2^+，l_1^-，l_2^-，经过N(当$m<-a$)或R(当$m>-a$)的四条分界线记以L_1^+，L_2^+，L_1^-，L_2^-，如图13·4所示.

现在改条件$m<0$为$m=0$，则方程(13·3)有两个中心点，一



$m=\frac{1}{a}-a<0$, $27a<4m^3$ (a)　　$m<\frac{1}{a}-a$, $m<0$, $27a<4m^3$ (b)

图 13·3

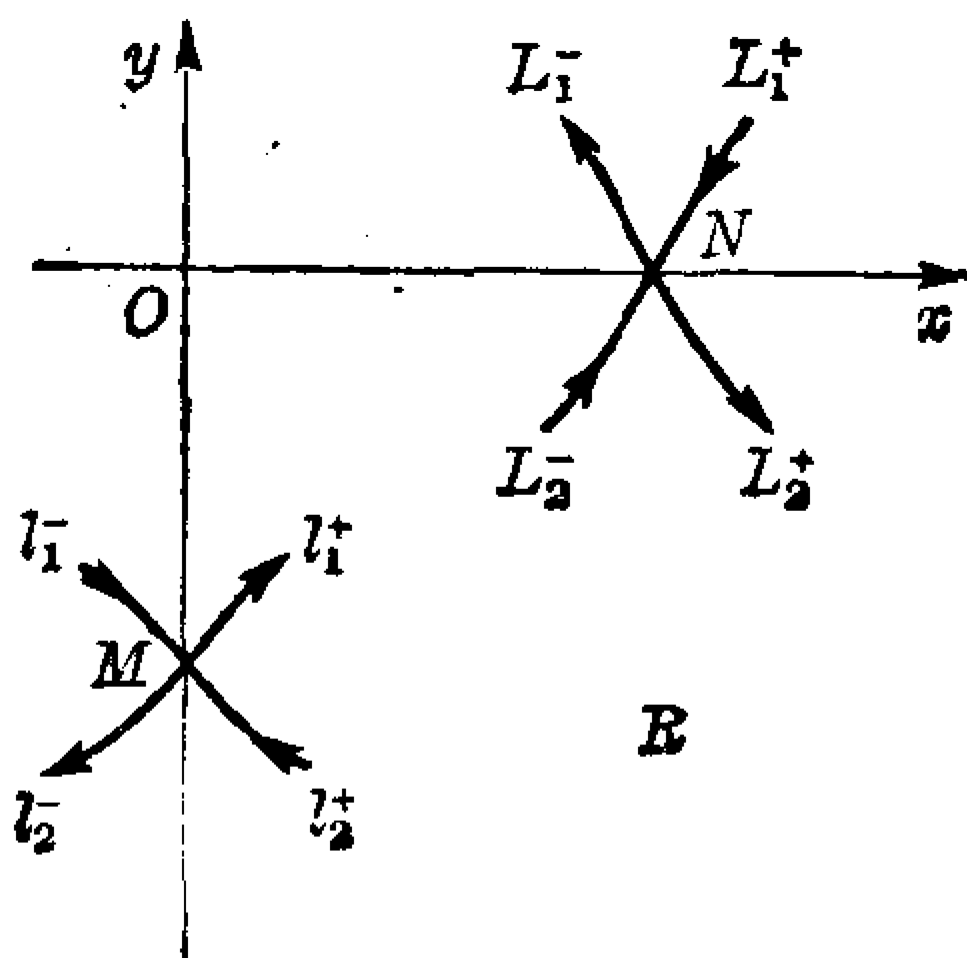


图 13·4

个无限远奇点 A_3. 条件 $m \leqslant \frac{1}{a} - a$ 成为 $a \leqslant -1$. 图 13·5(a), (b), (c) 中画出的就是 $m=0$; $a<-1$, $a=-1$ 和 $a>-1$ 等三种情况下方程(13·3)的全局结构图.

其次, 再设 $0<m<-a$, 这时应有 $27a<4m^3$, 但 $a-\frac{1}{a}$ 与 m 的大小关系仍有三种可能. 由于 O 与 R 的稳定性都已改过, 与图 13·1, 13·2 对应的现在有图 13·6, 13·7. 图 13·6 中只有 L_2^+ 与 l_2^+ 的相对位置不能确定, 图 13·7 中只有 L_1^- 与 l_1^- 的相对位置不能确

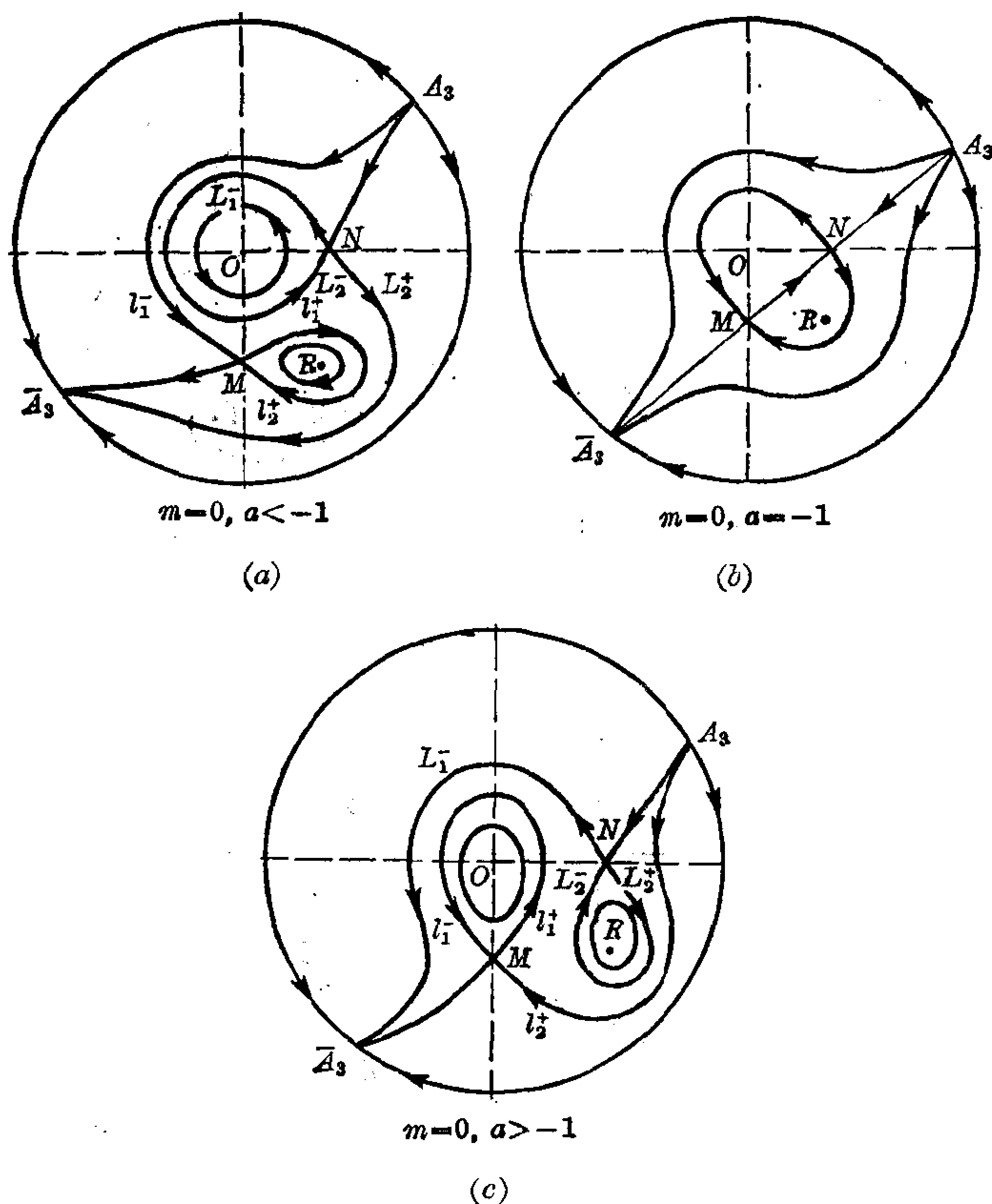


图 13·5

定. 但若 $m=\frac{1}{a}-a$, 则轨线的全局结构可以完全确定, 如图 13·8 所示.

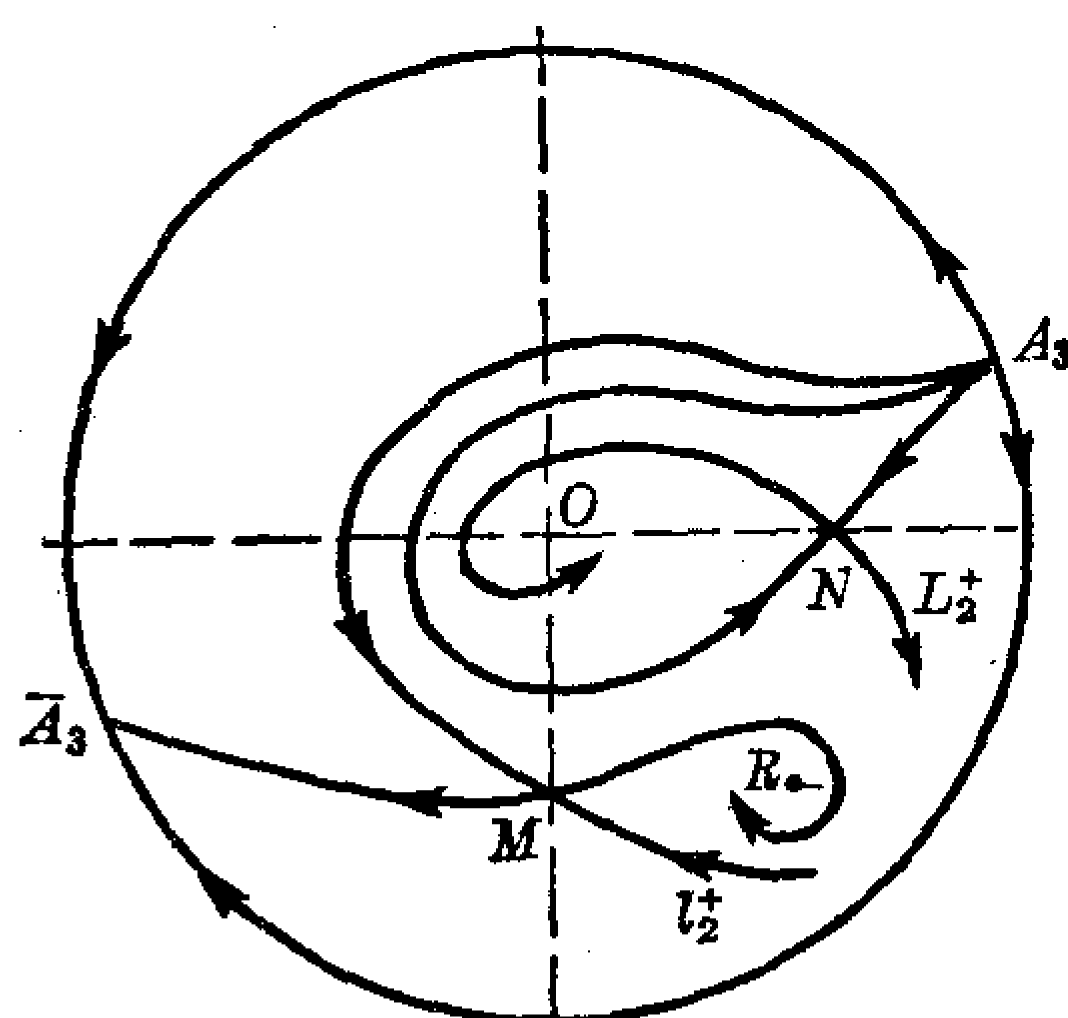
若设 $m=-a$, 则 $R=N$ 为高阶奇点, 这时必定成立

$$m>\frac{1}{a}-a,\ 27a<4m^3,$$

因此只有一个图 13·9, 其中 L_1^- 与 l_1^- 的相对位置不能确定.

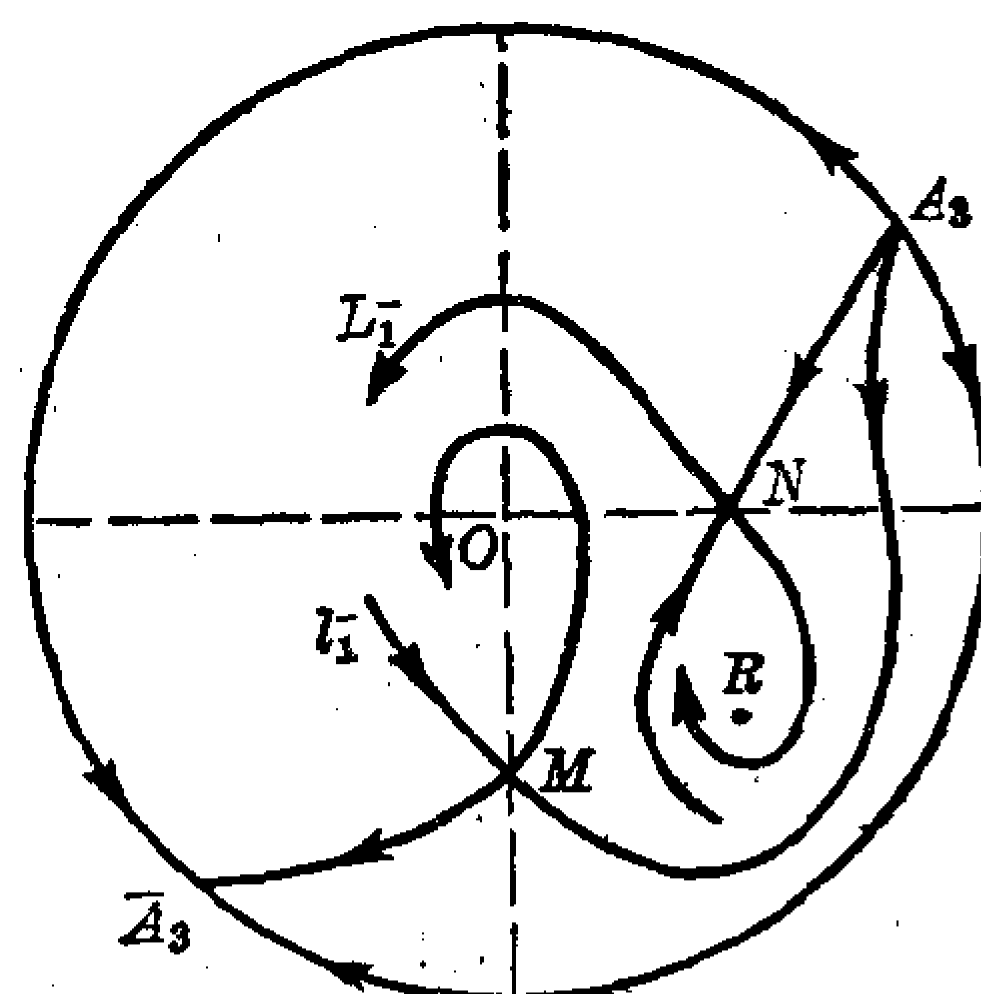
最后, 设 $m>-a$, 则

$$m>\frac{1}{a}-a \text{ 与 } 27a<4m^3$$



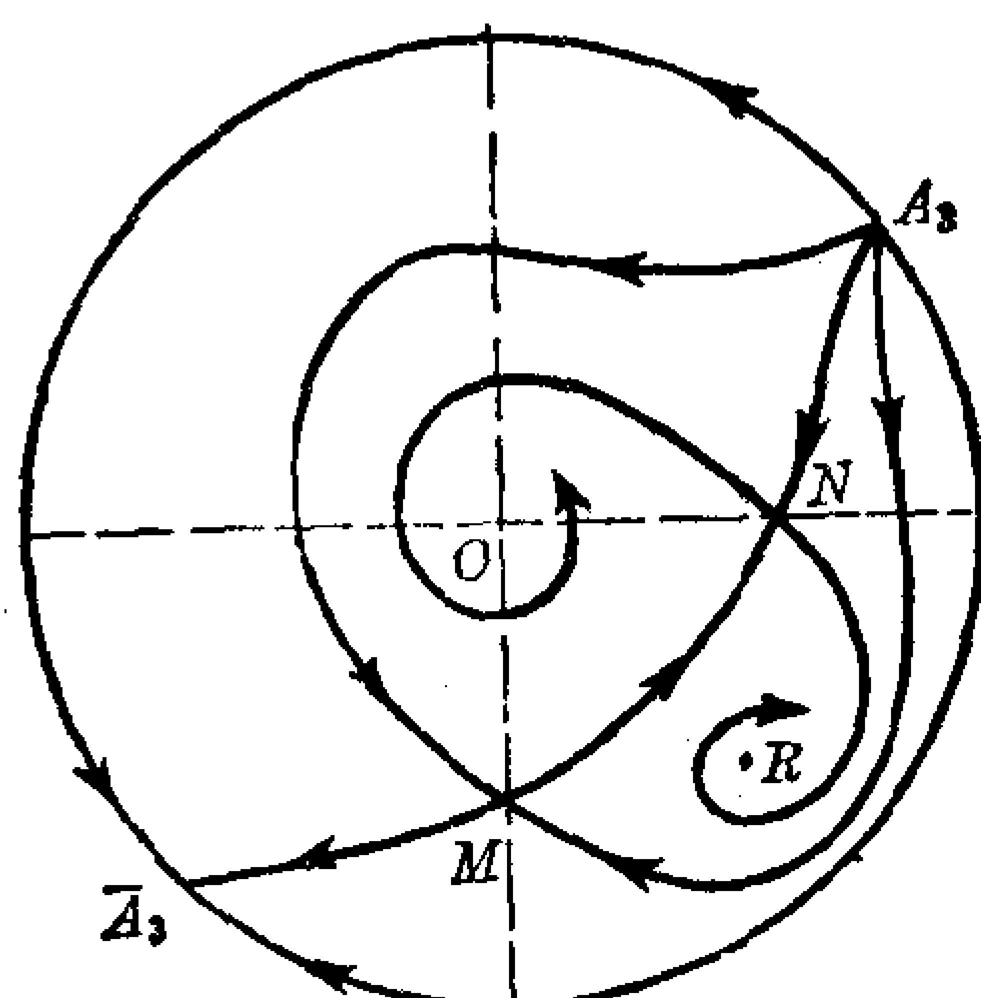
$0<m<-a,\ m<\frac{1}{a}-a$

图 13·6



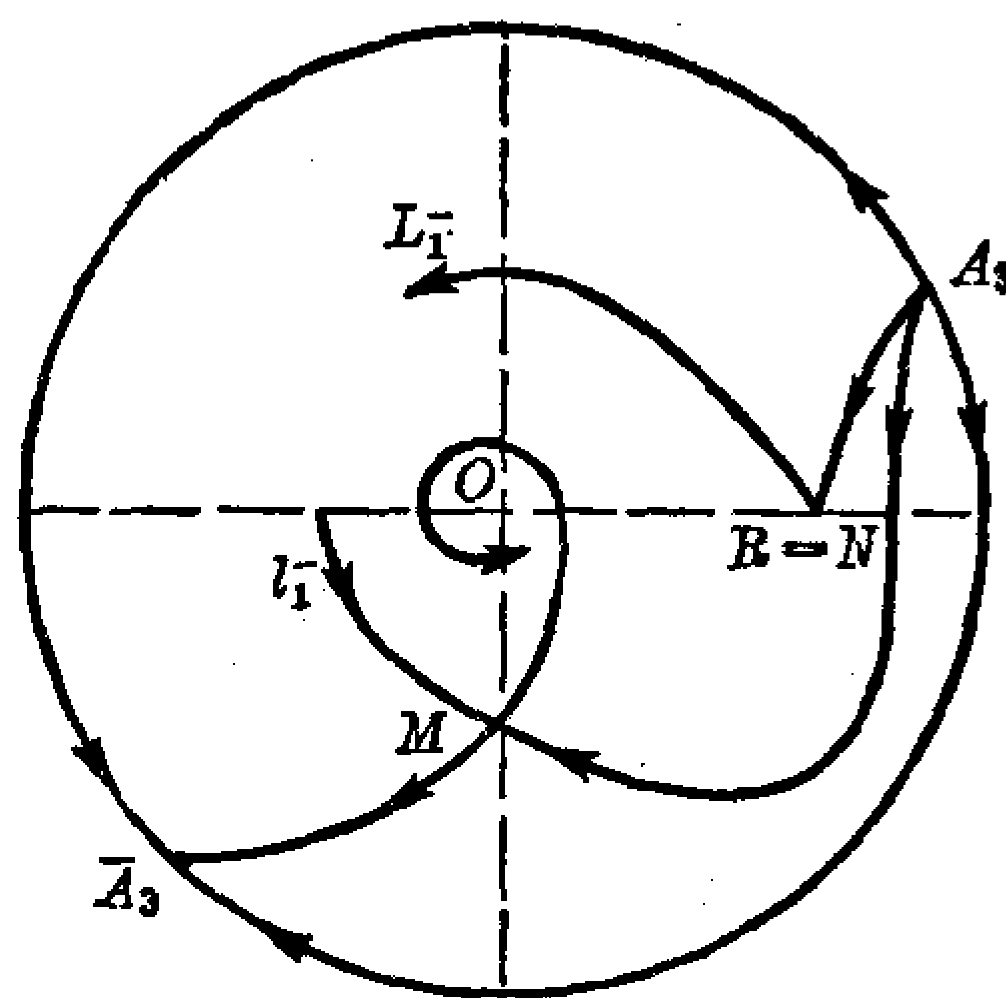
$0<m<-a,\ m>\frac{1}{a}-a$

图 13·7



$0<m=\frac{1}{a}-a<-a$

图 13·8



$m=-a>\frac{1}{a}-a,\ 27a<4m^3$

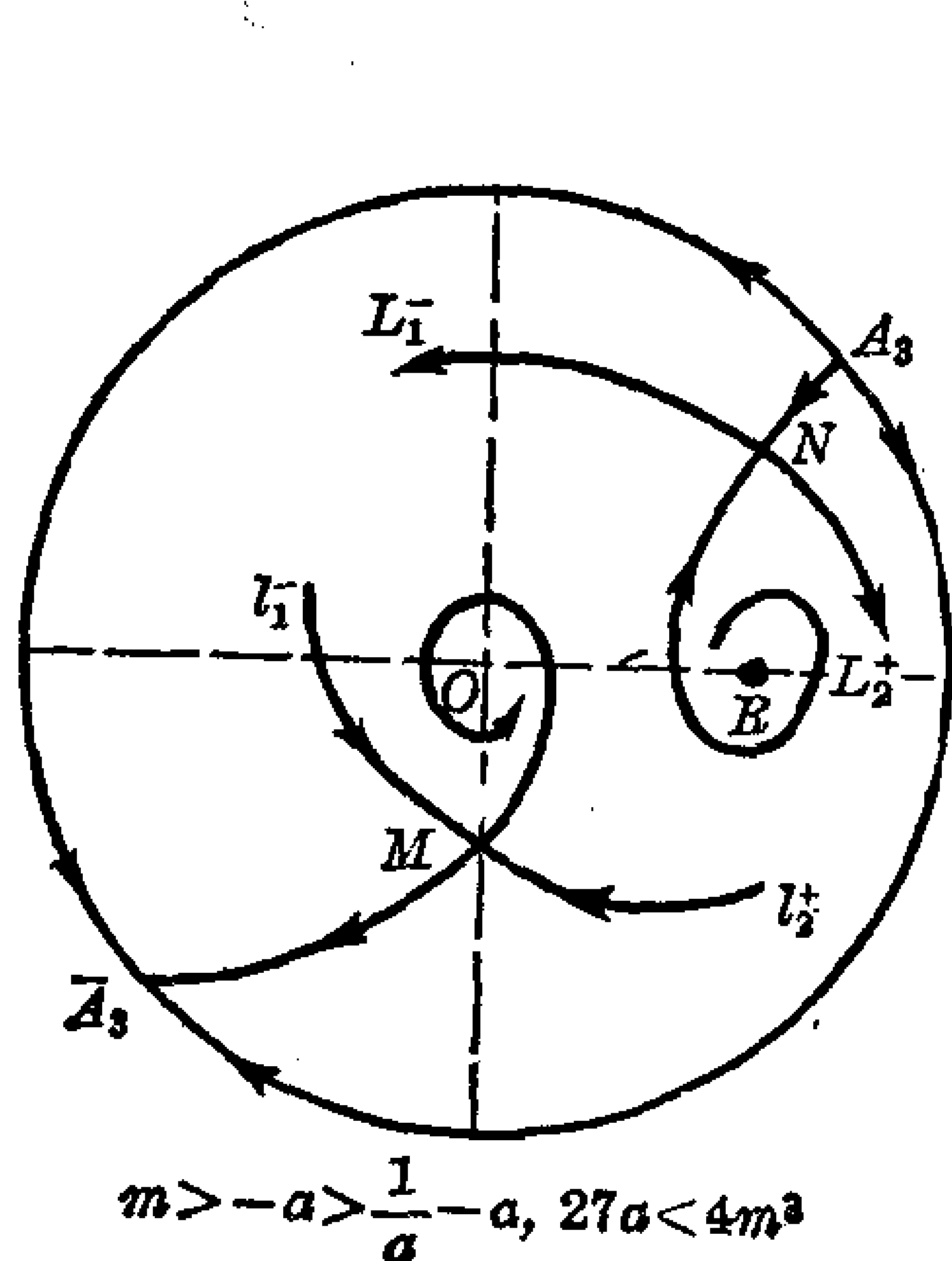
图 13·9

仍应成立．这时仍记$1+ax=0$上位于上方的奇点为N，它是鞍点，位于下方的奇点为R，它是不稳定焦点，全局结构如图13·10．在图13·10中除了L_2^+与l_2^+，L_1^-与l_1^-的相对位置不能确定以外，还可能有L_2^+与l_1^-的相对位置问题出现，因为L_2^+有可能穿到线段$\overline{MN}$的左方去．

为了彻底搞清楚以上诸图中某些分界线的相对位置的不确定性到底是确实存在的呢，还是由于方法不善所致，现在我们引进参数平面(a, m)和此平面中的分歧曲线．所谓分歧曲线(bifurcation curve)就是(a, m)平面上这样一条曲线，其上任一点(a^*, m^*)所对应的方程(13·3)的轨线全图是结构不稳定的．应注意本节所谓结构不稳定系统，是指当右方的系数a, m略略变动时，在射影平面上的轨线的拓扑结构就可能产生变动的那种方程(13·3)，故含义与第8节所说的略有不同．由于已知方程(13·3)不可能有极限环，结构不稳定只可能在下列三种情况出现：

1．方程(13·3)有中心点；

2．方程(13·3)有高阶奇点(有限远或无限远)；



$m>-a>\frac{1}{a}-a,\ 27a<4m^3$

图 13·10

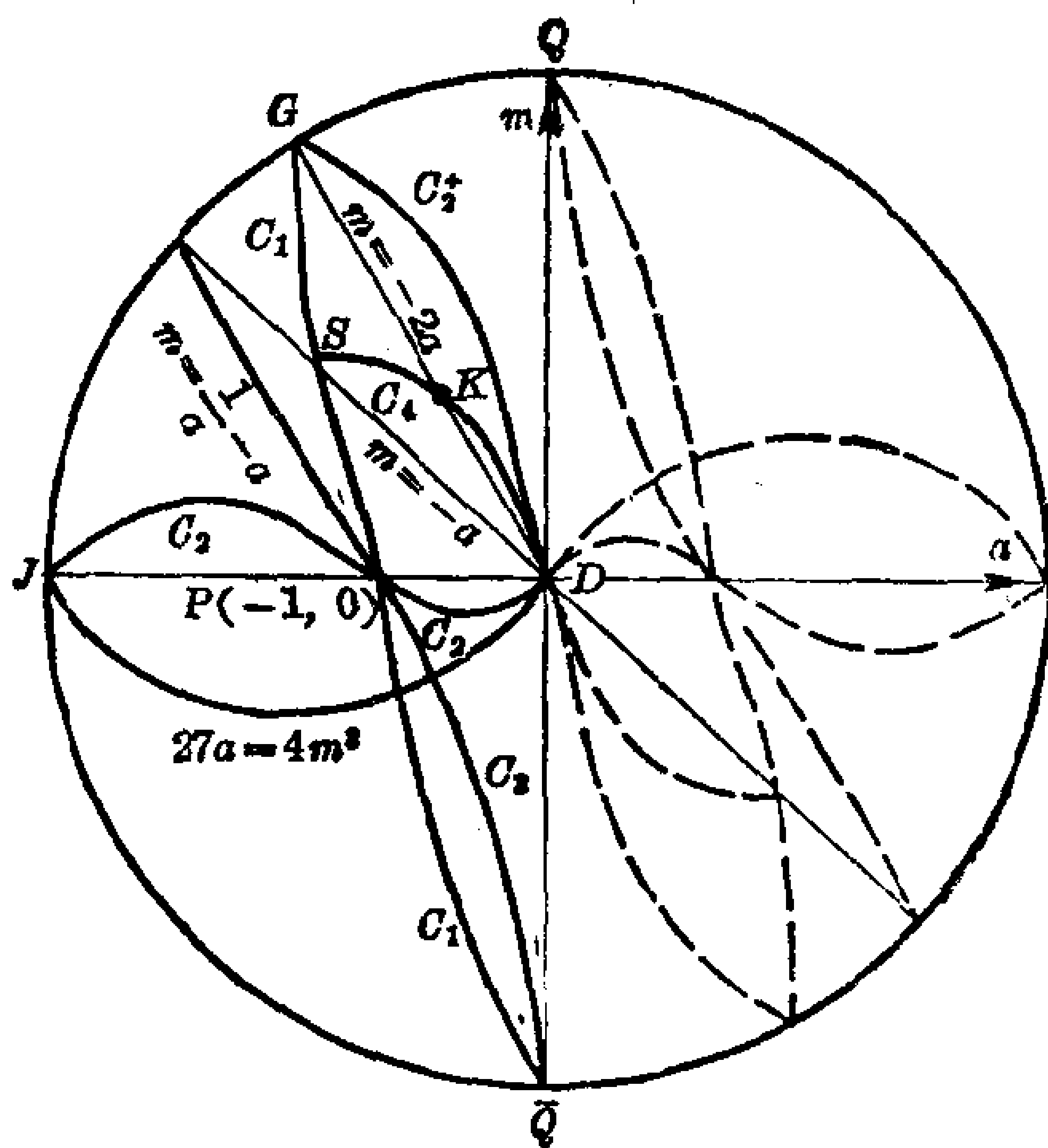


图 13·11

3. 方程(13·3)有从鞍点到鞍点的分界线[1].

已知情况1只出现在 $m=0$ 的时候, 因此 (a, m) 平面上的横轴是分歧曲线. 由于已设 $a<0$, 故不妨只看左半平面(图13·11). 与 $m=0$ 对应的方程(13·3)的全局图形有三种不同的拓扑结构, 已见于图13·5(a), (b), (c).

情况2只出现在 $m=-a$ (这时 $R=N$) 或 $27a=4m^3$ (这时 $A_1=A_2$)时, 因此直线 $m=-a$ 与曲线

$$27a=4m^3$$

都是分歧曲线. 若把 $a=0$ 的方程(13·3)也考虑在内, 则直线 $a=0$ 也是分歧曲线, 这时

$$N=A_1=A_2,\ R=A_3\quad(\text{当 } m>0)$$

或
$$N=A_2=A_3,\ R=A_1\quad(\text{当 } m<0).$$

情况3最为复杂. 根据图13·1到13·10可以看出 L_1^+ 恒来自 A_3, l_2^- 恒跑向 A_3, 这两分界线不可能与其他分界线重合. 又由图13·1与13·2看出, 当 A_1 与 $\overline{A}_1$ 存在时进入 A_1 的分界线必来自 R, R 不是鞍点, 从 $\overline{A}_1$ 出去的分界线必进入 $\overline{A}_3$, 因此这两分界线亦不可能与其他分界线重合. 剩下来还有六条分界线 L_2^+, L_1^-, L_2^-, l_1^+, l_2^+ 和 l_1^-, 它们之中任何两条具有不同稳定性(指当 t 增加时从鞍点跑出或进入鞍点)的分界线都有可能重合. 在这里又可分为两种情况:

3a. 分界线从一个鞍点出发重又回到原来的鞍点.

3b. 分界线从一个鞍点出发而进入另一鞍点.

属于情况3a的有 $L_1^-=L_2^-$(为简便计, 今后用=表示重合), $L_2^+=L_2^-$, $l_1^+=l_1^-$ 和 $l_1^+=l_2^+$. 但由定理12·1的附注2可知, 所有这些情况只可能出现在 $m=0$ 的时候, 因此没有添加新的分歧曲线.

属于3b的有

---

1) 严格地说, 在本节的结构稳定性的定义之下, 情况3是否为结构不稳定的充分条件尚未得到确实的证明.

$$l_1^+=L_2^-,\ L_1^-=l_1^-,\ L_2^+=l_2^+,\ L_2^+=l_1^-,\ L_1^-=l_2^+$$

等五种可能情况. 注意图 13·5 可知, 在 $m=0$, $a=-1$ 时

$$L_1^-=l_1^-,\ L_2^+=l_2^+,\ L_2^-=l_1^+$$

同时出现, 而在 $m=0$, $a<-1$ 时这三个等式都不成立, $m=0$, $a>-1$ 时也是一样, 并且 $a<-1$ 时这三对分界线的相对位置与 $a>-1$ 时的相对位置恰恰相反. 今后以 C_1, C_2, C_3 分别记使

$$L_1^-=l_1^-,\ L_2^+=l_2^+,\ L_2^-=l_1^+$$

的 (a, m) 平面上的分歧曲线, 则可知至少应各有 C_1, C_2, C_3 的一个分支经过点 $P(-1, 0)$, 以便把 a 轴上的 $(-\infty, -1)$ 线段与 $(-1, 0)$ 线段隔开, 其中 C_1 与 C_3 两端都应跑向无限远, C_2 的上半支亦应跑向无限远[1], 否则, 可在第二或三象限中用一条连续曲线 S 把负 a 轴的 $(-\infty, -1)$ 线段上一点 Q^*, 与 $(-1, 0)$ 线段上一点 Q' 连接起来, 而不与 C_1, C_2, C_3 相交, 这样当动点沿着 S 从 Q^* 跑到 Q' 时, 对应的 (x, y) 平面上方程 (13·3) 的三对分界线的相对位置不改变, 这是不可能的. 但 C_2 的下半支只要在曲线

$$27a=4m^3$$

的上方就够了, 因为 $27a=4m^3$ 下方任一点 (a, m) 所对应的方程 (13·3) 有三个无限远奇点, 由图 13·1 与 13·2 看出这时 L_2^+ 进入 A_2, 而 l_2^+ 来自 R, 显然可以当做是 L_2^+ 包在 l_2^+ 外面的.

由本节一开始时的讨论立刻看出, 使 $L_2^-=l_1^+$ 的分歧曲线 C_3 只有唯一的分支

$$m=\frac{1}{a}-a$$

(不考虑 $a>0$ 的部分), 就是说, 如果 $L_2^-=l_1^+$, 则它们必都重合于直线段 $\overline{MN}$, 否则如图 13·12 将出现矛盾.

其次容易证明, 在 C_3 的上半支与负 a 轴的 $(-\infty, -1)$ 线段所围的无界角域内没有 C_1 的轨迹, 否则如图 13·13 所示, 将出现

1) 它们不可能到达正 m 轴, 理由见定理 13·1.

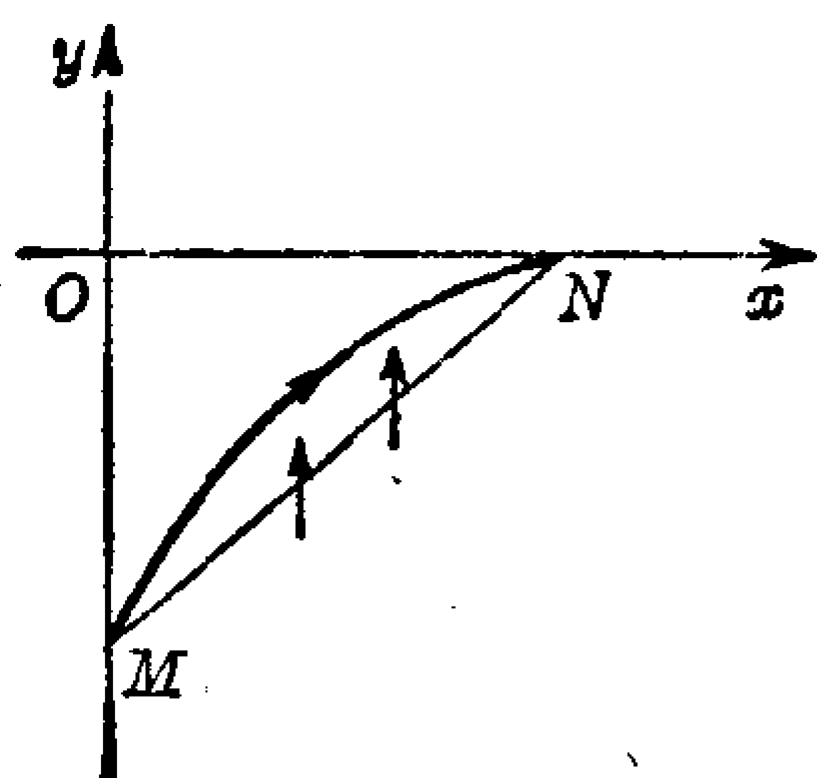


图 13·12

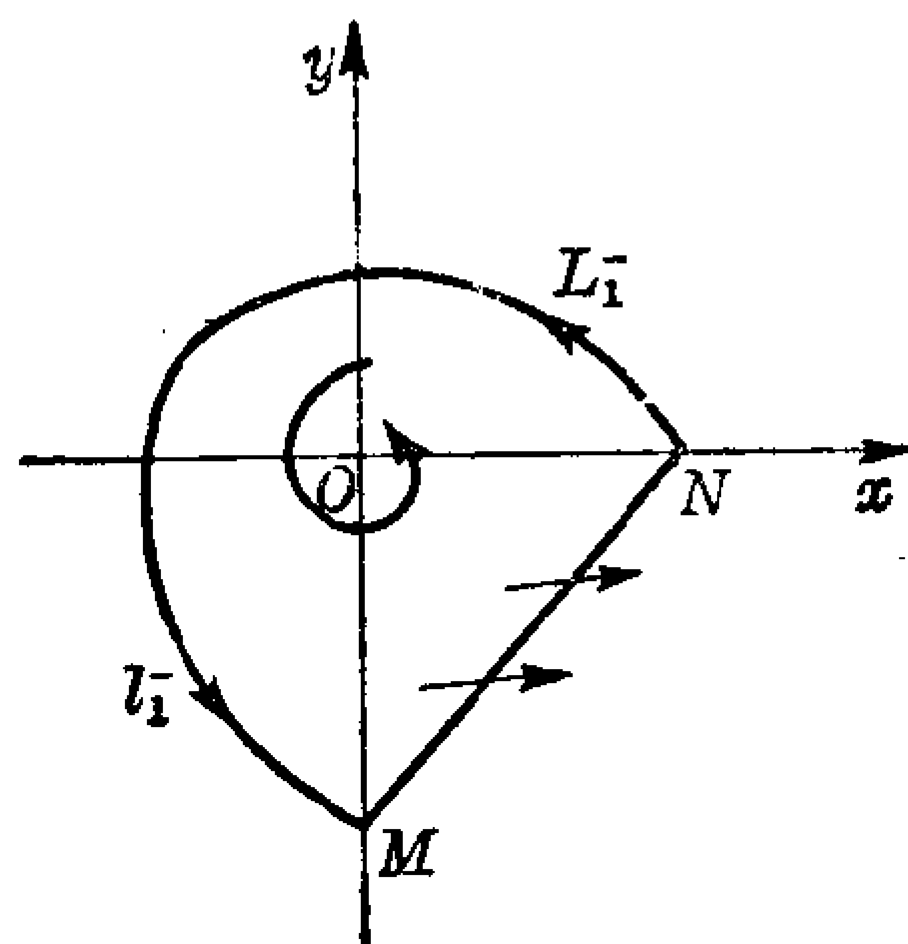


图 13·13

$L_1^-=l_1^-$，O 为稳定，且一切轨线与线段 $\overline{MN}$ 相遇时都从左到右的情况，这是不可能的．同理可证，第三象限中与上述角域成对顶角的无界角域内亦无 C_1 的轨迹．又在直线 $m=-a$ 下方，除了上述两个角域以后，所余下来的两个对顶角域内没有 C_2 的轨迹．

不但如此，我们还可进一步证明：由直线

$$m=-a \text{ 与 } m=-2a$$

所夹的角域中没有 C_2，由 $m=-2a$ 与正 m 轴所夹的角域中没有 C_1．为此只须注意当

$$-a<m\leqslant -2a$$

时 R 的纵坐标 $-\dfrac{a+m}{a}$ 位于区间(0, 1]中，利用比较轨线的斜率的方法(图 13·14)，易证 L_2^+ 的位于区域 $\left\{y\leqslant 0, x\geqslant -\dfrac{1}{a}\right\}$ 中的弧段关于 x 轴的对称线(虚线所示)整个位于 L_2^+ 的上半支的下方．由此可见，L_2^+ 与 $1+ax=0$ 的另一交点 Q 的纵坐标的绝对值小于1．但是另一方面 l_2^+ 在 $1+ax=0$ 的左方有负的斜率，而 M 的纵坐标为 -1，故 l_2^+ 与 $1+ax=0$ 的交点 P 必在 Q 的下方，即 l_2^+ 与 L_2^+ 不可能重合．同理可证在正 m 轴与 $m=-2a$ 所夹的角域中没有 C_1（图 13·15）[1]．

---

1) 由此可见，在图 13·10 中不可能同时出现 $L_1^-=l_1^-$，$L_2^+=l_2^+$，即不存在由此四分界线所构成的奇异闭轨线．

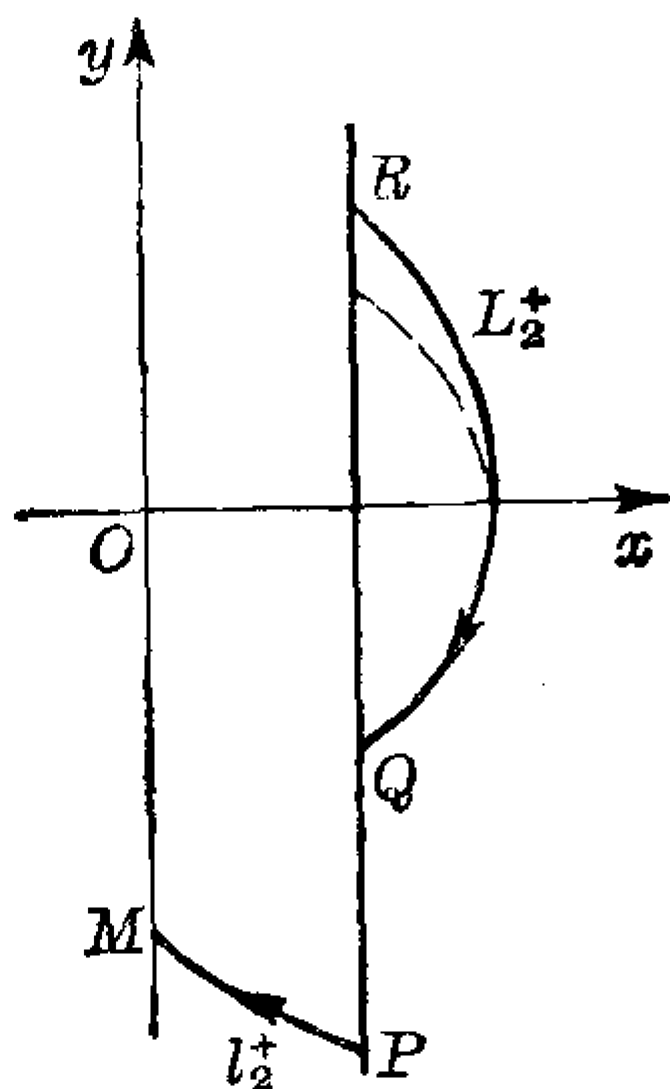


图 13·14

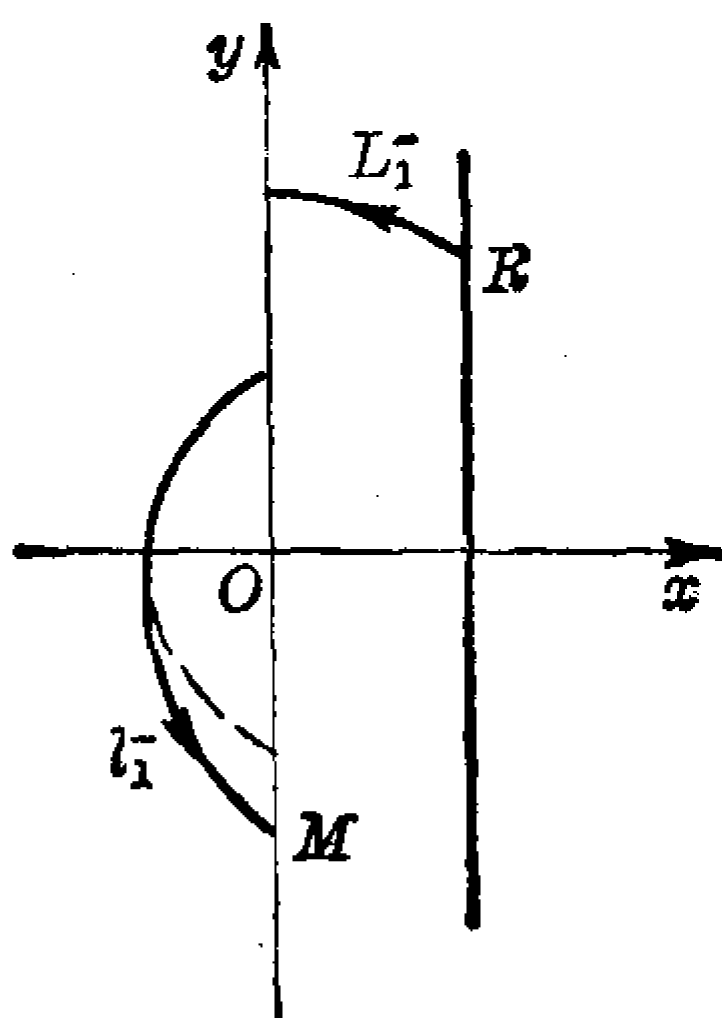


图 13·15

总结以上所说，可得

定理 13·1 使 $L_2^-=l_1^+$ 的分歧曲线 C_3 有唯一的分支 $m=\frac{1}{a}-a$，使 $L_1^-=l_1^-$ 的分歧曲线 C_1 只能位于区域 $\left\{m>\frac{1}{a}-a,\ 0<m<-2a\right\}$ 和区域 $\left\{m<\frac{1}{a}-a<0\right\}$ 中，使 $L_2^+=l_2^+$ 的分歧曲线 C_2 只能位于区域 $\left\{0<m<\frac{1}{a}-a\right\}$，$\left\{\frac{1}{a}-a<m<0,\ 27a<4m^3\right\}$ 和 $\{0<-2a<m\}$ 中。

至于通过 $P(-1,0)$ 的 C_1 与 C_2 的分支虽然我们相信是唯一存在的，如图 13·11 所画的那样，并且 C_1 与 C_2 应是光滑曲线，作为二维 Euclid 空间中的点集来看不含内点，但尚无法证明．今后我们假定只有 C_1 与 C_2 的唯一的分支通过点 $P(-1,0)$．

在图 13·9 中我们看到，当

$$m=-a,\ 27a<4m^3$$

时 L_1^- 与 l_1^- 的相对位置仍不能确定．下面的定理说明这的确是个实在情况．

定理 13.2 C_1 的上半支不但在 $m=\frac{1}{a}-a$ 的上方，而且还要穿到直线 $m=-a$ 的上方去．

【证】 在方程(13·3)中令

$$x=-\frac{1}{a}x', \quad y=-\frac{1}{a}y', \quad m=-a,$$

得到

$$\frac{dy'}{dt}=x'(1-x'), \quad \frac{dx'}{dt}=-y'\left(1-\frac{1}{a}y'-x'\right). \qquad (13\cdot9)$$

现在要证明：当$|a|$足够大时，对于方程(13·9)，L_1^- 将跑向 l_1^- 的右方去，这种相对位置与负 a 轴的$(-\infty, -1)$线段上的点所对应的 L_1^- 与 l_1^- 的相对位置是一样的，从而说明这时 $m=-a$ 上的点应在 C_1 的下方[1]。

首先，在区域$\{y'>0, 0<x'<1\}$中比较(13·9)的轨线与方程

$$\frac{dx'}{dt}=-y', \frac{dy'}{dt}=x' \qquad (13\cdot10)$$

的轨线的斜率(图13·16)，有

$$\frac{-x'(1-x')}{y'\left(1-\frac{1}{a}y'-x'\right)}+\frac{x'}{y'}$$

$$=\frac{-x'y'}{ay'\left(1-\frac{1}{a}y'-x'\right)}>0,$$

故方程(13·10)的过 $N'(1, 0)$ 的轨线(以原点为中心的圆)在方程(13·9)的过同一点的轨线的上方，设二者与正 y' 轴的交点为 A, B.

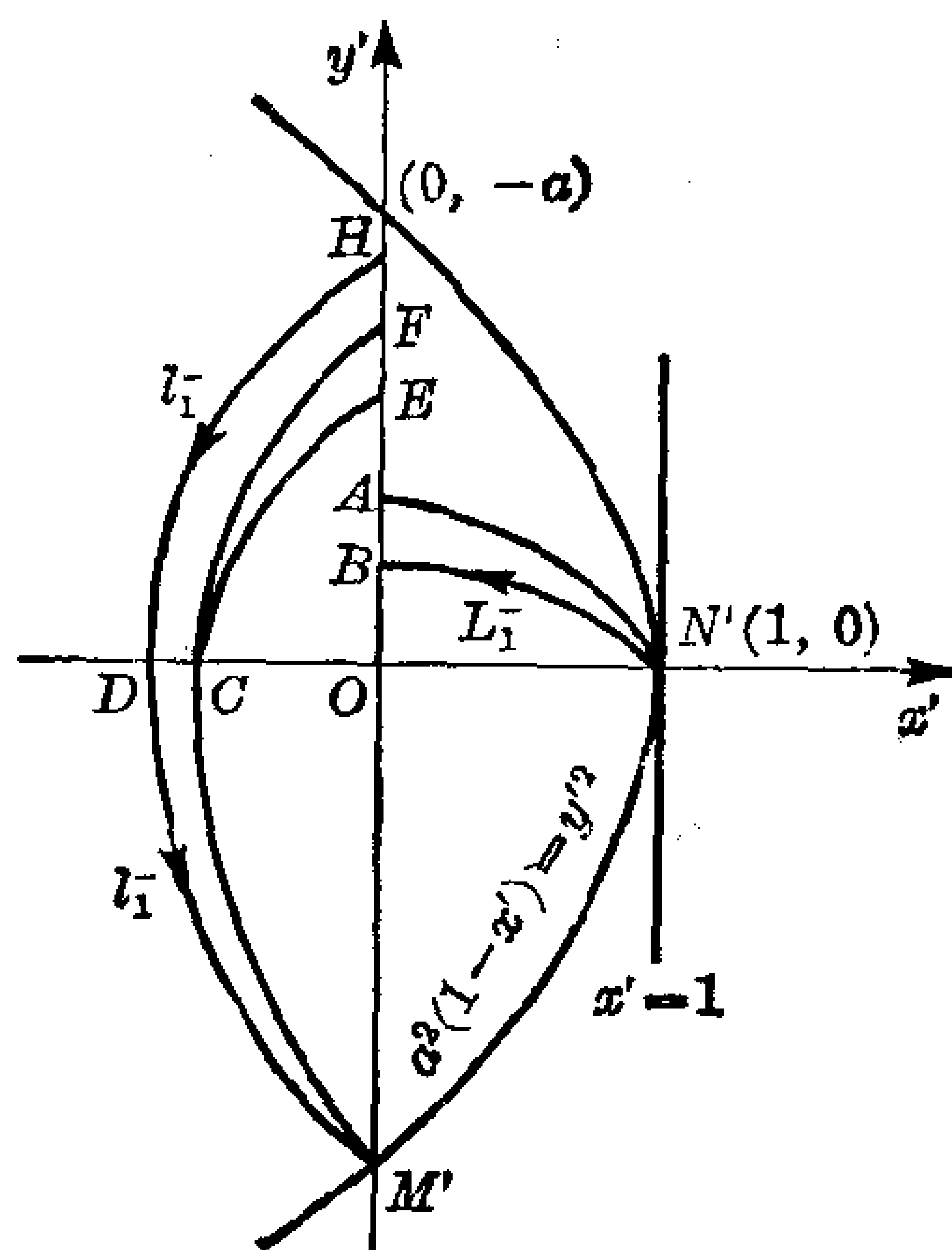


图 13·16

其次，在区域$\{x'<0, a<y'<0\}$中比较(13·9)的轨线与方程

1) 有没有这样一种可能：C_1有偶数个分支通过$P(-1, 0)$，但都在$m=-a$的下方，另外又有奇数个分支位于角域

$$-a<m<-2a$$

中．根据前面C_1要把负a轴上的$(-\infty, -1)$线段与$(-1, 0)$线段隔开的理论可知，上述这种可能性是不存在的．换言之，必有通过$P(-1, 0)$的C_1的奇数个分支后来要穿过$m=-a$而跑到此直线的上方去．

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx'}{dt}&=-y'\left(1-\frac{1}{a}y'\right),\\ \frac{dy'}{dt}&=x'(1-x')\end{aligned}\right\}\tag{13·11}$$

的轨线的斜率，得到

$$\frac{-x'(1-x')}{y'\left(1-\frac{1}{a}y'-x'\right)}+\frac{x'(1-x')}{y'\left(1-\frac{1}{a}y'\right)}$$

$$=\frac{-x'^2(1-x')}{y'\left(1-\frac{1}{a}y'-x'\right)\left(1-\frac{1}{a}y'\right)}>0.$$

故方程(13·11)的过 $M'(0,\ a)$的轨线在方程(13·9) 的过同一点的分界线的右方，假设二者与负 x' 轴的交点依次为 C, D. 容易算出方程(13·11)的轨线 $\widehat{M'C}$ 的方程是

$$\frac{x'^2}{2}-\frac{x'^3}{3}+\frac{y'^2}{2}-\frac{y'^3}{3a}=\frac{a^2}{6}.$$

当$|a|>1$ 时，方程

$$\frac{1}{2}x'^2-\frac{1}{3}x'^3=\frac{a^2}{6}$$

有唯一的(负)实根，即 C 的横坐标 x'_C. 由此可见，若$|a|$甚大，则

$$x'_C\doteq-\sqrt[3]{\frac{a^2}{2}}.\tag{13·12}$$

但 $x'_D<x'_C$，故只要$|a|$足够大，$|x'_D|$就可大于任一已给正数.

最后，在第二象限中比较(13·9)的轨线与方程

$$\frac{dx'}{dt}=a-y',\quad \frac{dy'}{dt}=x'\tag{13·13}$$

的轨线的斜率，得到

$$\frac{-x'(1-x')}{y'\left(1-\frac{1}{a}y'-x'\right)}-\frac{x'}{a-y'}=\frac{-x'[a^2(1-x')-y'^2]}{ay'\left(1-\frac{1}{a}y'-x'\right)(a-y')}>0.$$

上式右边分子中的方括弧内可设为正，因为

$$a^2(1-x')-y'^2=0$$

是顶点在 $N'(1,\ 0)$且通过$(0,\ \pm a)$的抛物线，前面曾经说过(见图

13·15)，方程(13·9)的过 M' 的分界线 $M'DH$ 应位于区域

$$a^2(1-x')-y'^2>0$$

中，而我们现在所须比较的是(13·9)与(13·13)的经过 C 的轨线 $\widehat{CF}$ 与 $\widehat{CE}$，它们当然也应位于区域

$$a^2(1-x')-y'^2>0$$

中，并且 $\widehat{CF}$ 应在 $\widehat{CE}$ 的上方．方程(13·13)有初积分

$$x'^2+(a-y')^2=k^2.$$

故知 $\widehat{CE}$ 的方程是

$$x'^2+(a-y')^2=x_C'^2+a^2,$$

从而 E 的纵坐标为

$$y_E'=\sqrt{a^2+x_C'^2}+a.$$

由(13·12)知道当 $|a|$ 甚大时有

$$y_E'\doteq\sqrt{a^2+\sqrt[3]{\frac{a^4}{4}}}+a\doteq\frac{1}{2\sqrt[3]{4}}|a|^{\frac{1}{3}}.$$

当 a 变动时 A 的纵坐标保持不变，而 y_E' 可变为大于1，只要 $|a|$ 足够大．故 E 在 A 的上方，从而 H 在 B 上方，这就是我们所要证明的.

可以证明，当 $|a|\to\infty$ 时 C_1 应进入 $m=-2a$ 上的无限远点 G．对于 C_1 的下半支还可证明：沿着任一直线

$$a=a_0<-1,$$

当 $m<0$ 而 $|m|$ 足够大时点 $(a_0,\ m)$ 必位于 C_1 的下方[204]．此外，又可证明，沿着 C_1 的下半支跑向无限远时有 $\frac{m}{a}\to+\infty$[205]，证明从略．由此可见，C_1 不可能对称于 a 轴，因为 C_1 的上半支应保持在直线 $m=-2a$ 的下方，沿着它当 $a\to-\infty$ 时 $\left|\frac{m}{a}\right|$ 不可能趋向 ∞.

至于分歧曲线 C_2，它的上半支不但应保持在双曲线

$$m=\frac{1}{a}-a$$

的下方趋向无限远，而且可以证明当 $a\to-\infty$ 时沿着 C_2 有 $\frac{m}{a}\to 0$，证明从略。另一方面，C_2 的下半支则应介于曲线

$$27a=4m^3$$

与负 a 轴之间趋向原点，因为使 $27a\geqslant 4m^3$ 的 (a, m) 所对应的方程(13·3)，其 L_2^+ 都进入 A_2，而 l_2^+ 则来自 R。由此可见，当 (a, m) 与 $27a=4m^3$ 很接近但满足

$$27a<4m^3$$

时 L_2^+ 应跑向 l_2^+ 的下方；相反的，负 a 轴的 $(-1, 0)$ 线段上的点所对应的方程(13·3)，其 L_2^+ 应跑向 l_2^+ 的上方，故必须有 C_2 把负 a 轴与曲线 $27a=4m^3$ 分开。

定理 13·1 中已证，在直线 $m=-2a$ 与正 m 轴所夹的角域中不可能有 C_1，但可能有 C_2。现在我们来证明在此角域中确实有 C_2 的分支，它和通过 $P(-1, 0)$ 的 C_2 实际上是在原点 $a=m=0$ 连在一起的。为叙述方便起见，今后把这一支记作 C_2^*。

定理 13·3 在角域 $-\frac{m}{2}<a<0$ 中有 C_2^*，它通过原点并趋向无限远，与每一平行于 m 轴的直线至少交于一点。

【证】 如图 13·17，首先在区域

$$x\geqslant-\frac{1}{a},\ 0\leqslant y\leqslant-\frac{a+m}{a}$$

中比较方程(13·3)的轨线与方程

$$\frac{dx}{dt}=-y, \frac{dy}{dt}=x \quad (13·14)$$

的轨线的斜率，得到

$$\frac{-x(1+ax)}{y(1+y-mx)}+\frac{x}{y}=\frac{x[y-(a+m)x]}{y(1+y-mx)}>0.$$

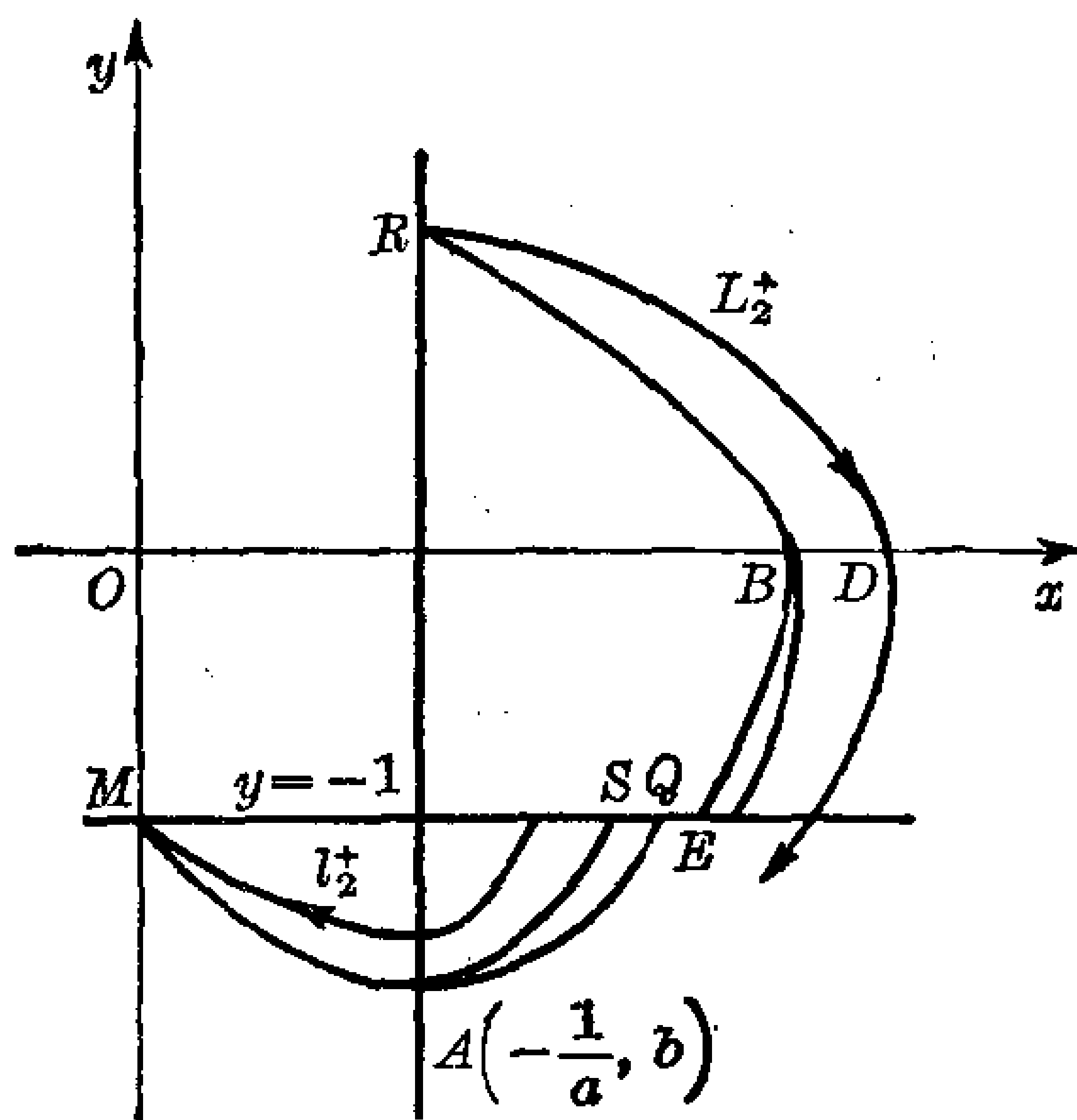


图 13·17

由此可见，经过 R 的，以原点

为中心的圆弧 $\widehat{RB}$ 在方程(13·3)的分界线 L_2^+ 的下方. 容易算出

$$x_B=-\frac{1}{a}\sqrt{1+(a+m)^2},$$

记 L_2^+ 与 x 轴的交点为 D, 则 $x_D>x_B$.

其次, 在区域

$$x\geqslant-\frac{1}{a},\quad -1\leqslant y\leqslant 0$$

中比较方程(13·3)与方程

$$\frac{dx}{dt}=my,\qquad \frac{dy}{dt}=1+ax \tag{13·15}$$

的轨线的斜率, 得到

$$\frac{-x(1+ax)}{y(1+y-mx)}-\frac{1+ax}{my}=\frac{-(1+y)(1+ax)}{my(1+y-mx)}>0,$$

故(13·15)的过点 B 的轨线在(13·3)的过点 B 的轨线的左方, 易见前者有方程

$$(1+ax)^2-amy^2=(1+ax_B)^2=[1-\sqrt{1+(a+m)^2}\,]^2,$$

它和 $y=-1$ 的交点 E 的横坐标 x_E 满足方程

$$(1+ax_E)^2=[1-\sqrt{1+(a+m)^2}\,]^2+am. \tag{13·16}$$

再在区域

$$y\leqslant-1,\quad 0\leqslant x\leqslant-\frac{1}{a}$$

中比较方程(13·3)与方程

$$\frac{dx}{dt}=-y(1+y),\qquad \frac{dy}{dt}=x(1+ax) \tag{13·17}$$

的轨线的斜率, 得到

$$\frac{-x(1+ax)}{y(1+y-mx)}+\frac{x(1+ax)}{y(1+y)}=\frac{-mx^2(1+ax)}{y(1+y-mx)(1+y)}>0.$$

由此可见, 自右下方进入 $M(0,\ -1)$ 的(13·17)的分界线应在 l_2^+ 的下方. 易见前者有方程

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{a}{3}x^3+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3=\frac{1}{6},$$

它和 $1+ax=0$ 的交点 A 的纵坐标 y_A 满足方程[1)]

$$\frac{1}{2}y_A^2+\frac{1}{3}y_A^3=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{a^2}\right). \tag{13·18}$$

最后，在区域

$$x\geqslant-\frac{1}{a},\quad y_A\leqslant y\leqslant-1$$

中比较方程(13·3)与方程

$$\frac{dx}{dt}=m^2y,\quad \frac{dy}{dt}=-ay_A^2(1+ax) \tag{13·19}$$

的轨线的斜率，得到

$$\begin{aligned}&\frac{-x(1+ax)}{y(1+y-mx)}+\frac{ay_A^2(1+ax)}{m^2y}\\&=\frac{(1+ax)[-m(m+ay_A^2)x+ay_A^2(1+y)]}{m^2y(1+y-mx)}>0,\end{aligned}$$

只要 m 足够大．这样，方程(13·3)的轨线弧 $\widehat{AS}$ 应在(13·19)的轨线弧 $\widehat{AQ}$ 的左方．易见 $\widehat{AQ}$ 的方程为

$$y_A^2(1+ax)^2+m^2y^2=m^2y_A^2,$$

从而 Q 的横坐标 x_Q 应满足方程

$$(1+ax_Q)^2=m^2\left(1-\frac{1}{y_A^2}\right). \tag{13·20}$$

现在如能证明当 m 足够大时有 $x_E>x_Q$，则方程(13·3)的分界线 L_2^+ 将跑到 l_2^+ 的下方去，这种相对位置与

$$-a<m<-2a$$

时 L_2^+ 与 l_2^+ 的相对位置恰恰相反．由此即可推知在角域 $m>-2a>0$ 中有 C_2^* 存在．要 $x_E>x_Q$，由(13·16)与(13·20)知道，只要

$$[1-\sqrt{1+(a+m)^2}]^2+am>m^2\left(1-\frac{1}{y_A^2}\right),$$

亦即
$$\frac{2+(a+m)^2+am-2\sqrt{1+(a+m)^2}}{m^2}>1-\frac{1}{y_A^2},$$

1) 由此可见，当 a 固定时 y_A 的值亦固定，不随 m 而变．

此式当 a 固定而 m 足够大时显然成立，因为右边是一个固定的小于1的数，而左边当 $m\to\infty$ 时趋于1为极限。

最后，要证 C_2^* 通过原点。为此注意当 $a=0$ 时方程(13·3)成为

$$\frac{dx}{dt}=-y(1+y-mx),\quad \frac{dy}{dt}=x,$$

其轨线的全局结构如图13·18，这里 $N=A_1=A_2$ 为无限远高阶奇点 $(1,0,0)$，$R=A_3$ 为半鞍结点 $(1,m,0)$。由图13·18看出，L_2^+ 将跑到 l_2^+ 的下方去，这种相对位置与负 a 轴上 $(-1,0)$ 的点所对应的 L_2^+ 与 l_2^+ 的相对位置恰恰相反，故 C_2^* 必须把正 m 轴与负 a 轴分开，即应通过原点。定理证毕。

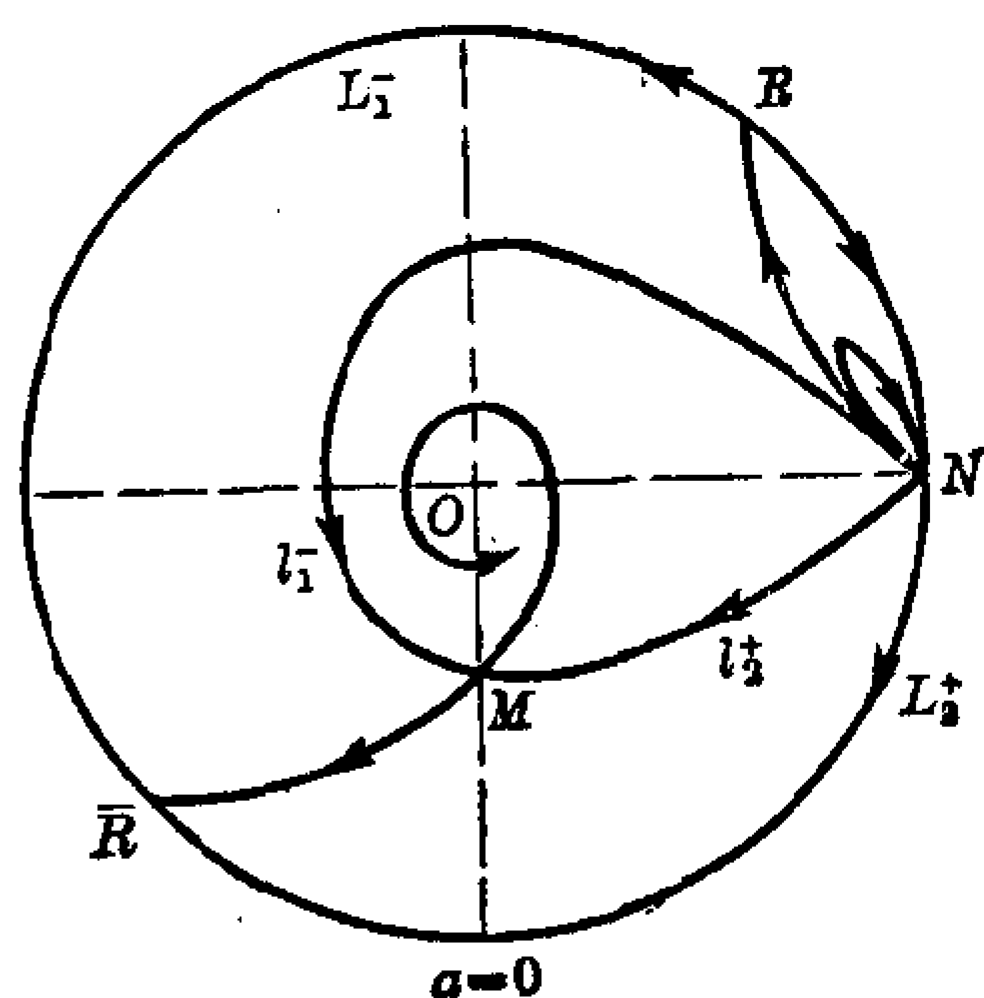


图　13·18

还可进一步证明当 $a\to-\infty$ 时沿着 C_2^* 有 $\frac{m}{a}\to-2$，即 C_2^* 应通过直线 $m=-2a$ 上的无限远点，证明从略，见[204]。

下面再讨论等式 $L_2^+=l_1^-$ 与 $L_1^-=l_2^+$ 成立的可能性。

定理 13·4　使 $L_1^-=l_2^+$ 成立的 (a,m) 不存在。

【证】　如果存在 (a^*,m^*)，使对应的方程(13·3)有

$$L_1^-=l_2^+,$$

则如图13·19所示，O 应是不稳定奇点，R 应是稳定奇点，这当 $a<0$ 时在任何场合都是不可能的。

定理 13·5　使 $L_2^+=l_1^-$ 的分歧曲线 C_4 是位于直线 $m=-a$ 上方，连接原点和 C_1 与 $m=-a$ 的交点 S 的一段曲线。

【证】　如图13·20，当出现 $L_2^+=l_1^-$ 时，首先由 $\overline{MN}$ 上轨线的穿过方向可知 R 应为不稳定，O 为稳定，故 C_4 应在直线 $m=-a$

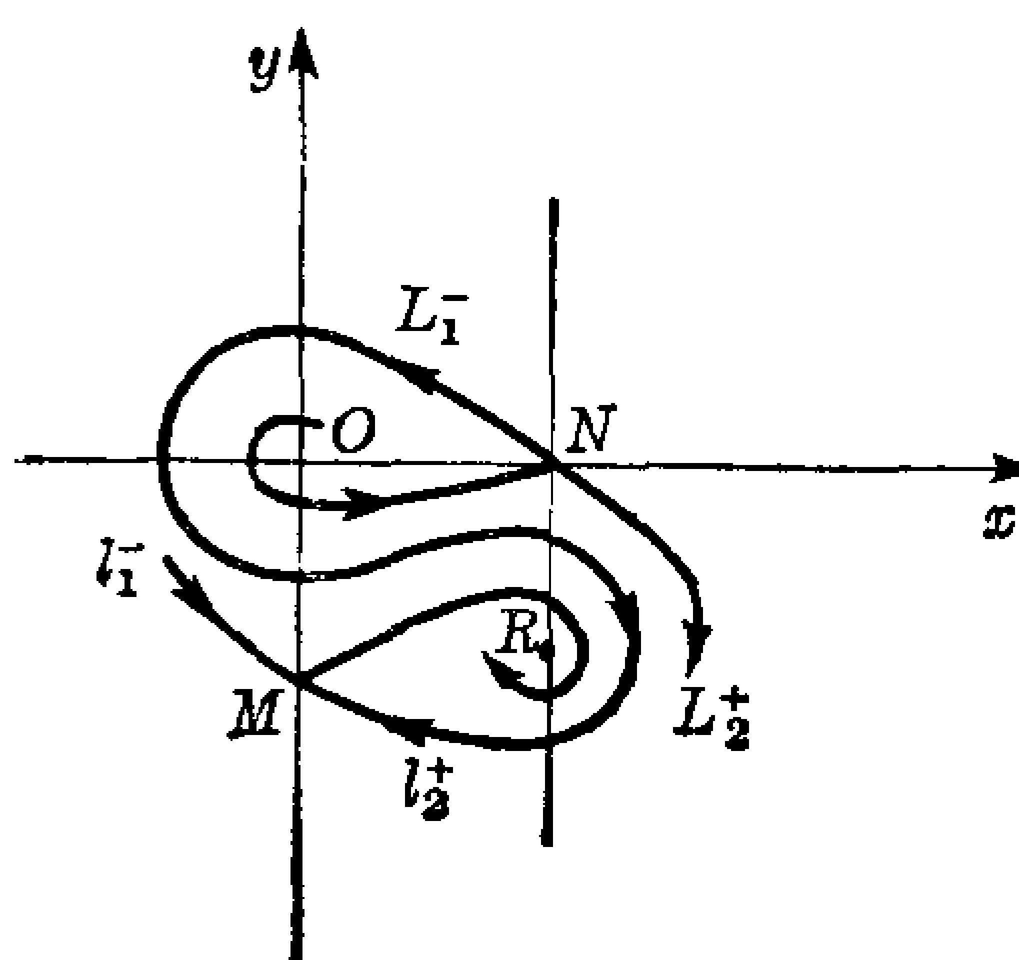


图 13·19

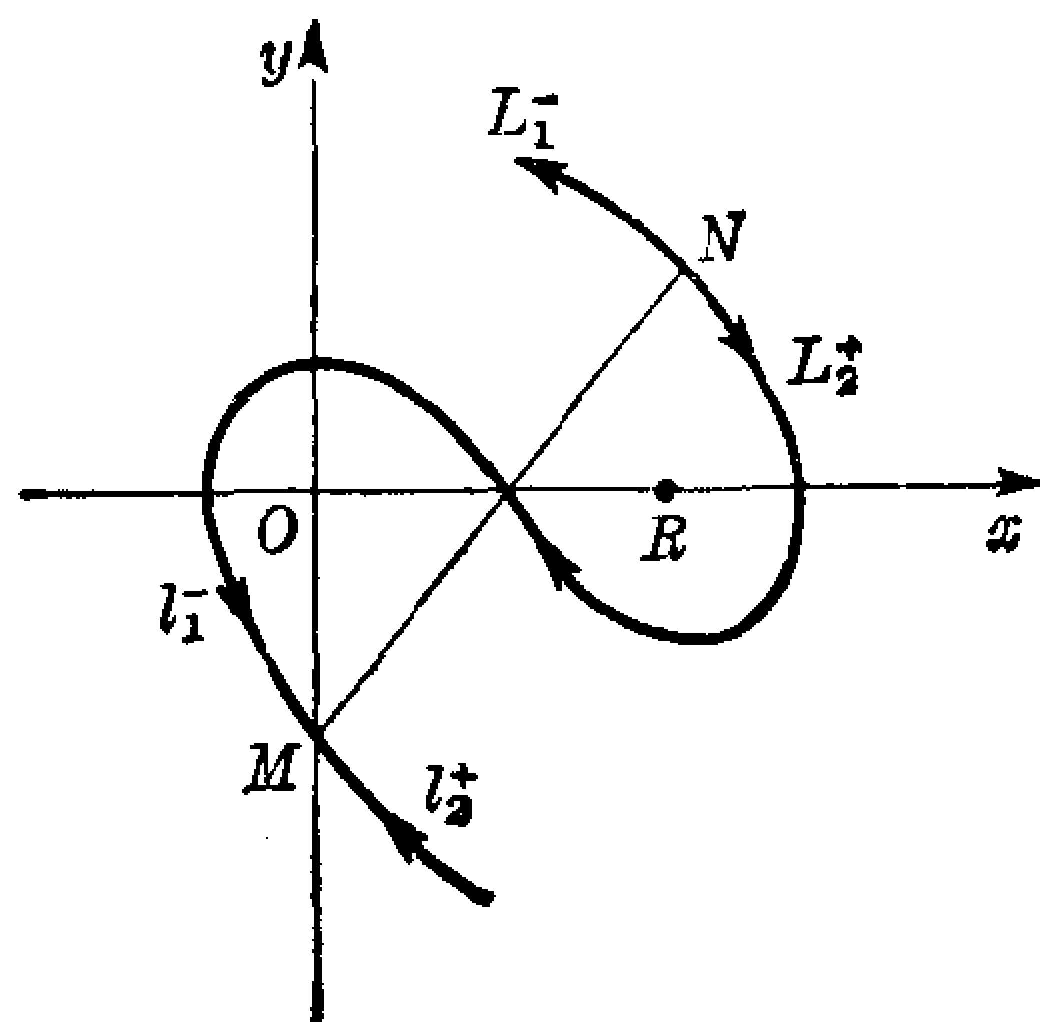


图 13·20

的上方[1]. 再注意图 13·20 中 L_2^+ 与 l_2^+ 的相对位置以及 L_1^- 与 l_1^- 的相对位置, 可知 C_4 应位于 C_2^* 的下方, C_1 的右方.

现在由图 13·21 看出, 对应于 C_2^* 上的点有

$$L_2^+=l_2^+,$$

由于 O 为稳定, 如果把 l_1^+ 看成 l_2^+ 的延续, 则 L_2^+ 将跑到 l_1^- 的右方去. 事实上, 根据解对初值的连续性, 对于 C_2^* 下方附近的点, 情况确实是如此. 再由图 13·22 看出, 对应于 C_1 右方的直线段 $m=-a$ 上的点, $R=N$ 为高阶奇点,

$$L_2^+=L_2^-=0,$$

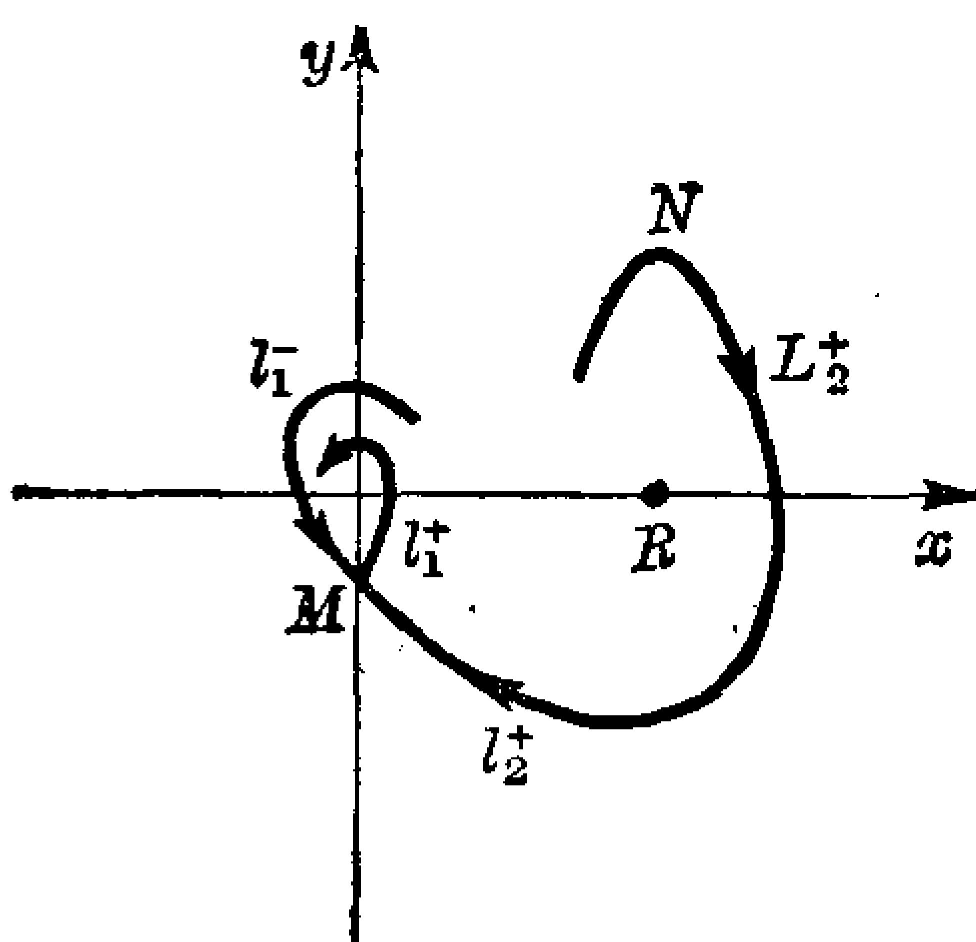


图 13·21

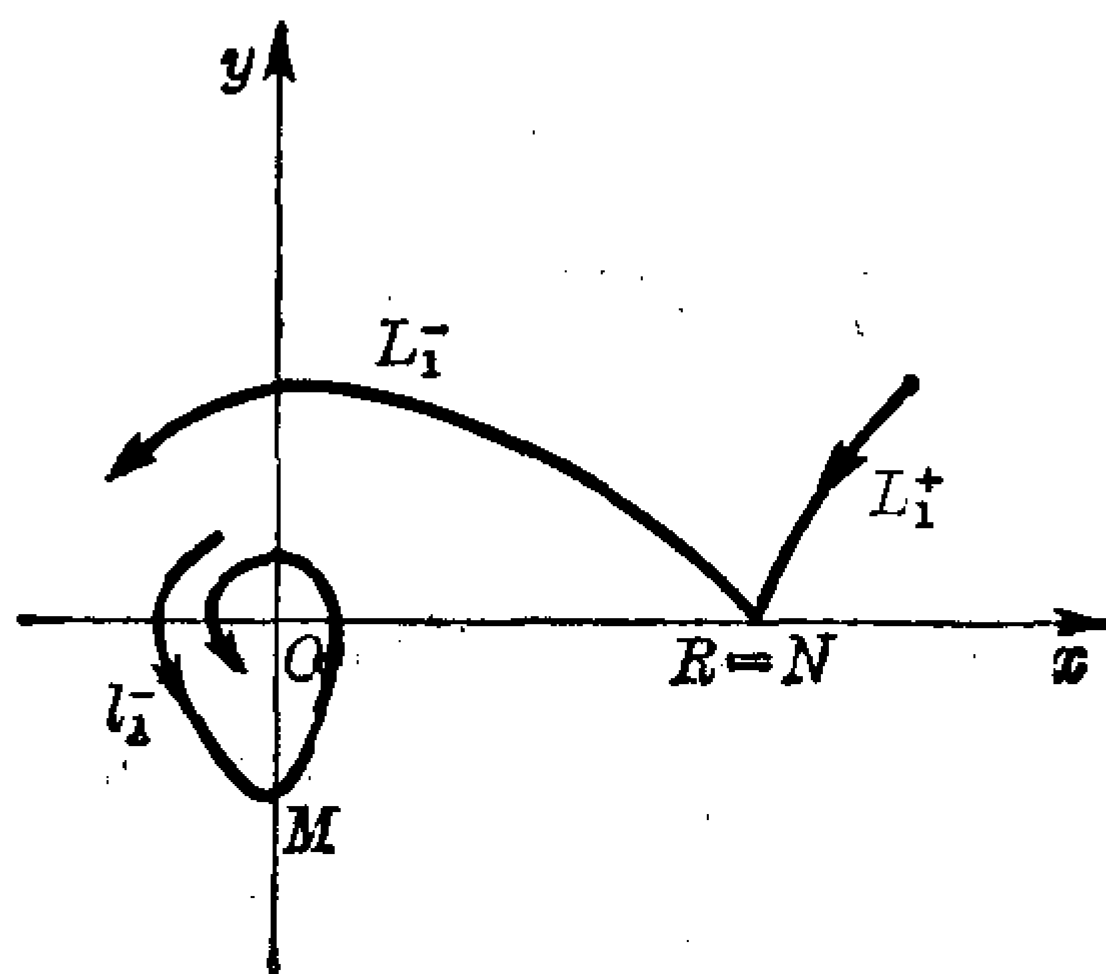


图 13·22

1) 当 $0<m<-a, m>\frac{1}{a}-a$ 时图 13·7 说明 R 是稳定奇点, 它附近没有闭轨线, 故 L_2^+ 应进入 R, 不可能穿到 $\overline{MN}$ 左方去.

且 L_1^- 将跑到 l_1^- 的左方去. 故由解对初值的连续性，对于这一有限直线段上方附近的点，对应的方程(13·3)的 L_2^+ 必将跑到 l_1^- 的左方去. 这样,在 C_2^+ 与 $m=-a$ 之间应该有 C_4 把它们分开，即 C_4 应通过原点. 又对位于 $m=-a$ 上方的 C_1 的点，对应的方程(13·3)的轨线图中有 $L_1^-=l_1^-$，且 L_2^+ 穿过 $\overline{MN}$ 而进入 O(图 13·23)，L_2^+ 与 l_1^- 的这一相对位置与 C_1 右方 $m=-a$ 上方邻近的点所对应者恰恰相反，故 C_4 应终止于 C_1 与 $m=-a$ 的交点 S. 实际上,S 所对应的方程(13·3)有

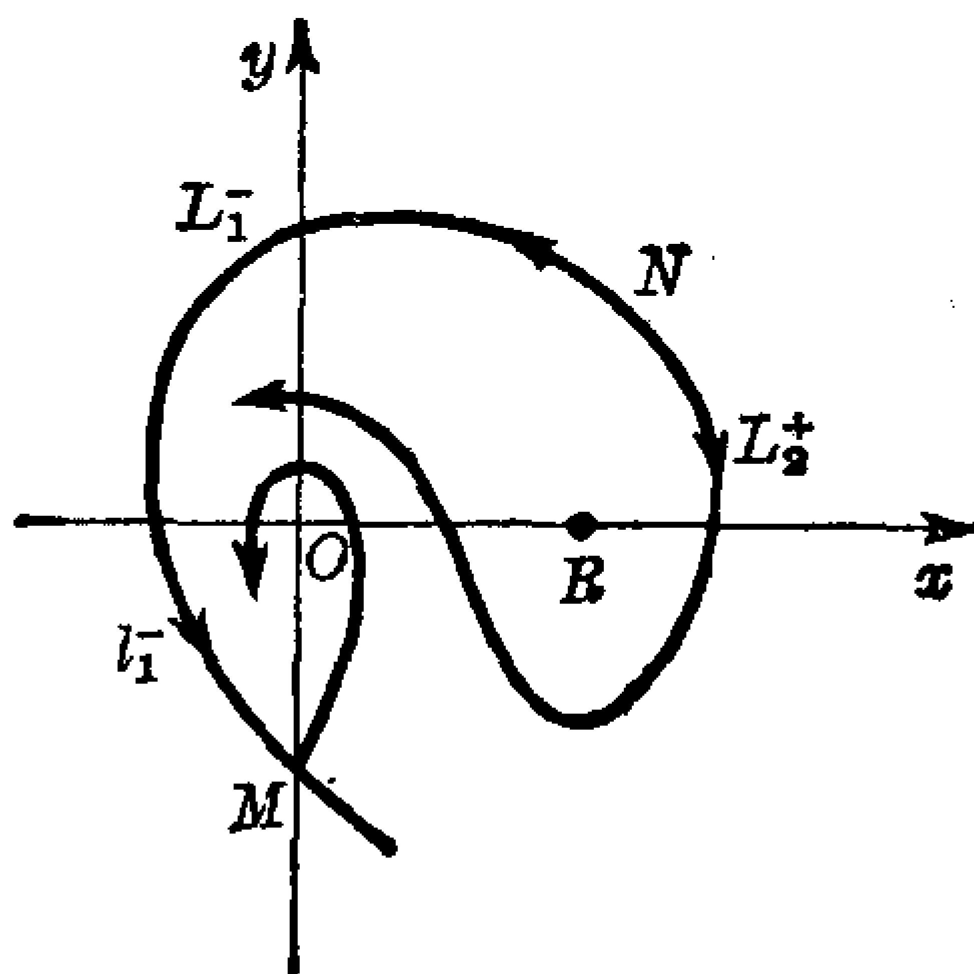


图 13·23

$$R=N,\ L_1^-=l_1^-,\ L_2^+=L_2^-=0,$$

把 L_2^+ 看作一点,把 L_1^- 看作 L_2^+ 的延续，便有 $L_2^+=l_1^-$. 定理证毕.

相信参数平面$(a,\ m)$上的分歧曲线都已找到了(图 13·11)，并且都是可微曲线. 至于 $C_1,\ C_2,\ C_4$ 究竟是代数曲线还是超越曲线,其解析表达式如何,还是悬而未决.

由图 13·11 回头来看图 13·1,可知在条件

$$m<\frac{1}{a}-a,\ 27a>4m^3$$

之下,L_1^- 与 l_1^- 的相对位置确实还存在三种可能性，到底出现哪一种，要看点$(a,\ m)$是在 C_1 的左方、右方或 C_1 上面而定. 对于图 13·6, 13·7, 13·9, 13·10, 情况也是一样. 至此方程(13·3)的轨线的全局结构问题总算初步得到解决了.

关于 $C_1,\ C_2,\ C_4$ 是否只有如图 13·11 所画的唯一分支，目前已经有些结果. 在[206]中把(13·3)经过变换化为

$$\frac{dx}{dt}=-y(1+y-mx)+mx,\quad \frac{dy}{dt}=x(1+ax),$$

然后应用旋转向量场的理论证明：C_2 只有一支，且无内点．又若在(13·3)中令 $m=ka(k>0$, 固定)，而让参数 a 变动，则同样由旋转向量场的理论可证：图 13·11 中位于 a 轴下方的 C_1 只有一支，且无内点．

估计 C_1, C_2^*, C_4 的唯一性问题当可用解对参数求导公式以及隐函数定理来解决，曹玉林同志正在这方面开展研究，又存在两个细焦点的 II 类方程(因而无极限环)：

$$\frac{dx}{dt}=-y+\frac{m(m+2a)}{4}x^2+mxy+y^2,\quad \frac{dy}{dt}=x(1+ax) \quad (13\cdot21)$$

的分歧曲线问题，在多数情况下已得到较为圆满的结果．注意图 13·10 也属于两个细焦点的情况，但不包含在(13·21)之内．又此图所对应的分歧曲线正好是图 13·11 中直线 $m=-a$ 上方由 C_1, C_2^*, C_4 构成的弯曲三角形．

研究二次系统的轨线的全局结构和分歧曲线的(不一定是 II 类方程)还有下列工作：

[208]与[209]分别研究了方程

$$\frac{dx}{dt}=-y+lx^2+ny^2,\ \frac{dy}{dt}=x(1+ax+by)$$

当 $a(b+2l)\neq0$ (从而没有闭轨线，证明见 § 15 开头)时，且 $-y+lx^2+ny^2=0$ 分别为椭圆或抛物线以及为双曲线时的全局结构和分歧曲面，但结果不及本节那样完整．

[206]研究了方程

$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+mxy-y^2,\quad \frac{dy}{dt}=x(1+ax)$$

的轨线的全局结构和分歧曲面．

[210]则研究了方程

$$\frac{dx}{dt}=-y+lx^2+mxy-y^2,\quad \frac{dy}{dt}=x(1+ax)$$

的同一问题．

[211]研究了具有三条直线解的二次系统的全局结构. [174]研究有三阶细焦点的无环系统

$$\frac{dx}{dt}=-y+lx^2+5axy,\quad \frac{dy}{dt}=x+ax^2+3lxy$$

的全局结构和相图.

习　　题

1. 证明定理13·1.

2. 作出 $n=0$ 时方程(13·1)的一切轨线全图.

3. 证明本节最后关于 C_2 与 C_1 的下半支的唯一性.

4. 证明方程(13·3)除一细焦点(0, 0)外, 如果没有高阶奇点, 则必有一细鞍点(即发散量在此鞍点之值为零)或细焦点.

5. 试借变换 $a'=\frac{1}{a}$, $b'=\frac{m}{b}$, $x=-a'y'$, $y=a'x'$ 将方程(13·3)化为III类方程再分析全局结构的办法证明: 沿着分歧曲线 C_1 的下半支跑向无限远时有 $m/a\to+\infty$.

6. 证明沿着分歧曲线 C_2 的上半支当 $a\to-\infty$ 时有 $m/a\to0$.

7. 证明在图13·11的角域 $0<-a<m$ 中可作一个不保持定向的拓扑变换 T, 把每一从原点出发的半射线变为另一半射线, 把 C_1 的开弧 $\widehat{SG}$ 变为 C_2^*, 把 C_4 变为它自己, 且 T 在直线 $m=-2a$ 上为恒等变换.

8. 对方程 $\frac{dx}{dt}=-y+lx^2+mx+ny^2$, $\frac{dy}{dt}=x(1+ax)$ 找出使两鞍点的连线为积分直线的充要条件.

9. 证明当 δ 满足 $a\delta^3-2am\delta^2+(am^2+3a-m)\delta+1-am-a^2=0$ 时方程 $\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+mxy-y^2$, $\frac{dy}{dt}=x(1+ax)$ 以某一 $\overline{MA_i}$ 为积分直线, 这里 M 是鞍点(0, -1), A_i 是无限远奇点. 又此方程有三个实根的条件是 $27a-4m^3>0$ (设 $a<0$).

10. 试求方程(13·3)的通过 M, N 而主轴通过 A_2 的抛物线解, 证明这种解只有当 $a=-\sqrt{\frac{3}{2}}$, $m=-\frac{5}{\sqrt{6}}$ 时才存在$\left(\text{因此}C_1\text{的下半支通过点}\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},\ -\frac{5}{\sqrt{6}}\right)\right)$.

§14. 第II类方程的极限环的相对位置以及唯一性，唯二性

本节将研究§13开头所说的第二个和第三个问题. 先从较简单的情况看起. 设在II类方程

$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2,\quad \frac{dy}{dt}=x(1+ax) \qquad (14\cdot1)$$

中，第一个方程右方二次项的系数中有两个为零，则得方程

$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+ny^2,\quad \frac{dy}{dt}=x(1+ax); \qquad (14\cdot2)$$

$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+mxy,\quad \frac{dy}{dt}=x(1+ax); \qquad (14\cdot3)$$

$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+lx^2,\quad \frac{dy}{dt}=x(1+ax). \qquad (14\cdot4)$$

易见(14·2)与(14·3)当$\delta=0$时可积分，以(0, 0)为中心点；又它们当$\delta\neq0$时没有极限环，这是因为(14·2)的发散量为常数δ，而(14·3)可借Dulac函数$\dfrac{1}{1-mx}$来证明它没有极限环. 至于(14·4)，情况就不大一样. 不妨假设其中$l>0$, $a>0$, 于是不难用我们熟知的方法证明：当

$$\delta\leqslant0 \text{ 或 } \delta\geqslant\frac{l}{a}$$

时(14·4)没有极限环，而当$\delta al>0$且δ在某一区间$(0,\ \delta^*)$中时(14·4)有唯一的极限环.

下面着重研究(14·1)的第一个方程右方二次项的系数中只有一个为零的情况.

(一) $l=0$. 这时有方程(不妨设$n=-1$)

$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+mxy-y^2,\ \frac{dy}{dt}=x(1+ax). \qquad (14\cdot5)$$

先证明一个不存在闭轨线与奇闭轨线的有用的定理.

定理 14·1 方程(14·5)(不妨设其中 $a<0$)当

1) $m\delta\leqslant0,\ |m|+|\delta|\neq0,$

或 2) $\delta(m-\delta)\leqslant0,\ |m|+|\delta|\neq0$

时无闭轨线与经过一个鞍点的奇闭轨线[1)].

【证】 当第一组条件成立时，易见方程(14·5)的任一闭轨线或只经过一个鞍点的奇闭轨线都不可能和直线 $1-mx=0$ 相交. 今取 Dulac 函数为

$$B=\frac{1}{1-mx},$$

则有
$$\frac{\partial}{\partial x}(BP)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ)=\frac{\delta-my^2}{(1-mx)^2},$$

上式右边在直线 $1-mx=0$ 的任何一边都保持常号，故定理得证.

现在假设第二组条件成立，把 x 轴平移到直线

$$y=-\frac{\delta}{m}$$

($m=0$ 的情况已见(14·2)，故不妨设 $m\neq0$)，y 轴不变. 则(14·5)化为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\delta}{m}\left(1-\dfrac{\delta}{m}\right)+\left(1+\dfrac{2\delta}{m}\right)y+mxy-y^2,\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=x(1+ax).\end{cases} \qquad (14\cdot6)$$

(14·6)关于新的 x 轴的对称向量场的方程是

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\delta}{m}\left(1-\dfrac{\delta}{m}\right)-\left(1+\dfrac{2\delta}{m}\right)y-mxy-y^2,\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=-x(1+ax).\end{cases} \qquad (14\cdot7)$$

1) 这定理首先由[212]得到，但这里用的是[213]中的证法，这种方法最先见于[16].

两方程的轨线相切之点的轨迹易见为

$$x=0,\ 1+ax=0,\quad 及\quad \frac{\delta}{m}\left(1-\frac{\delta}{m}\right)-y^2=0. \qquad (14\cdot 8)$$

由于(14·6)的发散量仅在 x 轴上等于零，故任何闭或奇闭轨线 Γ 都必和 x 轴相交. 又由 §11 的定理知道，如果 Γ 出现在 (0, 0)外围，则它不能和 $1+ax=0$ 相遇. 又当 $\delta(m-\delta)<0$ 时 (14·8) 的最后一方程无实的轨迹，当 $\delta(m-\delta)=0$ 时它的轨迹就是 x 轴. 由此可见，Γ 在 x 轴上方的部分 Γ^+ 关于 x 轴的对称线与 Γ^-(Γ 在 x 轴下方的部分) 除了在 x 轴上以外别无公共点，即 Γ^+ 的对称线应整个位于 Γ^- 的上方 (或下方). 这样，对方程 (14·6)的闭或奇闭轨线 Γ 应有

$$\iint\limits_{\text{int}\Gamma}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint\limits_{\text{int}\Gamma} my\,dx\,dy\neq 0,$$

这个矛盾就证明了 Γ 不可能存在.

同理可知: 在 $1+ax=0$ 上的另一指标为 $+1$ 的奇点外围也不可能存在闭或奇闭轨线，定理证毕.

下面的坐标变换对我们今后的讨论是有用处的. 注意直线 $1+ax=0$ 上的两奇点是:

$$R\left(-\frac{1}{a},\ \frac{1}{2}\left[-1-\frac{m}{a}-\sqrt{\left(1+\frac{m}{a}\right)^2-\frac{4\delta}{a}}\right]\right),\ 指标\ +1;$$

$$N\left(-\frac{1}{a},\ \frac{1}{2}\left[-1-\frac{m}{a}+\sqrt{\left(1+\frac{m}{a}\right)^2-\frac{4\delta}{a}}\right]\right),\ 指标\ -1.$$

把坐标原点移到 R 去，得

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=(\delta+my_2)x-\left(1+\dfrac{m}{a}+2y_2\right)y+mxy-y^2,\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=-x+ax^2,\end{cases} \qquad (14\cdot 9)$$

其中 y_2 表示 R 的纵坐标. 再在(14.9)中作变换

$$x=-\left[\left(1+\frac{m}{a}\right)^2-\frac{4\delta}{a}\right]^{\frac{3}{4}}x',\ y=-\left[\left(1+\frac{m}{a}\right)^2-\frac{4\delta}{a}\right]^{\frac{1}{2}}y',$$

$$t=-\left[\left(1+\frac{m}{a}\right)^2-\frac{4\delta}{a}\right]^{-\frac{1}{4}}t' \tag{14·10}$$

即得

$$\begin{cases}\dfrac{dx'}{dt'}=-y'+\delta'x'+m'x'y'-y'^2,\\[2ex]\dfrac{dy'}{dt'}=x'(1+a'x'),\end{cases} \tag{14·11}$$

其中 $\delta'=\dfrac{-(\delta+my_2)}{\left[\left(1+\frac{m}{a}\right)^2-\frac{4\delta}{a}\right]^{1/4}},\quad a'=a\left[\left(1+\frac{m}{a}\right)^2-\frac{4\delta}{a}\right]^{\frac{3}{4}},$

$$m'=m\left[\left(1+\frac{m}{a}\right)^2-\frac{4\delta}{a}\right]^{\frac{1}{4}}. \tag{14·12}$$

根据定理 14·1 可知: 方程(14·5)在两个指标为 $+1$ 的奇点附近要出现极限环, 只有在

$$m\delta>0 \quad 且 \quad |\delta|<|m| \tag{14·13}$$

时才有可能. 下面要说明, 两个指标 $+1$ 的奇点附近能否同时存在极限环, 这一问题是和 m 与 a 的大小有密切关系的.

1. $m>-a>0$.

如图 13·10 所示, 当 $\delta=0$ 时 O 为稳定, R 为不稳定, M 与 N 为鞍点. 让 δ 从零增加, 则 O 变为不稳定, 根据 §3 定理 3·7 及 §12 定理 12·5 的证明中所说明的知道, 在 O 点附近出现唯一的稳定环. 另一方面, 直线 $1+ax=0$ 上的两个奇点互相远离, 记为 R' 与 N'. 现在证明 R' 的稳定性也与 R 不同, 因而 R' 附近也出现唯一的不稳定环[1]. 为此, 注意当 $m>-a>0$ 且 $|\delta|$ 甚小时有

$$\delta+my_2=\delta-\frac{m}{2}\left[1+\frac{m}{a}+\sqrt{\left(1+\frac{m}{a}\right)^2-\frac{4\delta}{a}}\right]$$

1) 这里所指的环的唯一性都只限于 $|\delta|$ 足够小的时候.

$$=\delta-\frac{m}{2}\left[1+\frac{m}{a}-\left(1+\frac{m}{a}\right)\left(1-\frac{2\delta}{a\left(1+\frac{m}{a}\right)^2}\right)\right]+O(\delta^2)$$

$$=\frac{a\delta}{a+m}+O(\delta^2)<0,$$

其中 y_2 是 R' 的纵坐标. 故由 (14·11) 与 (14·12) 即知 R' 为 (14·9)的稳定焦点[1].

因此在 $m>-a>0$ 且 $0<\delta\ll 1$ 时 O 与 R' 两奇点附近同时存在极限环, 稳定性彼此不相同. 当 δ 不断增大时这两极限环是否同时消失, 则不得而知. 今假设 O 点附近的极限环当其存在时恒为唯一, 且在 $\delta=\bar{\delta}$ 时扩大而成为通过 M 的分界线环(注意当 δ 变动时(14·5)在直线 $1+ax=0$ 的每一边构成广义旋转向量场, 故 δ 增加时图 13·10 中的两分界线 l_1^+ 与 l_1^- 相互接近而重合是没有问题的), 则 $\bar{\delta}$ 显然应是 m 与 a 的函数 $\bar{\delta}=f(m, a)$. 于是由(14·11)知道, 使 R' 附近的极限环扩大而成为通过 N' 的分界线环的 δ' 的值 $\bar{\delta}'$ 应是 m' 与 a' 的同一函数, 即应有 $\bar{\delta}'=f(m', a')$. 能否把这个函数 f 找出来是个值得考虑的问题. 当然, 每一奇点外围的极限环的唯一性也有待证明. [215] 中只证明了当 $m>-2a$, $1+4am\geqslant 0$ 时极限环的唯一性, 除此以外, 别无其他结果.

2. $0<m\leqslant -a$.

先看 $0<m<-a$ 的情况[2]. 当 $\delta=0$ 时 $N\left(-\frac{1}{a}, 0\right)$是鞍点, 而 $R\left(-\frac{1}{a}, -\frac{a+m}{a}\right)$在 N 下方是焦点. 若 δ 从 0 增大, 则 N' 与 R' 互相远离. 由于当 $\delta=0$ 时,

$$\delta+my_2=-m\left(1+\frac{m}{a}\right)<0,$$

故 R' 最初仍保持为稳定. 现在问: δ 继续增加时 R' 的稳定性是

1) 这事实也可由等倾线的图形看出, 因为现在 $P_2(x, y)=0$ 的上支经过 O 与 N', 在 $\delta+my=0$ 的上方; 下支经过 M 与 R', 在 $\delta+my=0$ 的下方.

2) 在 $\delta=0$ 时全局轨线图有图 13·6, 13·7 和 13·8 等三种可能.

否会改变？在什么时候改变？显然可见，R' 的稳定性要改变的必要条件是 $\delta'=0$，即

$$\delta+my_2=\delta-\frac{m}{2}\left[1+\frac{m}{a}+\sqrt{\left(1+\frac{m}{a}\right)^2-\frac{4\delta}{a}}\right]=0.$$

解此方程，得到 $\delta=m$，又

$$\left.\frac{\partial\delta'}{\partial\delta}\right|_{\delta=m}=-\left[\frac{a-3\delta+\dfrac{3m}{2}+\dfrac{m^2}{2a}+\dfrac{m}{2}\sqrt{\left(1+\dfrac{m}{a}\right)^2-\dfrac{4\delta}{a}}}{a\left[\left(1+\dfrac{m}{a}\right)^2-\dfrac{4\delta}{a}\right]^{5/4}}\right]_{\delta=m}$$

$$=\frac{-1}{\left(1-\dfrac{m}{a}\right)^{3/2}}<0. \qquad (14\cdot14)$$

故当 δ 由 m 增加时，δ' 由零减少，即 R' 作为(14·11)的奇点由不稳定变为稳定，因而作为原方程(14·5)的奇点，应是由稳定变为不稳定. 但是根据定理 14·1 知道，在 $\delta\geqslant m$ 时 R' 外围已不存在闭轨线，故由 §3 定理 3·7 知道，当 δ 由小于 m 而趋于 m 时有一个不稳定极限环缩小（不一定单调缩小）而趋于 R'. 这个不稳定环是怎样产生的呢？有几种可能[1]：

(i) 由经过 N' 而包围 R' 的分界线环产生；

(ii) 由经过 M 与 N' 两点而包围 R' 的分界线环产生；

(iii) 由 R' 外围突然出现的半稳定环分裂所产生.

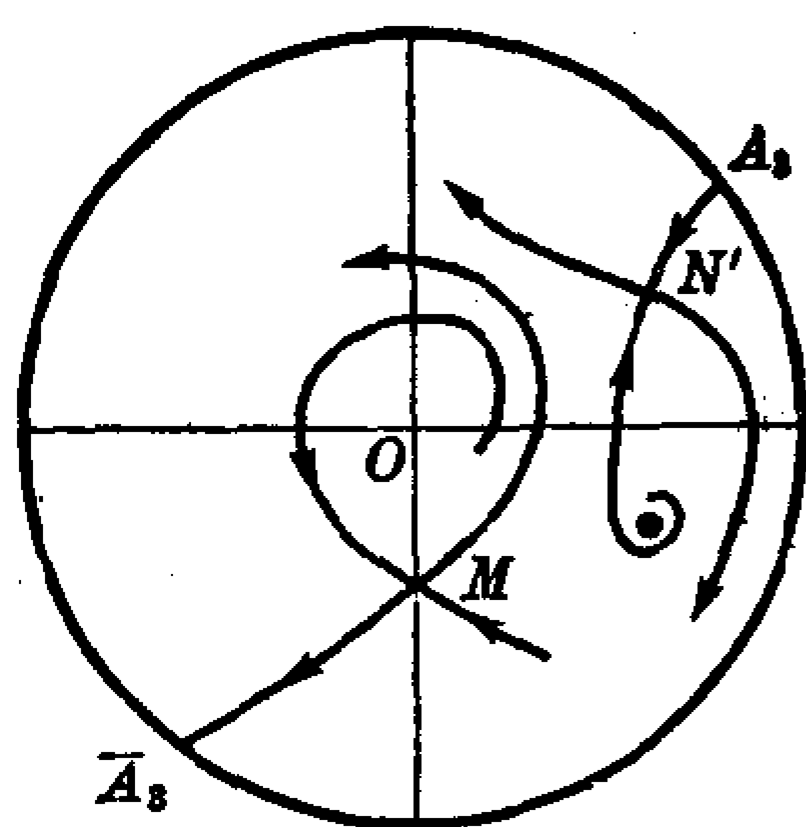
到底属于哪一种情况，要看 m 与 $\frac{1}{a}-a$ 的大小关系以及 m 与 $1+a$ 的大小关系而定. 事实上，当 $\delta=m=1+a$ 时 R' 的坐标为 $\left(-\frac{1}{a},\ -1\right)$，这时方程(14·11)中的系数

$$m'=m\sqrt{-\frac{1}{a}}=(1+a)\sqrt{-\frac{1}{a}},$$

1) 此不稳定环不可能由经过 M 而包围 R' 的分界线环产生，理由见后面的(14·16)式.

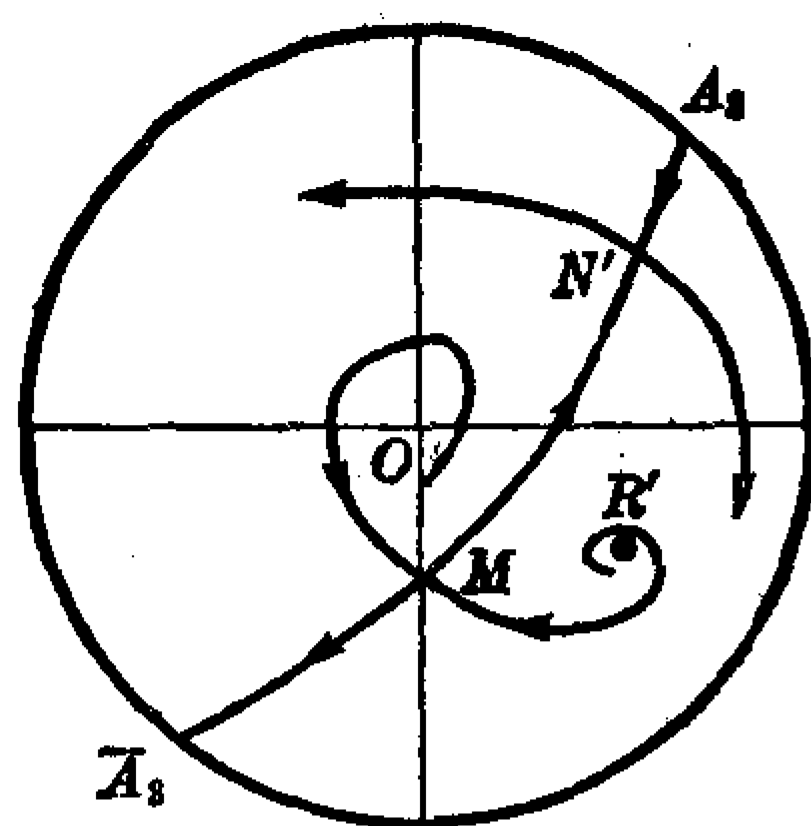
$$a' = a\left(-\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = -\sqrt{-\frac{1}{a}}.$$

由此可见
$$m' = \frac{1}{a'} - a',$$
即此时 $\overline{MN'}$ 已成为积分直线，而且当 $\delta = m$ 时由
$$m' < \frac{1}{a'} - a'$$
可推出 $m > 1 + a$，由
$$m' > \frac{1}{a'} - a'$$
可推出 $m < 1 + a$. 这样，仿前可画出 $0 < m < -a$ 时的三个图(图 14·1, 14·2, 14·3)，它们依次对应于



$m = \delta < 1 + a,\ 0 < m < -a$

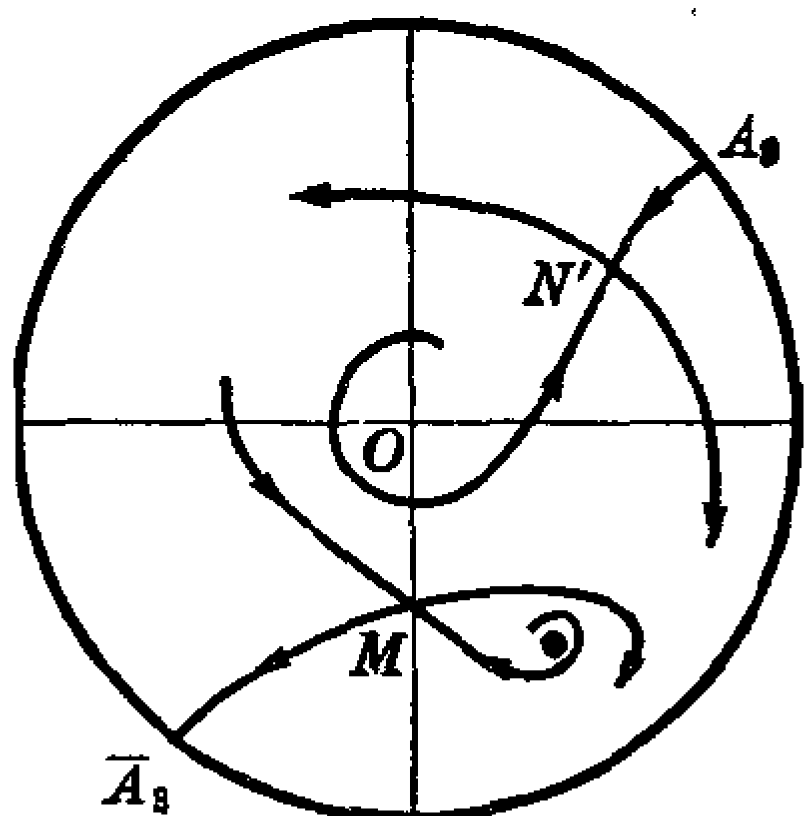
图 14·1



$m = \delta = 1 + a,\ 0 < m < -a$

图 14·2

$$m = \delta < 1 + a,\ m = \delta = 1 + a,\ m = \delta > 1 + a.$$



$m = \delta > 1 + a,\ 0 < m < -a$

图 14·3

且容易看出：当
$$0 < m \leqslant \frac{1}{a} - a$$
时必有 $a < -1$，从而 $m > 1 + a$；而当
$$m > \frac{1}{a} - a,$$
且 $m > 0\left(\text{但 } \frac{1}{a} - a \text{ 不一定为正}\right)$ 时，则 $m > 1 + a$, $m = 1 + a$ 与 $m < 1 + a$ 等三

种关系都可能存在.

现在来看由

$$0<m\leqslant\frac{1}{a}-a,\quad \delta=0$$

时的图 13·6 与 13·8 变到 $m=\delta>1+a$ 的图 14·3 时，两奇点外围的极限环和分界线的变化情况. 由于当 δ 变动时(14·5)在 $1+ax=0$ 的任何一边构成广义旋转向量场，故当 δ 从零增大时，一方面 O 点从不稳定变为稳定，附近产生稳定极限环；另一方面，过 N' 而包向 O 的两条分界线则互相接近而趋于重合. 注意到

$$\left(\frac{\partial P_2}{\partial x}+\frac{\partial Q_2}{\partial y}\right)_{N'}=\delta+my_1>0,\tag{14·15}$$

其中 $y_1>0$ 是 N' 的纵坐标，可见当两分界线重合而形成的奇闭轨线应是内侧不稳定的. 因此，它不可能是 O 点外围的稳定环扩大到达 N' 而形成的. 相反的，应是过 N' 的分界线环先形成，然后这两分界线交换位置，由分界线环产生一个不稳定环，它随 δ 的增大而向里面收缩，最后和里面向外扩张的极限环重合成为半稳定环而消失. 当然，在这里我们假设在 δ 的增大过程中在 O 外围不会突然无中生有地出现一个或多个半稳定环，然后分裂，有的扩大，有的缩小(我们猜测，大概不会出现这种情况). 于是对于 O 的外围来说，在 $(0, m)$ 区间中一定存在 δ 的两个值 $0<\delta_1<\delta_2<m$，使当 $\delta=\delta_1$ 时形成过 N' 的分界线环，而当 $\delta=\delta_2$ 时形成半稳定环. 于是对 $(0, \delta_1)$ 中的 δ，O 外围有唯一的稳定环；对 (δ_1, δ_2) 中的 δ，O 外围有且只有两个极限环，外面是不稳定环，里面是稳定环；对 $\delta>\delta_2$，O 外围没有极限环.

其次再看 R' 外围的分界线是怎么变的. 由于 $\overline{MN'}$ 上轨线的穿过方向总是从左到右，显而易见，在 δ 从 0 变到 m 的过程中，至少有一值 $\delta_1^*<m$，使得经过 M 而包向 R' 的两条分界线重合而成为分界线环. 另一方面可以算出

$$\left(\frac{\partial P_2}{\partial x}+\frac{\partial Q_2}{\partial y}\right)_{(0,-1)}=\delta-m<0. \qquad (14\cdot 16)$$

故此分界线环应为内侧稳定. 由此可见, 当 $\delta\uparrow m$ 时缩向 R' 的不稳定环不可能是由上述分界线环产生的. 相反, 必定是在 $\delta_2^*(<\delta_1^*)$ 时 R' 外围突然产生一个半稳定环, 它在 $\delta>\delta_2^*$ 时分裂为至少两个极限环, 外部是稳定环, 它逐渐扩大, 在 $\delta=\delta_1^*$ 时成为通过 M 的分界线环, 然后消失; 内部是不稳定环, 它在 $\delta=m$ 时缩为一点 $R'\left(-\frac{1}{a},\ -1\right)$, 而使 R' 改变了稳定性.

然而以上的分析并不能确定 O 与 R' 外围是否能同时存在极限环, 即使能比较 δ_2 与 δ_2^* 的大小也没有用, 因为方程(14·11)虽然与方程(14·5)形状相同, 但 m', a' 与 m, a 的值以及 $\frac{m'}{a'}$ 与 $\frac{m}{a}$ 都不一样. 为了解决上述问题, 注意当

$$\delta=\frac{m^2+2am}{4a} \qquad (14\cdot 17)$$

时有 $\sqrt{\left(1+\frac{m}{a}\right)^2-\frac{4\delta}{a}}=1$, 从而 $a'=a$, $m'=m$, $\delta'=\delta$, 即这时(14·11)与(14·5)完全相同了. 因此 O 外围轨线的结构与 R 外围也完全一样. 但这事实仅当下列四种情况为可能:

a) O 外围已无极限环, R 外围尚未产生极限环;

b) O 与 R 外围都有唯一的单重环;

c) O 与 R 外围都有半稳定环;

d) O 与 R 外围都有两个环, 形状也完全一样.

如果发生情况 a), 则显见对任何 δ, O 与 R 外围不能同时存在极限环, 如果发生情况 c) 或 d), 那末我们就有了一个(2·2)分布的例子, 因为即使在情况 c), 一个半稳定环也可视为是两个单重环叠合而成的, 恰如代数方程的重根. 这问题最近已在[216]中得到解决, 答案是 a) 成立. 他先把方程(14·5)化为 §12 所介绍的 Черкас [192] 的(A)类方程

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=1+xy,\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2,\end{cases}\tag{14·18}$$

然后再按[192]的办法作变换

$$Y=\frac{y^2}{x}+\frac{1}{x^2},\quad \xi=\frac{1}{x}$$

以及变换 $Y=|\xi|^{1-a_{02}}z,\ \xi=\xi$, 把(14·18)化成 Liénard 型方程:

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dt}=P_4(\xi)|\xi|^{2a_{02}-3}\operatorname{sgn}\xi+zP_2(\xi)|\xi|^{a_{02}-2}\operatorname{sgn}\xi,\\[2ex]\dfrac{d\xi}{dt}=z,\end{cases}\tag{14·19}$$

其中 $P_2(\xi)$ 与 $P_4(\xi)$ 分别为 ξ 的二次与四次多项式. 最后, [216] 利用条件 (14·17) 证明, 此时 (14·19) 的发散量为定号, 从而不存在极限环, 这就说明对任何 δ, O 与 R 外围不能同时存在极限环.

其次再看

$$0<\frac{1}{a}-a<m<-a$$

(这时必须 $a<-1$ 从而必有 $m>1+a$), 当 δ 从零增大到 m, 轨线图是怎样由图 13·7 变到图 14·3 的. 这时从 O 产生一个稳定环, 不断扩大. 另一方面, 过 M 而包向 O 的两条分界线互相接近而趋于重合. 由于(14·5)的发散量在 M 点恒取负值(当 $0\leqslant\delta<m$), 故在 O 外围必有奇数个极限环. 我们猜想当极限环存在时应是唯一的, 亦即: 由 O 产生的稳定环一直扩大到通过 M 而成为分界线环, 然后消失. 在这以后, 过 M 的两分界线 l_1^- 与 l_1^+ 交换位置, 而 O 点外围不再有闭或奇闭轨线了. 但唯一性尚未能证明.

至于 R' 外围, 情况就比较复杂. 当 δ 从 0 增加时, 过 N' 而包向 R' 的两分界线向不同的方向旋转, 它们有可能重合成为经过 N' 的分界线环, 但也有可能直到左边一分界线与从 M 向右上方出

发的分界线重合成为积分直线$\overline{MN'}$时，右边的分界线还未能赶上与它重合．在前一情况，由(14·15)知分界线环将产生一不稳定环，它当$\delta\uparrow m$时缩向R'，这就是前面所说的情况(i)．在后一情况，又可能出现两种不同的情形：一种是：当$\overline{MN'}$成为积分直线时，从N'向右下方出去的分界线尚未与从右下方进入M的分界线交换位置，然后两条分界线L_2^+与l_1^+都进入R'，而l_2^+仍在L_2^+的外部，如图14·4所示．当δ继续增加时L_2^+与l_2^+重合，然后交换位置，于是l_2^+与l_1^+一起包围R'．根据(14·16)，如前一样讨论可知，这时R'外围将突然出现半稳定环，外部为稳定，内部为不稳定，这就是前面所说的情况(iii)．另一种情形是：当$\overline{MN'}$成为积分直线时，L_2^+与l_2^+也恰好重合，然后δ继续增加时这一经过两个鞍点的分界线环就产生一个不稳定环，这就是前面所说的情况(ii)．可以举例说明，上述三种不同的情况都是可能出现的[212]，并且显见情况(ii)是情况(i)到(iii)的过渡．

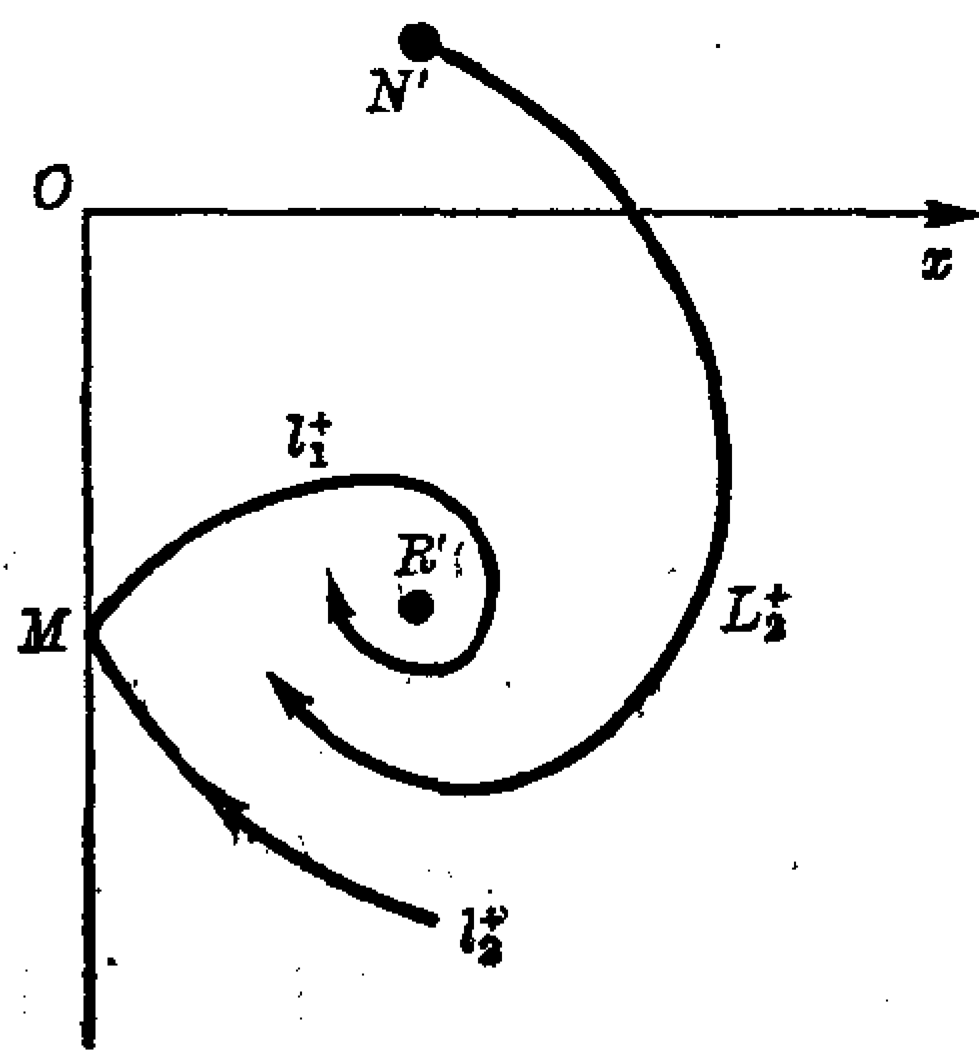


图 14·4

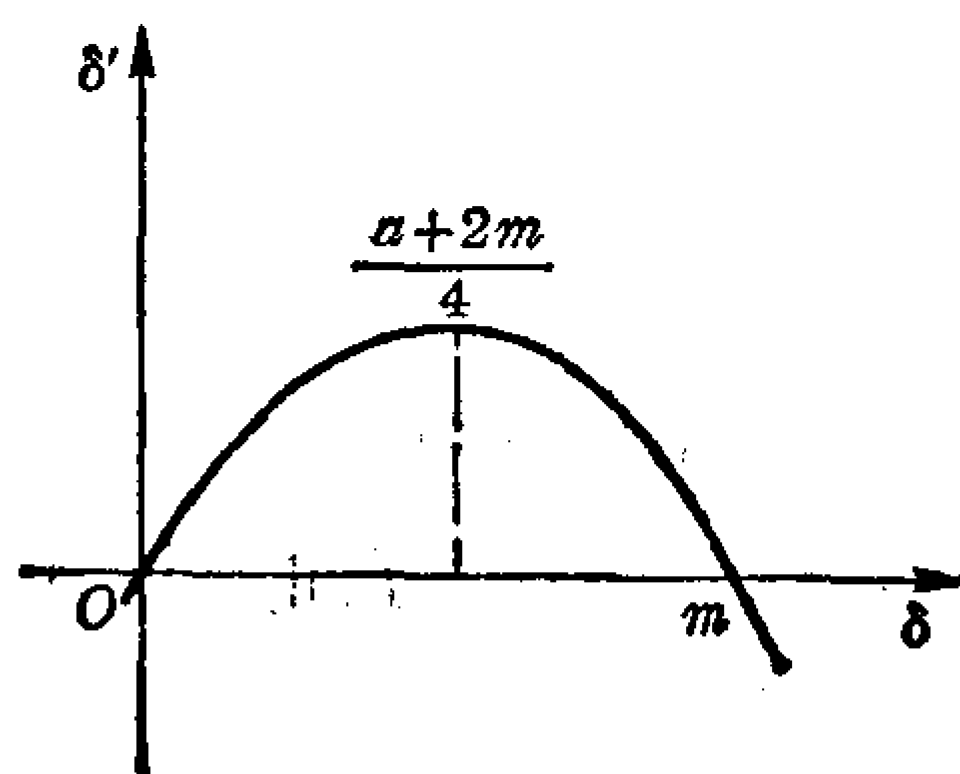


图 14·5

至于由$m>\frac{1}{a}-a$，$m>0$，$\delta=0$的图13·7变到$m=\delta\leqslant 1+a$的图14·1与14·2，则只能出现前面所说的情况(i)，这是显而易见的．特别，若$\frac{1}{a}-a>0$(即$a<-1$)，则[217]仍用前法证明O与R'外围不可能同时存在极限环．但这结论在$a\geqslant -1$时是否成

立，仍不得而知[1]。

以上的论证对于 $m=-a$ 也是适用的，因为当 $\delta=0$ 时虽然 $R=N$ 是高阶奇点，但当 δ 一变为正，N' 立刻与 R' 分开，而指标 $+1$ 的 R' 位于下方，它是稳定奇点，且当 $\delta=m$ 时它又变为不稳定。

以上分为 $m>1+a$, $m=1+a$, $m<1+a$ 三种情况的讨论方法同样可以应用于 $m>-a$ 的场合。因为当 $\delta=m$ 时所得的全局结构图和图 14·1, 14·2, 14·3 完全一样，只是现在出发的全局结构图不是图 13·6, 13·7, 13·8, 而是图 13·10 了。怎样变化请读者自己去分析。应注意，现在当 $\delta=0$ 及 $\delta=m$ 时都有 $\delta'=0$，且有

$$\left.\frac{\partial\delta'}{\partial\delta}\right|_{\delta=0}>0, \quad \left.\frac{\partial\delta'}{\partial\delta}\right|_{\delta=m}<0,$$

δ' 随 δ 而变化的情况如图 14·5 所示。

3. $a<m<0$。

当 $\delta=0$ 时 O 与 $R\left(-\dfrac{1}{a}, -\dfrac{a+m}{a}\right)$ 都是不稳定焦点。如果让 δ 从 O 减少，那末 O 点变为稳定，附近出现唯一的不稳定环。如前一样知道，R' 的稳定性在 $\delta=m$ 时才改变，并且 R' 与 N' 随 δ 的减少而互相接近，在 $\delta=m$ 时 R' 到达 $\left(-\dfrac{1}{a}, -1\right)$，且有一个稳定环缩小而趋于 R'。下面我们证明 O 与 R' 外围不可能同时存在极限环。

引理 14·1 当

$$\frac{\delta}{m}\geqslant\frac{1}{2}$$

时 O 点外围已不存在闭或奇闭轨线。

证法与定理 14·1 的第二部分几乎完全一样，从略。

---

1) 若只限制 $0<\delta<m<-a$，则用[27]的方法可证当 $m/2\leqslant\delta<m$ 或

$$0<\delta<\frac{m}{2}+\frac{m^2}{2a}$$

时，(14·5)的极限环是集中分布的，这里在两区间之间有一段空隙。

现在注意由(14·12)有

$$\frac{\delta'}{m'}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{m}{a}\right)-\frac{\delta}{m}}{\sqrt{\left(1+\frac{m}{a}\right)^2-\frac{4\delta}{a}}},\qquad (14\cdot20)$$

由此可见当 $\frac{\delta}{m}<\frac{1}{2}$ 时有 $\delta'/m'>\frac{1}{2}$. 故对方程 (14·11) 应用引理 14·1, 即知, 这时 R' 外围不存在闭或奇闭轨线. 换言之, 当 O 点附近有可能存在极限环时, R' 外围必定不存在极限环, 至于两奇点外围的极限环的个数的奇偶性可仿前一样讨论. 总之, 对于方程(14·5), 我们总是这样猜想: 如果一奇点外围的极限环为奇(偶)数个, 则必为唯一(唯二).

4. $m\leqslant a$.

如象3. 中一样令 δ 从 0 减少, 则 O 点附近出现不稳定环. 且 R' 与 N' 随 δ 的减少而互相接近. 若 $m=a$, 则在 $\delta=m$ 时 R' 与 N' 同时到达 $\left(-\frac{1}{a},\ -1\right)$ 而成为高阶奇点, 当 δ 再减少时 R' 与 N' 消失. 若 $m<a$, 则在 $\delta=m$ 时鞍点 N' 到达 $\left(-\frac{1}{a},\ -1\right)$, 其对应的 $\delta'=0$, 而 R' 所对应的

$$\delta'=m\left(1-\frac{m}{a}\right)>0,$$

故 R' 不改变稳定性. 当 δ 继续减少时 R' 与 N' 趋于重合, 然后消失. 由(14·20)容易看出, 由于现在

$$\frac{m}{a}\geqslant1,$$

故对 $[m,\ 0]$ 中的一切 δ 都有

$$\frac{\delta'}{m'}\geqslant\frac{1}{2},$$

即 R' 附近永远不会出现极限环.

总结以上所作的分析, 我们得到

定理 14·2 对方程 $(\mathrm{II})_{l=0}(a<0,\ m\neq0)$有

(i) 若 $m>-a>0$, 则两指标 $+1$ 的奇点外围可同时存在极限环;

(ii) 若
$$0<m<\frac{1}{a}-a,$$
则对 δ 在某一区间$(\delta_1,\ \delta_2)$, O 点外围至少有两个极限环; 对 δ 在另一区间$(\bar{\delta}_2,\ \bar{\delta}_1)$, R' 点外围至少有两个极限环. 但只要 $0<m\leqslant-a$, $-a>1$, O 与 R' 外围就不可能同时存在极限环;

(iii) 若 $a<m<0$, 则 O 与 R' 外围也不能同时存在极限环;

(iv) 若 $m\leqslant a$, 则在 R' 外围不会有极限环.

(二) $m=0$. 这时有方程
$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+lx^2+ny^2,\quad \frac{dy}{dt}=x(1+ax),\quad a\neq0. \tag{14·21}$$

不妨设 $a<0$, 又可化 n 为 1, 因而今后只研究[1)]
$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+lx^2+y^2,\quad \frac{dy}{dt}=x(1+ax),\quad a<0. \tag{14·22}$$

引理 14·2 当 $l\delta\geqslant0$ 而 $|l|+|\delta|\neq0$ 时方程 (14·22) 无闭轨线与奇闭轨线.

【证】 可取 Dulac 函数 e^{-2ly}, 证明从略.

容易算出当 $\delta=0$ 时对方程(14·22)有
$$\bar{v}_3=-\frac{\pi}{2}al,$$
即当 $l>0(<0)$时原点为不稳定(稳定)焦点, 从而当 $\delta<0(>0)$且 $|\delta|$充分小时在原点附近存在唯一的稳定(不稳定)极限环.

引理 14·3 原点外围的极限环当

---

1) 这一段主要介绍[179]的几条定理,对于方程(14·22), [218]也作过类似的研究,结果与[179]不完全一样.

$$\delta \leqslant \frac{l}{a} \quad (l>0) \quad 或 \quad \delta \geqslant \frac{l}{a} \quad (l<0)$$

时已消失，另一指标 $+1$ 的奇点外围也类似于此，但不等式改号.

【证】 当

$$\delta = \frac{l}{a}$$

时由(14·22)可得

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-y+y^2}{x(1+ax)} + \frac{l}{a}, \tag{14·23}$$

但

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-y+y^2}{x(1+ax)}$$

的积分曲线族在两个指标 $+1$ 的奇点外围都是闭曲线族(见 §13 的图 13·5). 由(14·23)看出，它们对于方程(14·22)的轨线来说是无切弧. 故此时(14·22)必不存在极限环. 然后由旋转向量场的理论即知，当

$$\delta < \frac{l}{a} \quad (l>0) \quad 或 \quad \delta > \frac{l}{a} \quad (l<0)$$

时原点外围也无极限环.

对另一指标 $+1$ 的奇点的论断可先用类似于(14·10)的变换，然后再进行讨论，并且也和本节(一)段

$$0 < m < \frac{1}{a} - a$$

的情况那样，可知应成立：

定理 14·3 方程(14·22)在两个指标为 $+1$ 的奇点外围不能同时存在极限环.

详细证明留给读者.

方程(14·22)最多有四个奇点，记为 $O(0,\ 0)$，$N(0,\ 1)$，$R\left(-\frac{1}{a},\ y_1\right)$，$A\left(-\frac{1}{a},\ y_2\right)$，其中

$$y_{1,2} = \frac{a \mp \sqrt{a^2 - 4(l-a\delta)}}{2a},$$

易知 N，A 为鞍点，O，R 为非鞍点，指标 $+1$

下面利用定理6·4(仍是它的特殊形式，即[111]的唯一性定理)来讨论方程(14·22)的极限环的唯一性问题. 由引理14·3我们知道，只要考虑 δ 的区间 $\left(\frac{l}{a},\ 0\right)$ 或 $\left(0,\ \frac{l}{a}\right)$ 即可. 若把(14·22)写成

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-y+y^2+\delta x+lx^2=-\varphi(y)-F(x), \\ \dfrac{dy}{dt}=x+ax^2=g(x), \end{cases}$$

其中 $\varphi(y)=y-y^2$, $\varphi'(y)=1-2y$, 则可见 $\varphi(y)$ 在区间

$$-\infty<y\leqslant\frac{1}{2}$$

中单调增加. 以 G 记平面区域

$$\left\{-\infty<x<-\frac{1}{a},\quad -\infty<y\leqslant\frac{1}{2}\right\},$$

而 $F(x)=-\delta x-lx^2$, $f(x)=F'(x)=-\delta-2lx$, 则有

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{1}{(x+ax^2)^2}[2lax^2+2a\delta x+\delta].$$

故当 $l>0$, $\delta<0$ 时只要

$$\delta\geqslant\frac{2l}{a},$$

就有 $(f(x)/g(x))'\leqslant 0$, 而当 $l<0$, $\delta>0$ 时只要

$$\delta\leqslant\frac{2l}{a},$$

就有 $(f(x)/g(x))'\geqslant 0$. 因此只有这样的参数 $(a,\ l,\ \delta)$，它们能使对应的方程(14·22)的极限环全部位于区域 G 内，我们才能利用定理6·4来证明极限环的唯一性. 下面将给出参数 $(a,\ l,\ \delta)$ 所满足的一些条件，使能保证方程(14·22)的围绕原点的极限环必全部位于区域 G 中[1].

定理 14·4 当 $l>0$, $a^2(a^2-4l)-16\geqslant 0$ (即 $a^2\geqslant 2l+2\sqrt{l^2+4}$)

1) 以下五个定理见[179]与[218].

时方程(14·22)最多只有一个极限环(不稳定环).

【证】 记经过鞍点 $A\left(-\frac{1}{a},\ y_2\right)$的两条无切直线为

$$L_{1,2}=y-K_{1,2}\left(x+\frac{1}{a}\right)-y_2=0,$$

其中

$$K_{1,2}=\frac{1}{2\alpha}(-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha}),$$

$$\alpha=2y_2-1,\quad \beta=\delta-\frac{2l}{a}.$$

K_1 和 K_2 是方程 $\alpha K^2+\beta K+1=0$ 的两根. 由于 $\alpha<0$, $\beta>0$(因为由引理 14·3, 在 $l>0$ 时不妨设

$$\delta>\frac{l}{a},$$

从而

$$\beta>-\frac{l}{a}>0),$$

故有 $K_1<0$, $K_2>0$. 又易见当 $\delta\in\left(\frac{l}{a},\ 0\right)$时有 $y_2\geqslant 0$. 设无切直线 L_1 与 y 轴交于 y_{10}, 显见 $y_{10}>0$. 因为原点外围的极限环的最高点必在 y 轴上, 而且它不能与 L_1 相交, 因此只要

$$y_{10}\leqslant\frac{1}{2},$$

便可保证绕原点的极限环必全部落在区域 G 中了. 要

$$y_{10}\leqslant\frac{1}{2},$$

易见只须

$$H(\delta)=\delta^3+\frac{5a^2-4l}{4a}\delta^2+\frac{a^2-2l}{2}\delta+\frac{a^2(a^2-4l)-16}{16a}\leqslant 0. \tag{14·24}$$

令 $H'(\delta)=0$, 得两根为

$$\delta_1=\frac{2l-a^2}{3a},\quad \delta_2=-\frac{a}{2}.$$

在定理的条件下有 $\delta_1>0$, $\delta_2>0$, 又因 $H(0)\leqslant 0$, 因此对于所有的 $\delta<0$, 不等式(14·24)都成立. 定理证毕.

对于 $a^2(a^2-4l)-16<0$ 的情况，由于这时 $H(0)>0$，因此不等式(14·24)不是对所有的 $\delta<0$ 都成立. 设 δ_3 是 $H(\delta)=0$ 的唯一的负根，则只有当 $\delta<\delta_3$ 时才有 $H(\delta)<0$. 适当的估计 δ_3 的值，可以得到下一定理：

定理 14·5　当 $l>0$,

$$\delta-\frac{l}{a}\leqslant-\frac{a}{8}\left(1+\frac{l-4}{a^2+l}\right)$$

时，方程(14·22)至多有一个极限环(不稳定).

证略，请参看作者原来的论文[179].

定理 14·6　当 $l<0$, $a^2+4l\geqslant4$ 时方程(14·22)最多有一个极限环(稳定环).

【证】 记无切直线 L_1 与 y 轴的交点为 $\bar{y}_1$，易见有 $\bar{y}_1>0$. 如前只须证明

$$\bar{y}_1\leqslant\frac{1}{2}.$$

由定理 14·4 的证明知道，只需不等式(14·23)成立，且 $\delta\leqslant\min(\delta_1, \delta_2)$. 在本定理的条件下显见有 $a^2(a^2-4l)-16>0$，因此 $H(0)<0$. 故 $H(\delta)=0$ 至少有一正根，设其最小正根为 δ_4. 由定理的条件知

$$H\left(\frac{l}{a}\right)<0,$$

且
$$\frac{l}{a}<\frac{2l-a^2}{3a}<-\frac{a}{2},$$

又容易计算
$$H\left(-\frac{a}{2}\right)>0,$$

从而 $-\frac{a}{2}$ 是 H 的极小值点，$\frac{2l-a^2}{3a}$ 是 H 的极大值点，所以 δ_4 应在 $\frac{l}{a}$ 与 $\frac{2l-a^2}{3a}$ 之间(见图 14·6). 因而当 $\delta<\frac{l}{a}$ 时不等式(14·24)一定成立，且 $\delta\leqslant\min(\delta_1, \delta_2)$. 再由引理 14·3 即知定理的结论成立.

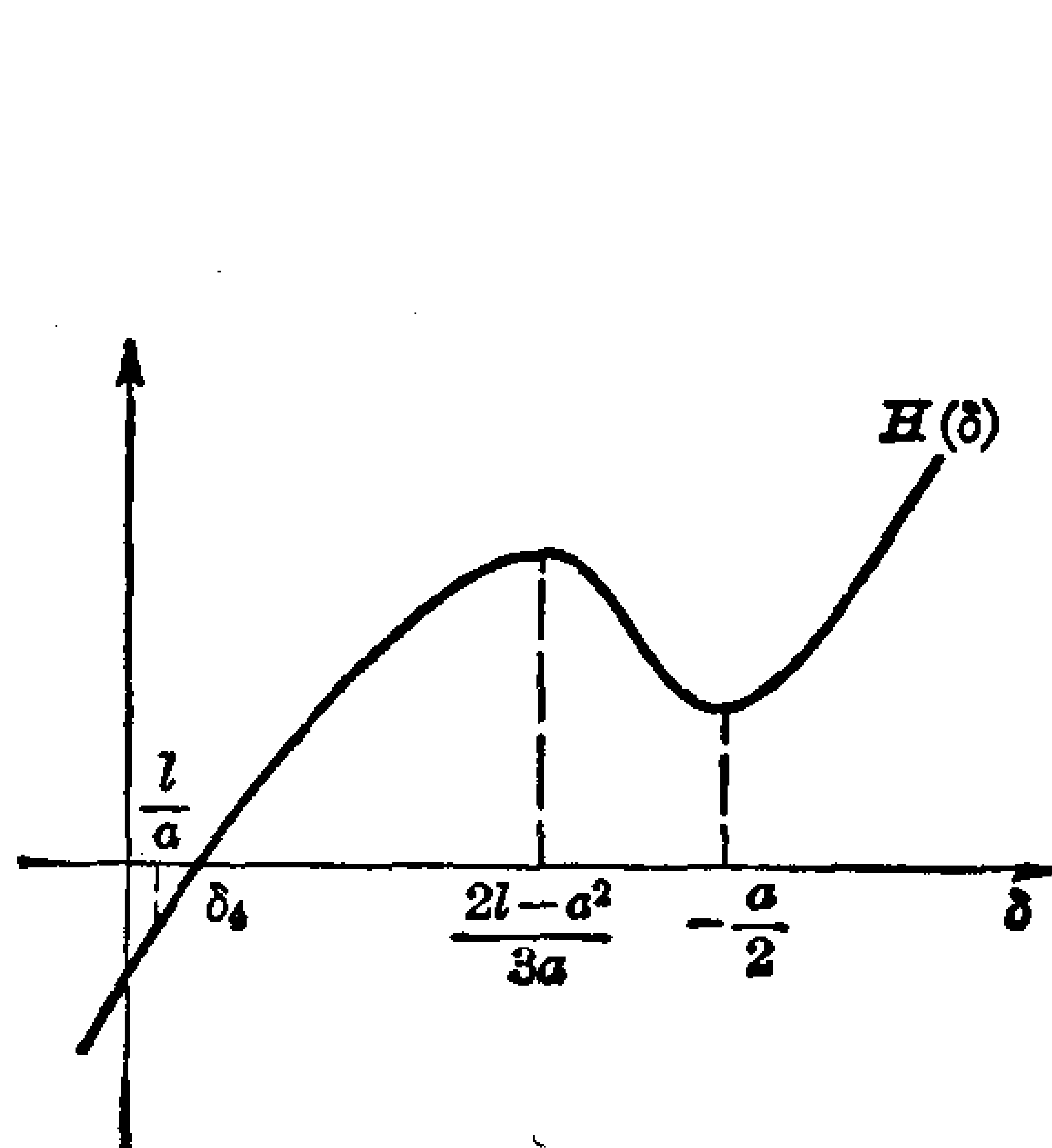


图 14·6

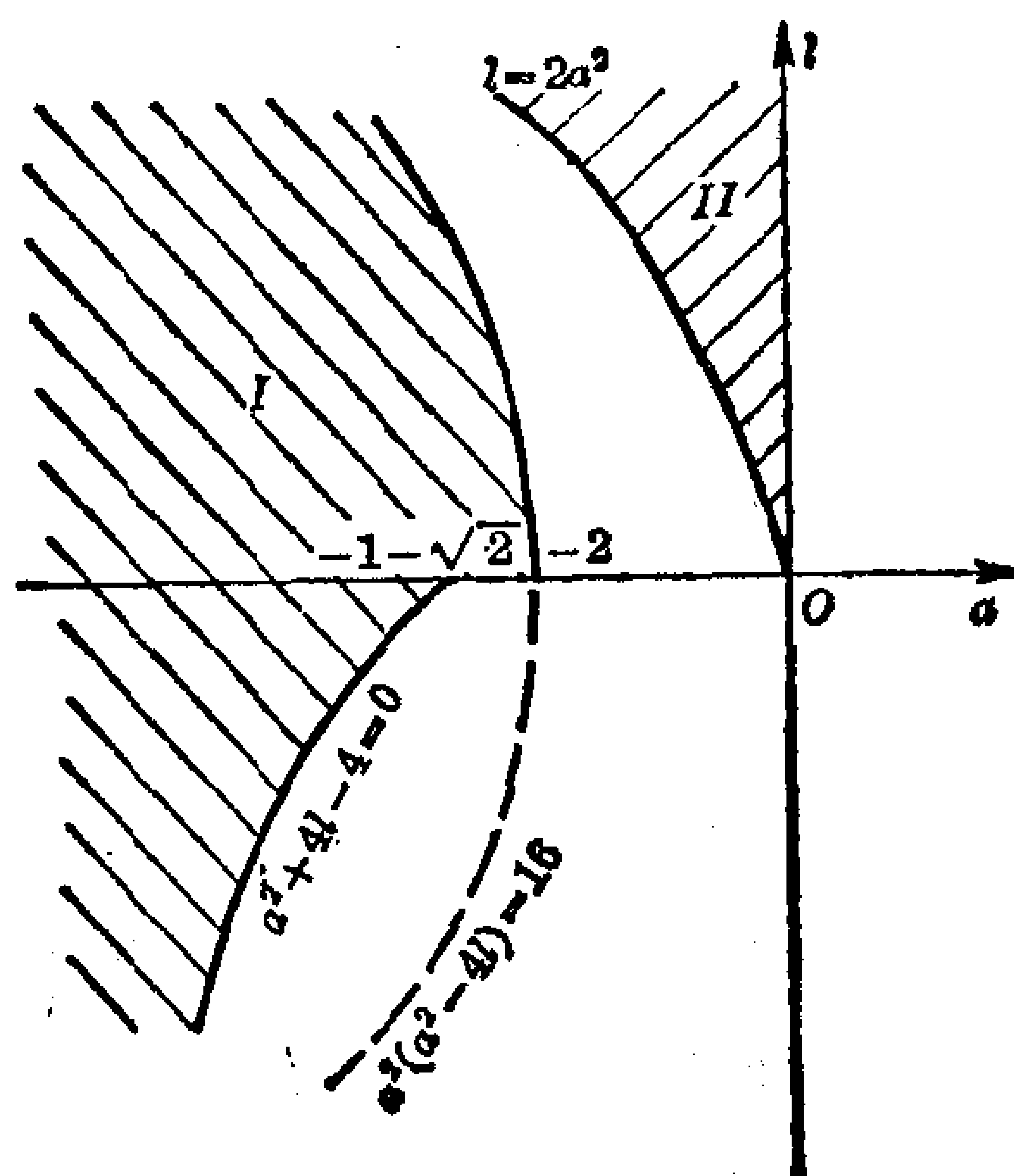


图 14·7

适当地估计 δ_4 的近似值，还可以得到：

定理 14·7 当 $l<0$,

$$\delta+\frac{a}{8}\leqslant\frac{l+\sqrt{l^2+4}}{4a}$$

时方程(14·22)最多有一个(稳定)极限环.

证略.

以上所得到的唯一性定理 14·4 和 14·6 只解决了关于方程(14·22)的极限环个数问题的一部分. 在参数 (a, l) 平面上来看，以上两定理只不过证明了当 (a, l) 落在区域 I(图 14·7) 中时方程(14·22)的极限环是唯一的，在此区域以外则不得而知. 但我们可以肯定地说，除区域 I 以外，对 (a, l) 平面中其他地方的点，极限环的唯一性不一定成立.

定理 14·8 当 $l\geqslant 2a^2$ 时，如果存在包围原点的极限环，则对于某些 δ, 它们至少有两个[179].

【证】 设 $\varGamma$ 是(14.22)的包围原点的极限环，沿 $\varGamma$ 计算发散量的积分：

$$\begin{aligned}I(\Gamma)&=\oint_\Gamma\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dt=\oint_\Gamma(\delta+2lx)dt=\oint_\Gamma(\delta-2alx^2)dt\\&=\oint_\Gamma\left[\delta+\frac{2al}{l-a\delta}(y^2-y)\right]dt\\&=\frac{2al}{l-a\delta}\oint_\Gamma\left[y^2-y+\frac{\delta(l-a\delta)}{2al}\right]dt\\&=\frac{2al}{l-a\delta}\oint_\Gamma\left[\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2\delta(l-a\delta)-al}{4al}\right]dt,\end{aligned}$$

因此当 $\delta\left(\text{不妨设 }\delta>\frac{l}{a}\right)$满足 $2\delta(l-a\delta)-al\leqslant 0$ 时有 $I(\Gamma)<0$. 由此可见，这时 Γ 其实已经不存在了. 因为如果 Γ 存在而非唯一，则总可找到一个使 $I(\Gamma)<0$ 不成立；反之，如果 Γ 唯一存在，则 Γ 的稳定性与原点的稳定性相同，也不可能.

另一方面，要 δ 满足 $2\delta(l-a\delta)-al\leqslant 0$, 只要

$$\delta\leqslant\delta'=\frac{l}{2a}\left(1-\sqrt{1-\frac{2a^2}{l}}\right)$$

即可. 又只有当

$$\delta\leqslant\bar{\delta}=\frac{4l-a^2}{4a}$$

时奇点 R 与 A 才存在. 当 $l\geqslant 2a^2$ 时显见有 $\delta'>\bar{\delta}$. 因此在包围原点的极限环从产生到消失的参数变化范围内，奇点 R 与 A 都不存在.

现在假设极限环 Γ 唯一存在，则它必定是不稳定环，因为原点是稳定的. 随着 δ 的减少，Γ 不断扩大，直到遇鞍点 N 而成为内不稳定的分界线环. 但我们计算 N 的发散量等于 $\delta<0$, 这又要求分界线环应是内稳定. 以上的矛盾说明：对某些 δ, O 外围的极限环至少应有两个. 由此可见，如果 O 的外围极限环最多也只能有两个的话，那末情况还是和(一)段

$$0<m<\frac{1}{a}-a$$

的一样，当原点外围的不稳定环尚未扩大而到达 N 点时，经过 N

点的两条分界线已经相互接近而重合为分界线环了. 然后，分界线环消失，产生一个稳定环向里面缩小，这时原点外围就恰好有两个环，他们最后重合为半稳定环而消失.

定理 14·4, 14·6 与 14·8 说明：在(a, l)参数半平面中，只有区域 I 和 II 中极限环的个数问题得到了解决，而且区域 II 中的问题并未彻底解决，因为极限环的唯二性尚未得到证明. 迄今为止，本书 §7 的那些定理对于方程 (14·22) 都还用不上，因为其中的 $\varphi(y)=y-y^2$ 只有当

$$y<\frac{1}{2}$$

时才是单调函数.

至于区域 I 和 II 以外的地方，其所对应的方程(14·22)的极限环到底有几个？也是悬而未决的问题. 不过我们仍然相信，方程(14·22)如果有极限环的话，应该不会多于两个.

（三） $n=0$. 这时有方程

$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+lx^2+mxy, \quad \frac{dy}{dt}=x(1+ax). \tag{14·25}$$

不失一般性，可设 $a=1$, $l>0$, 于是有

$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+lx^2+mxy, \quad \frac{dy}{dt}=x(1+x), \quad l>0. \tag{14·26}$$

易知此方程有两个奇点 $O(0, 0)$ 和 $R\left(-1, \dfrac{l-\delta}{m+1}\right)$. O 为非鞍点，R 当 $m+1\leqslant 0$ 时为非鞍点，当 $m+1>0$ 时为鞍点.

引理 14·4 当 $\delta=0$, $0\leqslant m\leqslant 2$ 时方程(14·26)在全平面不存在极限环[219].

【证】 注意 $1-mx=0$ 为无切直线，作 Dulac 函数

$$B(x, y)=(1-mx)^{\frac{2}{m^2}+\frac{2}{m}-1}e^{x^2-my^2+2\left(\frac{1}{m}+1\right)x-2ly},$$

则当 $\delta=0$ 时有

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP_2)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ_2)$$
$$=-l(2mx^2+2-m)x^2(1-mx)^{-1}B(x, y),$$

显然上式右端当 $0\leqslant m\leqslant 2$ 时为负. 引理得证[1].

引理 14·5 当 $\delta=0$, $m\leqslant 0$ 时方程 (14·26) 无包围原点的极限环.

【证】 作 Dulac 函数

$$B(x, y)=\frac{1}{mx-1}e^{-2ly},$$

则当 $\delta=0$ 时有

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP_2)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ_2)=-l(2mx-2+m)x^2(mx-1)^2e^{-2ly},$$

显见上式右端在

$$x>\frac{1}{m}$$

时为定号. 由于 $1-mx=0$ 为无切直线, 而包围原点的闭轨线应在区域

$$x>\frac{1}{m}$$

中, 故引理得证.

引理 14·6 当 $l(l+m\delta)\leqslant 0$ 时方程(14·26)不存在极限环,

【证】 作 Dulac 函数 $B(x, y)=(1-mx)^{-1}$, 则有

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP_2)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ_2)$$
$$=\frac{1}{m}\left[-lm^2\left(x-\frac{1}{m}\right)^2+l+m\delta\right](1-mx)^{-2}.$$

在引理的条件下, 上式右方为常号, 故引理得证.

引理 14·7 当

$$\frac{\delta}{l}\geqslant 1$$

1) [210]给出本定理的另一证法.

时方程(14·26)无包围原点的极限环[1].

【证】 考虑方程

$$\frac{dx}{dt}=-y+mxy,\quad \frac{dy}{dt}=x+x^2,\tag{14·27}$$

它以原点为中心点. 比较(14·27)与(14·26)的轨线的斜率, 得

$$\frac{-y+mxy+lx^2+\delta x}{x+x^2}-\frac{-y+mxy}{x+x^2}=\frac{lx+\delta}{1+x}.$$

由此可见, 两方程的轨线相切之点的轨迹为

$$1+x=0 \quad 和 \quad lx+\delta=0.$$

O 外围的(14·26)的闭轨线 Γ 当然不能和 $1+x=0$ 相交; 如果 $\delta/l\geqslant 1$, 则 $lx+\delta=0$ 直线在 $x+1=0$ 的左方, Γ 也不能与它相遇, 但这也就说明了 Γ 不可能存在.

引理 14·8 $\delta\geqslant l$ 时方程 (14·26) 不存在包围奇点 R 的极限环.

【证】 把坐标原点移到 R 去, 方程成为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-(1+m)y+\left(\delta+\dfrac{m(l-\delta)}{m+1}-2l\right)x+lx^2+mxy,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=x(x-1).\end{cases}\tag{14·28}$$

不妨设 $1+m<0$, 否则 R 是鞍点或不存在. 作变换:

$$\bar{x}=-x,\quad \bar{y}=\frac{y}{\sqrt{-1-m}},\quad \bar{t}=t/\sqrt{-1-m},$$

则(14·28)化为(仍改记 $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{t}$ 为 x, y, t)

$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta' x+l' x^2+m' xy,\quad \frac{dy}{dt}=x(1+x),\tag{14·29}$$

其中

1) 由于 $\bar{v}_3$ 与 $l(m-2)$ 同号, 引理 14·7 仅在 $m<2$ 时才需要证明; 当 $m\geqslant 2$ 时结论是显然的. 又此引理对 $l<0$ 也成立.

$$\delta' = \frac{\delta - (2+m)l}{(m+1)\sqrt{-1-m}}, \quad l' = \frac{-l}{\sqrt{-1-m}},$$

$$m' = -m(1+m)^{-1}, \tag{14·30}$$

然后由引理 14·7 即得本引理的证明, 因为由 $\delta'/l' \geqslant 1$ 可以推出 $\delta \geqslant l$.

前面已看到当 $\delta=0$ 时原点的焦点量与 $l(m-2)$ 同号, 又由 (12·21) 式易见当 $\delta=0$, $m=2$ 时, 原点的焦点量与 $-l$ 同号, 因而由 Баутин 的理论可得:

定理 14·9 (i) 当 $\delta=0, m>2$ 且 $m-2\ll 1$ 时, 原点外围至少存在一个极限环; (ii) 当 $m>2$, $\delta<0$, 且 $0<|\delta|\ll m-2\ll 1$ 时, 在原点外围至少存在两个极限环; (iii) 当 $m<2$, $0<\delta\ll 1$ 时, 在原点外围至少存在一个极限环; (iv) 当 $\delta=0$, $m<-2$ 且 $|m+2|\ll 1$ 时, R 点外围至少存在一个极限环; (v) 当 $m=-2$, $0<\delta\ll 1$ 时, 在 R 外围至少存在一个极限环.

推论 14·1 由定理的 (iii) 和 (v) 可知, 当 $m=-2$, $0<\delta\ll 1$ 时, O 与 R 外围同时存在极限环.

下面我们将分别各种情形来研究极限环的唯一性问题. 因已知直线 $1-mx=0$ 为无切, 故可引进变量代换

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{1-mx},$$

于是方程 (14·26) 化为 (仍改记 τ 为 t):

$$\frac{dx}{dt} = -y + \frac{lx^2+\delta x}{1-mx}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{x+x^2}{1-mx}. \tag{14·31}$$

为了研究极限环的唯一性, 对方程 (14·31) 作变换

$$\bar{y} = -y + \frac{lx^2+\delta x}{1-mx}, \qquad \bar{x} = x.$$

则方程化为 (仍记 $\bar{x}$, $\bar{y}$ 为 x, y)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) - f(x)y, \tag{14·32}$$

其中　$g(x)=\dfrac{x+x^2}{1-mx}$，$f(x)=\dfrac{lmx^2-2lx-\delta}{(1-mx)^2}$.

方程(14·32)有两个奇点：$O(0,\ 0)$当$|\delta|<2$时为焦点，$R(-1,\ 0)$当$1+m>0$时为鞍点.

定理 14·10　当$m<0$时方程(14·26)最多存在一个包围原点的极限环[220].

【证】　我们利用§6的定理6·4[112]来证明本定理. 显然只要验证当$m<0$时$f(x)/g(x)$在区间$\left(\dfrac{1}{m},\ x_1\right)$和$(0,\ +\infty)$内为不减函数即可，其中

$$x_1=\left(1-\sqrt{1+\frac{\delta m}{l}}\right)\Big/m$$

为$f(x)$的零点(由于引理14·6知道当$1+\dfrac{\delta m}{l}\leqslant 0$时方程无极限环，故不妨设$1+\dfrac{\delta m}{l}>0$). 这里可分两种情况来考虑：当$m\leqslant -1$时考虑的区间为

$$\left(\frac{1}{m},x_1\right)\quad 和\quad (0,\ +\infty);$$

而当$0>m>-1$时则考虑区间

$$(-1,\ x_1)\quad 和\quad (0,\ +\infty).$$

容易算出

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{P_4(x)}{(1-mx)^2(x+x^2)^2},$$

其中

$$P_4(x)=m^2lx^4-4mlx^3+(2l-ml-3m\delta)x^2+(2\delta-2m\delta)x+\delta.$$

由于已设$l>0$，故当$m<0$时不妨设$\delta>0$，否则O外围不能有极限环. 显见当$x>0$时有$P_4(x)>0$. 下面只要证明在区间$\left(\dfrac{1}{m},\ x_1\right)$(当$m\leqslant -1$)或在$(-1,\ x_1)$(当$0>m>-1$)中$P_4(x)>0$

即可.

首先考虑当

$$x\leqslant -\frac{\delta}{l},$$

即 $x\in\left(\frac{1}{m}, -\frac{\delta}{l}\right)$ 或 $x\in\left(-1, -\frac{\delta}{l}\right)$ 的情况. 把 $P_4(x)$ 改写为

$$P_4(x)=\left(x+\frac{\delta}{l}\right)lx(-m+2-4mx+m^2x^2)$$

$$-\delta m\left(x-\frac{1}{m}\right)(mx^2+1),$$

便容易看出不论 $x\in\left(\frac{1}{m}, -\frac{\delta}{l}\right)$(当 $m\leqslant -1$), 或 $x\in\left(-1, -\frac{\delta}{l}\right)$(当 $0>m>-1$), 都有 $P_4(x)>0$.

为了确定 $P_4(x)$ 在区间$\left(-\frac{\delta}{l}, x_1\right)$中的符号, 可以把它写成

$$P_4(x)=(mlx^2-2lx-\delta)x(mx-1)-mlx^3$$

$$+(-ml-2m\delta)x^2+(\delta-2m\delta)x+\delta.$$

设

$$\varphi(x)=-mlx^3+(-ml-2m\delta)x^2+(\delta-2m\delta)x+\delta,$$

则

$$\varphi\left(-\frac{\delta}{l}\right)=\left(1-\frac{\delta}{l}\right)\delta\left(1+\frac{m\delta}{l}\right)>0, \tag{14.33}$$

$$\varphi'(x)=-3mlx^2+2(-ml-2m\delta)x+\delta-2m\delta. \tag{14.34}$$

对于 $m<0$, $\varphi'(x)=0$ 如果有实根, 必定是两个负根, 其中较大的一个是:

$$x_0=\frac{1+\frac{2\delta}{l}+\sqrt{\left(1-\frac{\delta}{l}\right)^2+3\frac{\delta}{l}\left(\frac{\delta}{l}+\frac{1}{m}\right)}}{-3}<-\frac{\delta}{l}. \tag{14.35}$$

由(14.34)和(14.35)可以看出, $\varphi(x)$ 在区间$\left(-\frac{\delta}{l}, x_1\right)$内是增函数, 再由(14.33)知在这区间内有 $\varphi(x)>0$. 因此, 当 $m<0$ 而 $x\in\left(-\frac{\delta}{l}, x_1\right)$ 时有 $P_4(x)>0$, 故定理得证.

由推论 14·1 和定理 14·10, 再考虑到方程(14·29), 可以得到

推论 14·2 当 $m=-2$, $0<\delta\ll 1$ 时, 方程(14·26) 在 O 与 R 邻近分别同时存在唯一的极限环.

[221]改动 [118] 的唯一性定理 (定理 6·11) 而得到下面的引理 14·9, 用来研究当 $m>0$ 的情况下方程(14·26)的极限环的唯一性.

引理 14.9 设在带域 $x_1<0<x_2$ 上给定方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{g(x)}{F(x)-y}. \tag{14·36}$$

引进 Филиппов 变换

$$z=\int_0^x g(x)dx,$$

把方程变为

$$\frac{dy}{dz}=\frac{1}{F_1(z)-y}, \qquad 当\ x>0, \tag{14·37}$$

$$\frac{dy}{dz}=\frac{1}{F_2(z)-y}, \qquad 当\ x<0. \tag{14·38}$$

方程 (14·37) 和 (14·38) 分别在区间 $0<z<z_{01}$ 和 $0<z<z_{02}$ 中定义, 其中

$$z_{0i}=\int_0^{x_i} g(x)dx.$$

假设满足下列条件:

1) $xg(x)>0$ 当 $x\neq 0$, $g'(0)\neq 0$;

2) $F_1'(z)<0$ 当 $0<z<z_{01}$;

3) 存在两个数 z_0 与 $z^*(0\leqslant z_0<z^*<z_{0i})$, 使

(a) $F_2'(z)(z-z_0)<0$, 当 $z\neq z_0$, $0<z<z_{02}$;

(b) $F_1(z^*)=F_2(z^*)$;

(c) $F_2''(z)<0$ 当 $z^*<z<z_{02}$;

(d) 或是 $F_2''(z)<0$ 当 $z_0<z<z^*$;

或是当 $z_0=0$ 且

$$\lim_{z\to 0}\alpha_i(z)=\alpha_0>0$$

$\left(\text{其中 } \alpha_i(z)=F_i(z)-\dfrac{1}{F'_i(z)}\right)$时，下面的不等式成立：

$F''_2(z)(z-\bar{z})<0$, 当 $z\neq\bar{z}<z^*$, $0<z<z^*$,

$F''_1(z)<0$, 当 $0<z<z_{01}$;

(e)
$$\frac{d}{dy}[\bar{F}_2(y)-\bar{F}_1(y)]>0$$

当 $\beta<y<F_1(z^*)$, 其中

$$\beta=\operatorname*{Max}_{i=1,2}[\lim_{z\to z_{0i}}F_i(z)],$$

$\bar{F}_i(y)$ 是 $F_i(z)$ 的反函数，则方程(14·36)最多只有一个极限环，如果存在，必为单重环.

证明与定理 6·11 差不多，故从略.

定理 14·11 当下列三条件之一成立时：

1) $\delta=0$; 2) $0<m\leqslant 2$;

3) $m>2$, $\dfrac{\delta}{l}>\dfrac{-1+\sqrt{4m-7}}{2m}$,

方程(14·26)最多有一个极限环；如果存在，必为稳定环[221].

【证】 由引理 14·7 知道，当 $\delta\geqslant l$ 时方程(14·26)无极限环，又由引理 14·4 和旋转向量场的理论知道，当 $\delta\leqslant 0$, $0\leqslant m\leqslant 2$ 时方程也无极限环. 下面我们不妨只就方程

$$\frac{dx}{dt}=-y+\frac{lx^2+\delta x}{1-mx},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{x+x^2}{1-mx}\tag{14·31}$$

来考虑，与(14·36)比较，可知现在

$$g(x)=\frac{x+x^2}{1-mx},\quad F(x)=\frac{lx^2+\delta x}{1-mx},$$

$$z=\int_0^x\frac{x+x^2}{1-mx}\,dx,$$

$$F'_{iz}=F'_{ix}x'_z=\left(\frac{lx_i^2+\delta x_i}{1-mx_i}\right)'_{x_i}\frac{1-mx_i}{x_i+x_i^2}$$

$$=\frac{-mlx_i^2(z)+2lx_i(z)+\delta}{(1-mx_i(z))(x_i(z)+x_i^2(z))}.$$

这里 $x_1(z)(x_2(z))$ 是 $z(x)$ 对于 $x>0(x<0)$ 的反函数. 从上式可以得到当 $\delta=0$ 时有 $z_0=0$, 且在极限环可能存在的区域内有

$$F_1'(z)=\frac{l(-mx_1+2)}{(1-mx_1)(1+x_1)}<0.$$

当 $\delta>0$ 时函数 $F_2'(x_2(z))$ 的符号在

$$x_2(z_0)=x_0=\frac{1-\sqrt{1-\frac{m\delta}{l}}}{m}$$

点由正变负, 且 $F_1'(z)<0$ 对 $0<z<z_{01}$.

下面我们要证明曲线 $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$ 在区间

$$0<z<\min(z_{01},\ z_{02})$$

中只有一个公共点, 为此只要证明方程组

$$\frac{lx_2^2+\delta x_2}{1-mx_2}=\frac{lx_1^2+\delta x_1}{1-mx_1}, \tag{14·39}$$

$$\int_0^{x_2}\frac{x+x^2}{1-mx}\,dx=\int_0^{x_1}\frac{x+x^2}{1-mx}\,dx \tag{14·40}$$

当 $x_2<0$, $x_1>0$ 时有唯一的非零解. 注意: 如果 $F_1(z)$ 与 $F_2(z)$ 没有公共点, 或(14·39)与(14·40)没有实解 $x_2<0$ 与 $x_1>0$, 则方程(14·31)没有极限环.

由(14·39)可解出

$$x_1=\varphi(x_2)=\frac{-\delta-lx_2}{l(1-mx_2)},$$

再在(14·40)中把 x_1 看成是 x_2 的函数, 由此可求得

$$x_1'=\psi(x_1,\ x_2)=\frac{x_2(x_2+1)(1-mx_1)}{x_1(x_1+1)(1-mx_2)}.$$

研究两个导数之差:

$$\Delta=\psi(x_1,\ x_2)-\varphi'(x_2)=\psi\left(\frac{-\delta-lx_2}{l(1-mx_2)},\ x_2\right)-\varphi'(x_2)$$

$$=\frac{(l+m\delta)P_4(x_2)}{l(1-mx_2)^2(-\delta-lx_2)(l-\delta-mlx_2-lx_2)},$$

其中 $$P_4(x_2)=m^2l^2x_2^4+(-2ml^2+m^2l^2)x_2^3+(2l^2-ml^2)x_2^2$$
$$+(2l\delta+ml\delta)x_2+\delta^2-\delta l.$$

要证明方程组(14·39)与(14·40)有唯一的非零解，只须证明当 $-1<x_2<0$ 时 $P_4(x_2)$ 只有一个零点好了．现在假设相反，即 $P_4(x_2)$ 在 $-1<x_2<0$ 内至少有两个零点．显然，在 $\delta=0$ 时这是不可能的．因此可设 $\delta>0$．由于 $P_4(-1)>0$ 而 $P_4(0)<0$，故 $P_4(x_2)$ 在区间 $(-1,0)$ 中至少有三个零点．从而 $P_4'(x_2)$ 在 $(-1,0)$ 内至少有两个零点．但由 $P_4'(-1)<0$ 及 $P_4'(0)>0$ 又可推出 $P_4'(x_2)$ 在 $(-1,\ 0)$ 中至少有三个零点，这样，$P_4''(x_2)$ 在 $(-1,\ 0)$ 中应至少有两个零点，但这与直接计算是相矛盾的．这就证明了：方程组(14·39)与(14·40)当 $x_2<0$, $x_1>0$ 时有唯一的非零解．

下面再验证引理14·9的条件3)中的(c)，(d)两条．可以直接算出

$$F_i''(z)=\frac{1}{[x_i(z)+x_i^2(z)]^3(1-mx_i(z))}\,Q_4[x_i(z)],$$

其中 $$Q_4(x_i)=m^2lx_i^4-4mlx_i^3+(2l-ml-3m\delta)x_i^2$$
$$+2(1-m)\delta x_i+\delta.$$

容易看出，当 $\delta=0$ 时对于所有的 $z\in(0,\ z_{01})$ 都有 $F_1''<0$．而对 $F_2''(z)$ 则存在唯一的 $\bar{z}<z^*$，使当 $z=\bar{z}$ 时 $F_2''(z)$ 由正变负．

当 $\delta>0$ 时只要在 $x_2\in(-1,\ x_0)$ 来研究 $F_2''(x_2(z))$ 就够了．首先考虑 $x_2\in\left(-\dfrac{\delta}{l},\ x_0\right)$．把 $Q_4(x_2)$ 改写为

$$Q_4(x_2)=(mlx_2^2-2lx_2-\delta)x_2(mx_2-1)$$
$$+(x_2+1)(-mlx_2^2-2m\delta x_2+\delta).$$

易见当 $x_2\in\left(-\dfrac{\delta}{l},\ x_0\right)$ 时 $Q_4(x_2)>0$，从而 $F_2''(x_2(z))<0$．

其次考虑

$$-1<x_2\leqslant-\frac{\delta}{l},$$

把 $Q_4(x_2)$ 改写为

$$Q_4(x_2)=\left(x_2+\frac{\delta}{l}\right)\Big[m^2lx_2^3-(4ml+m^2\delta)x_2^2$$

$$+\left(m\delta+2l-ml+\frac{m^2\delta^2}{l}\right)x_2-m\delta-\frac{m\delta^2}{l}-\frac{m^2\delta^3}{l^2}\Big]$$

$$+\delta+\frac{m\delta^2}{l}+\frac{m\delta^3}{l^2}+\frac{m^2\delta^4}{l^3},$$

显然当
$$m\delta+2l-ml+\frac{m^2\delta^2}{l}\geqslant 0,$$

即
$$\frac{\delta}{l}>\frac{-1+\sqrt{4m-7}}{2m}$$

时有 $Q_4(x_2)>0$.

为了验证引理 14·9 的条件 3(e), 只要证明

$$\Delta_1=\frac{1}{F'_2(x_2)}-\frac{1}{F'_1(x_1)}$$

在条件(14·39)成立时只有一个零点. 容易算出

$$\Delta_1=\frac{(-l-m\delta)(x_1-x_2)\gamma(x_1+x_2)}{(-mlx_2^2+2lx_2+\delta)(-mlx_1^2+2lx_1+\delta)},$$

其中
$$\gamma(u)=u^2+\left(1-\frac{2}{m}\right)u-\frac{2\delta}{ml}.$$

由于(14·39)成立, 故

$$x_1+x_2=\frac{-\delta-lmx_2^2}{l(1-mx_2)}<0,$$

因此 Δ_1 在所研究的区域内只有一个零点. 引理 14·9 的全部条件都已验证. 定理证毕.

定理 14·12 当 $\delta\geqslant 0$ 时方程 (14·26) 的包围原点的极限环最多只有一个[222].

【证】 由引理 14·7 可知, 只要研究当 $m>2$, $l>\delta>0$ 成立的情况即可. 把方程(14·31)中的 y, t 变号, 得

$$\frac{dy}{dt}=\frac{x+x^2}{1-mx},\quad \frac{dx}{dt}=-y-\frac{lx^2+\delta x}{1-mx}.$$

我们要用定理 6·11 来证明本定理. 由定理 14·11 的证明可知, 现在只要验证条件:

$$2F_1''(z)z+F_1'(z)<0,\quad 当\ 0<z<z_{01}$$

就够了，由于

$$z=\int_0^x \frac{x+x^2}{1-mx}dx$$

$$=\frac{-1}{2m}x^2-\frac{1}{m}\left(1-\frac{1}{m}\right)x-\frac{1}{m^2}\left(1+\frac{1}{m}\right)\ln|1-mx|,$$

$$F_1'(z)=\frac{-mlx_1^2(z)+2lx_1(z)+\delta}{(1-mx_1(z))(x_1(z)+x_1^2(z))},$$

这里 $x_1(z)>0$ 是

$$z=\int_0^x \frac{x+x^2}{1-mx}dx$$

的反函数.

$$F_1''(z)=\frac{P_4(x_1(z))}{(x_1(z)+x_1^2(z))^3(1-mx_1(z))}.$$

其中
$$P_4(x_1)=m^2lx_1^4-4mlx_1^3+(2l-ml-3m\delta)x_1^2$$
$$+2\delta(1-m)x_1+\delta.$$

因此只要证明当 $\frac{1}{m}>x>0$ 时有

$$Q(x)=2P_4(x)z(x)+(mlx^2-2lx-\delta)(x+x^2)^2<0$$

即可，这里 $z(x)$ 可表成幂级数:

$$z=\frac{1}{2}x^2+\frac{m+1}{3}x^3+\frac{m(m+1)}{4}x^4+\cdots$$
$$+\frac{m^{n-3}(m+1)}{n}x^n+\cdots,$$

于是上式可写成

$$Q(x)=x^3\Big\{Q_1(x)+Q_0(x)-2m\delta-2l+\frac{2}{3}(m+1)\delta$$
$$+x(a_0(2\delta-2m\delta)+a_1\delta)+x^2[a_1(2\delta-2m\delta)+a_2\delta]$$
$$+x^3[a_2(2\delta-2m\delta)+a_3\delta]+\cdots\Big\},$$

其中

$$Q_1(x)=[m^2lx^4-4mlx^3+(2l-ml-3ml)x^2]$$
$$\cdot\left[\frac{2}{3}(m+1)+\frac{m+1}{4}2mx+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{2(m+1)}{n}m^{n-3}x^{n-3}+\cdots\right]<0.$$
$$Q_0(x)=x(-2l-\delta-3m\delta)+x^2(-2ml-2l)$$
$$+ml(m+1)x^3<0,$$
$$a_n=\frac{2}{n}(m+1)m^{n-3}x^n.$$

因为
$$0<x<\frac{1}{m},$$
故 $a_n<a_{n-1}$, 由此易证 $Q(x)<0$, 定理得证.

由以上三个定理可以看出, 关于方程(14·26)的极限环的唯一性问题已基本解决了不少情况, 但唯二性则尚无任何结果. 研究方程(14·26)的极限环问题的还有[223]和[224].

对于完整的 II 类方程 (14·1) 的研究则有在 §13 中提到的[209], 即研究方程具有两个一阶细焦点(因而无环)时的全局结构和分歧曲线. 还有[223], 其中用了类似于 §15 要提到的[230]中的变换, $x=\bar{x}$, $y=\bar{y}-\beta\bar{x}$, 但 β 为待定的系数. 经过上述变换以后方程(II)变为(仍记 $\bar{x}$, $\bar{y}$ 为 x, y)

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y+(\delta+\beta)x+(l-m\beta+n\beta^2)x^2\\ \qquad +(m-2n\beta)xy+ny^2=P(x, y),\\ \dfrac{dy}{dt}=\beta P(x, y)+x(1+ax).\end{cases}\tag{14·41}$$

然后把(14·41)与方程

$$\frac{dx}{dt}=P(x, y),\quad \frac{dy}{dt}=x(1+ax)\tag{14·42}$$

比较, 由(14·42)的定性性质可导出(14·41)的某些定性性质, 例如可证

定理 14·13 若 (14·42) 在 $O(0, 0)$ 外围无极限环, O 为

(14·42)的稳定(不稳定)奇点，则当 $\beta>0(<0)$时，(14·41)在 O 外围亦无极限环. 设(14·42)在另一指标 $+1$ 的奇点 M 外围无极限环，且 M 是(14·42)的不稳定(稳定)奇点，则当 $\beta<0(>0)$时，(14·41)在 M 外围亦无极限环. 又若(14·42)在全平面无环，且 O 与 M 的稳定性相同，则(14·41)不能在 O 与 M 外围同时存在极限环.

[223]还对 I 类方程应用上述变换，并取适当的 β，得证

定理 14·14 1) 设 $l<0,\ l+n>0$,

$$0<3n\leqslant\sqrt{1-4nl},$$

$$\Delta=\frac{1}{4}\left(\frac{n}{\sqrt{1-4nl}}\right)^3+\frac{1}{2n}(1-\sqrt{1-4nl})>0,$$

则当 $0<-\delta\leqslant\Delta$ 时 $(\mathrm{I})_{m=1}$ 存在不稳定极限环.

2) 设下列诸条件之一成立:

(i) $n>0,\quad \delta+\dfrac{1}{2n}\leqslant 0;$

(ii) $0<4n(l+n)<1,$

$$\delta+\frac{1}{2n}[1-\sqrt{1-4n(l+n)}]\leqslant 0;$$

或 (iii) $n<0,\quad \delta+\dfrac{2l}{1+\sqrt{1-4nl}}\leqslant 0,$

则 $(\mathrm{I})_{m=1}$ 不存在极限环.

又在(14·41)中若取

$$\beta=\frac{m}{2n},$$

并对(14·42)取 Dulac 函数 $e^{-2\left(l-\frac{m^2}{4n}\right)y}$，同时应用定理 14·13，可证当

$$a\left(\delta+\frac{m}{2n}\right)\left(l-\frac{m^2}{4n}\right)\leqslant 0$$

时，(II)若有极限环必为集中分布.

此外，[224]还研究了(14·1)，得到不少有关极限环不存在，存

在性和个数的定理，例如

定理 14·15 若 $\delta=m(1+n)-2a=0$, $n\neq-1$, $n(4-m^2)-2m^2\neq0$, $m\neq0$，则(14·1)在全平面最多只有一个极限环.

定理 14·16 当 $5n+3>0$, $m(1+n)-2a>0$, $\delta<0$, 且 $|5n+3|$, $|m(1+n)-2a|$, $|\delta|$ 适当小，则方程$(14\cdot1)_{l=1,\ \delta\neq0}$在原点附近至少有三个极限环.

定理 14·17 若 $\delta=l+n=0, a\neq0$，则 O 外围没有极限环，当

$$0<-a-\frac{m^2+4}{2m}\ll1$$

时 R 外围至少有一个极限环，当 $a<0$ 或

$$-a-\frac{m^2+4}{2m}<0$$

时 R 外围不存在极限环.

习 题

1. 证明本节开始时关于方程(14·4)的极限环的唯一性结论.

2. 证明当 $m<0$, $n>0$, $a>0$ 时方程$(14\cdot1)_{\delta=0}$在 O 外围不存在极限环[224].

$\left(\text{提示: 引进时间变换 } \dfrac{dt}{d\tau}=\dfrac{1}{mx-1}e^{-2y}.\right)$

3. 证明引理14·1.

4. 证明引理14·2.

5. 证明引理 14·3 的结论对 O 以外的另一指标 $+1$ 的奇点也成立.

6. 证明定理14·3.

7. 证明定理14·4 中的

$$y_{10}\leqslant\frac{1}{2}$$

等价于(14·24)中的不等式.

8. 证明(14·30)中的等式.

9. 证明 $\dfrac{dx}{dt}=-y+x^2+mxy-y^2$, $\dfrac{dy}{dt}=x(1+ax)$

在原点附近不存在闭与奇闭轨线；在另一指标为 $+1$ 的奇点 R 附近当

$$a\downarrow -\frac{4+m^2}{2m}$$

时有不稳定环缩小而趋于 R，当

$$a\leqslant -\frac{4+m^2}{2m}$$

时 R 附近也不存在闭与奇闭轨线.

10. 证明若在方程

$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+lx^2+mxy+y^2,\quad \frac{dy}{dt}=x(1+ax)$$

中 $a<0$, $l>0$, $\delta^2+m\delta+l<0$，则原点外围最多只有一个环.

§15. III 类方程的各种局部性质和全局性质

本节研究可能有极限环的方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + \delta x + lx^2 + mxy + ny^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = x(1 + ax + by) \end{cases} \tag{15·1}$$

的各种局部性质和全局性质. 如果不限制 $b \neq 0$, 则(15·1)代表最一般的, 可能有极限环的二次系统, 而 §§ 12—14 所讨论的 I, II 类方程实际上都是(15·1)的特例而已. 在 § 12 中我们已经提到过, 苏联数学家对于二次系统有其他的分类方法. 不论是它们的 A 类还是 B 类方程, 在转化为我们的分类时, 一般来说, 都具有 $b \neq 0$ 的特点. 因此本节还将介绍一些苏联数学家在七十年代以来对二次系统的较好的结果, 由此也可看出他们的分类法确有其优越性.

首先, 介绍一个简单而重要的不存在极限环的定理.

定理 15·1 方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + lx^2 + ny^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = x(1 + ax + by) \end{cases} \tag{15·2}$$

当 $a(b+2l) = 0$ 时存在一个或两个中心点, 当 $a(b+2l) \neq 0$ 时没有闭或奇闭轨线.

【证】 对方程(15·2)可取[1)]

---

1) 注意(15·3)右边当 $1+by<0$ 时可能取复值.

$$B(x, y) = (1+by)^{-\frac{2l}{b}-1}, \tag{15·3}$$

则可算出

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP_2) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ_2) = -a(b+2l)(1+by)^{-\frac{2l}{b}-2}. \tag{15·4}$$

当 $a(b+2l)=0$ 时上式右边恒等于零，方程(15·2)有首次积分，故有一个或两个中心点，当 $a(b+2l)\neq 0$ 时上式右边在半平面 $1+by>0$ 中保持常号，且 $1+by=0$ 对(15·2)来说是无切直线，故方程(15·2)在原点外围没有闭或奇闭轨线．要证(15·2)在半平面 $1+by<0$ 中也是如此，只要先把原点移到半平面 $1+by<0$ 中的指标为 $+1$ 的奇点上去$\left(\text{易见如果存在这种奇点的话，它必定就是}\left(0, \frac{1}{n}\right)\right)$，然后改取新的形如(15·3)的 $B(x, y)$，就可仿前一样来证明了．

方程(15·2)当 $a(b+2l)\neq 0$ 时的全局相图和分歧曲面在§13最后已提到过有[208]和[209]的工作．在这以后，1965年居乃旦[1]试图对特殊 III 类方程

$$\frac{dx}{dt} = -y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2, \quad \frac{dy}{dt} = x(1+by) \tag{15·5}$$

证明与§12关于 I 类方程的定理 12·4 与定理 12·6 完全平行的结果．但他的猜想当时只是部分地被证明了．他得到以下两条定理．

定理 15·2 方程

$$\frac{dx}{dt} = -y+lx^2+mxy+ny^2, \quad \frac{dy}{dt} = x(1+by) \tag{15·6}$$

当 $m(l+n)=0$ 时有中心点，又若代数方程

$$n(n+b)\theta^2 - m\theta - 1 = 0 \tag{15·7}$$

对 θ 有实根，则(15·6)当 $m(l+n)\neq 0$ 时不存在极限环．

---

1) 他的下列结果未发表，但已载入本书第一版§14．

定理 15·3 方程(15·5)当 1) $n=0$; 2) $l=0$; 3) $b=-n$; 4) $b=l$ 等四条件中的任何一个成立时，如果存在极限环，则必为唯一.

前一定理的证明仍用 Dulac 函数法，下一节再说. 后一定理的证明仍用[111]的唯一性定理.

自 1966 年以后的约十年中，我们的工作完全停下来了. 但在这期间，苏联数学家关于二次系统的研究却有了显著的进展. 在§12 末尾我们已曾提到，[200]用了新的方法证明定理 12·4, 1970 年 [203] 又用 [200] 的方法证明了定理 15·2; 而不需对方程(15·6)附加任何条件. 接着[225, 221, 292]又用[112, 118]以及与[118]类似的唯一性定理证明：方程(15·5)如果有极限环，则必为唯一，从而把居乃旦的猜想完全证明了.

现在先介绍 [203] 中用造出具有中心的新方程来和给定的二次系统比较，借以证明方程(15·6)不存在闭轨线的定理 15·2, 其中不必要求(15·7)对 θ 有实根.

为方便起见，我们就采用原文的记号，即要证明方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x+ax^2+bxy+cy^2}{y(\varepsilon x+1)} \tag{15·8}$$

(它就是方程 (15·6)) 不存在极限环. 不妨设 $\varepsilon\neq0$, 然后又可设 $\varepsilon=1$. 又不妨设 $a\geqslant0$ 或 $-1<a<0$. 因为如果 $a\leqslant-1$, 则可借变换

$$1+x_1=\frac{1}{1+x},\quad y_1=\frac{y}{1+x}$$

把(15·8)化为

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{-x_1-(a+1)x_1^2+bx_1y_1+(1-c)y_1^2}{y_1(x_1+1)},$$

在其中已有 $-(a+1)\geqslant0$ 了. 改写(15·8)为方程组

$$\frac{dy}{dt}=-x+ax^2+bxy+cy^2,\quad \frac{dx}{dt}=(x+1)y, \tag{15·9}$$

则(0, 0)的稳定性由 $b(a+c)$ 的符号决定，当 $b(a+c)>0(<0)$时

(0, 0)为不稳定(稳定)焦点，$b(a+c)=0$ 时(0, 0)为中心点. 显见极限环只可能在 $x>-1$ 半平面中出现. 首先证明当

$$ac\geqslant 0,\quad a^2+c^2>0,\quad b\neq 0$$

时(15·9)没有极限环,这是因为(其中 T 是环的周期):

$$\begin{aligned}h&=\frac{1}{T}\int_0^T[bx+(2c+1)y]dt\\&=\frac{1}{T}\int_0^T\left[b\left(ax^2+bxy+cy^2-\frac{dy}{dt}\right)+(2c+1)y\right]dt\\&=\frac{b}{T}\int_0^T(ax^2+cy^2)dt,\end{aligned}$$

上式右边与 $b(a+c)$ 同号,故极限环不存在.

因此以后不妨在下列两条件之一下来证明我们的结论:

1) $$a>0,\quad c<0,\quad b\neq 0;\tag{15·10}$$

2) $$-1<a<0,\quad c>0,\quad b\neq 0.\tag{15·11}$$

考虑方程

$$(x+1)yy'=-x+ax^2+[bx+\psi(x)]y+cy^2,\tag{15·12}$$

我们要适当选取 $\psi(x)$. 以使得(0, 0)成为(15·12)的中心点. 在(15·12)中作变换 $y=\varphi(x)u$, 这里 $\varphi(x)$ 也是一个待定的函数，得到

$$\begin{aligned}(x+1)\varphi^2uu'=&-x+ax^2+[bx+\psi(x)]\varphi u\\&+[c\varphi-(x+1)\varphi']\varphi u^2.\end{aligned}$$

今选取 φ 与 ψ,使上述方程可以分离变量求通积分. 为此，要求 φ 与 ψ 满足条件:

$$[c\varphi-(x+1)\varphi']\varphi=\alpha(-x+ax^2),\tag{15·13}$$

$$(bx+\psi)\varphi=\beta(-x+ax^2),\tag{15·14}$$

其中 α, β 为常数. 由(15·13)看出 $\varphi(x)$ 满足形如

$$(x+1)yy'=cy^2+\alpha x(1-ax)\tag{15·15}$$

的方程,其通积分为

$$y^2=(x+1)^{2c}\left[M+\int_0^x \frac{2\alpha x(1-ax)}{(x+1)^{2c+1}}dx\right]. \qquad (15\cdot16)$$

今取 $\varphi(x)=(x+1)^c\left[M+2\alpha\dfrac{P_2(x)}{(x+1)^{2c}}-2\alpha P_2(0)\right]^{\frac{1}{2}}$,

其中 $P_2(x)$是(15·16)中积分出来的分式函数的分子，它等于

$$\frac{1+a}{2c}+\frac{1+2a}{1-2c}(x+1)-\frac{a}{2-2c}(x+1)^2 \quad \left(c\neq\frac{1}{2},\ 1\right);$$

$$1+a+(1+2a)(x+1)\ln(x+1)-a(x+1)^2 \quad \left(c=\frac{1}{2}\right);$$

$$\frac{1+a}{2}-(1+2a)(x+1)-a(x+1)^2\ln(x+1) \quad (c=1).$$

M 为常数，以后再决定．然后由(15·14)可得

$$\psi(x)=\frac{x}{\varphi(x)}[\beta(-1+ax)-b\varphi(x)].$$

注意，迄今 α, β, M 都还没有取定．

假如能使 $\psi(x)$在某一区间$[m, n]$上保持定号，除了有限个点以外，那末比较具有中心点的方程(15·12)与已给的方程(15·9)，就可知道 (15·9) 在带域 $m\leqslant x\leqslant n$, $-\infty<y<+\infty$ 中不存在极限环了．

为使函数 $\psi(x)$在 $x=0$ 的邻域内保持符号，须取

$$\beta=-b\varphi(0)=-b\sqrt{M}.$$

现在先看情况(15·10)．由于$\left(\dfrac{1}{a},\ 0\right)$是鞍点，只要作 $\psi(x)$，使在区间$\left(-1,\ \dfrac{1}{a}\right)$中保持符号就够了，因为已知(15·8)的闭轨线必为凸闭．

(i) 当 $a+c>0$ 时函数 $P_2(x)$显然保持常负．事实上，令 $x+1=t$，得到 $P_2(t-1)$，其判别式为

$$\frac{(a+c)(1+a-c)}{(1-2c)^2c(1-c)}<0.$$

现在任意取 $\alpha<0$，再取 $M=2\alpha P_2(0)$，则 $\varphi(x)$的图形是双曲

线的一支，由此即见 $\psi(x)$ 在区间 $\left(-1,\ \frac{1}{a}\right)$ 中保持符号. 这时方程(15·15)的包含在双曲线之间的积分曲线的定性图如图 15·1 所示. 注意：双曲线是过 $x=-1$ 上的鞍点的分界线.

(ii) 当 $a+c<0$ 时仍取 $\alpha<0$，且取

$$M=2\alpha P_2(0)-2\alpha\frac{P_2\left(\frac{1}{a}\right)}{\left(\frac{1}{a}+1\right)^{2c}},$$

使 $y=\varphi(x)$ 是方程(15·15)的经过 $\left(\frac{1}{a},\ 0\right)$ 的分界线. 那末直线

$$y=\sqrt{M}(1-ax)$$

便与此分界线交于两点，其横坐标为 0 及 $\frac{1}{a}$，其他别无交点，因为任一直线与(15·15)的方向场的切点不多于两个. (15·15)的积分曲线的定性图如图 15·2. 由此仍可看出 $\psi(x)$ 在区间 $\left(-1,\ \frac{1}{a}\right)$ 中保持符号.

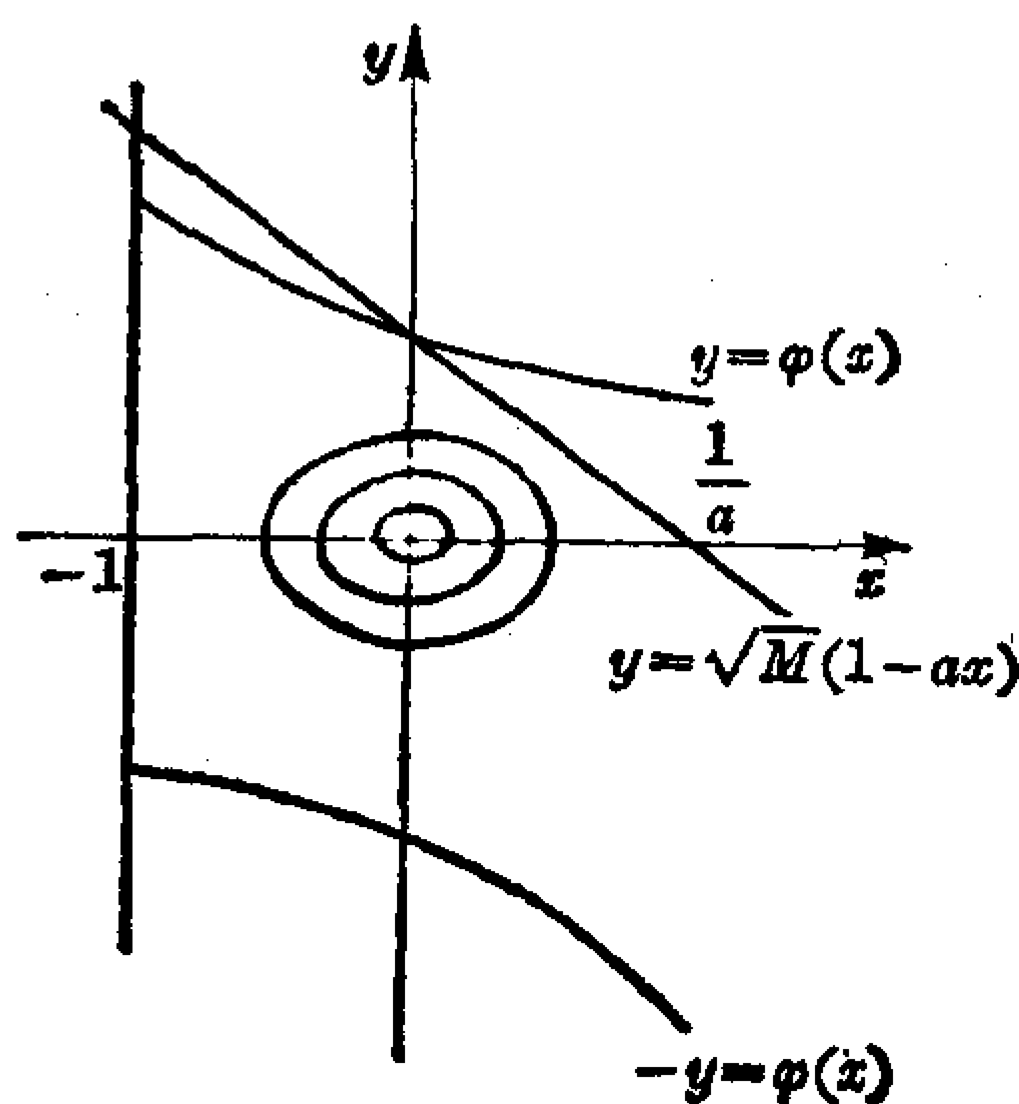


图 15·1

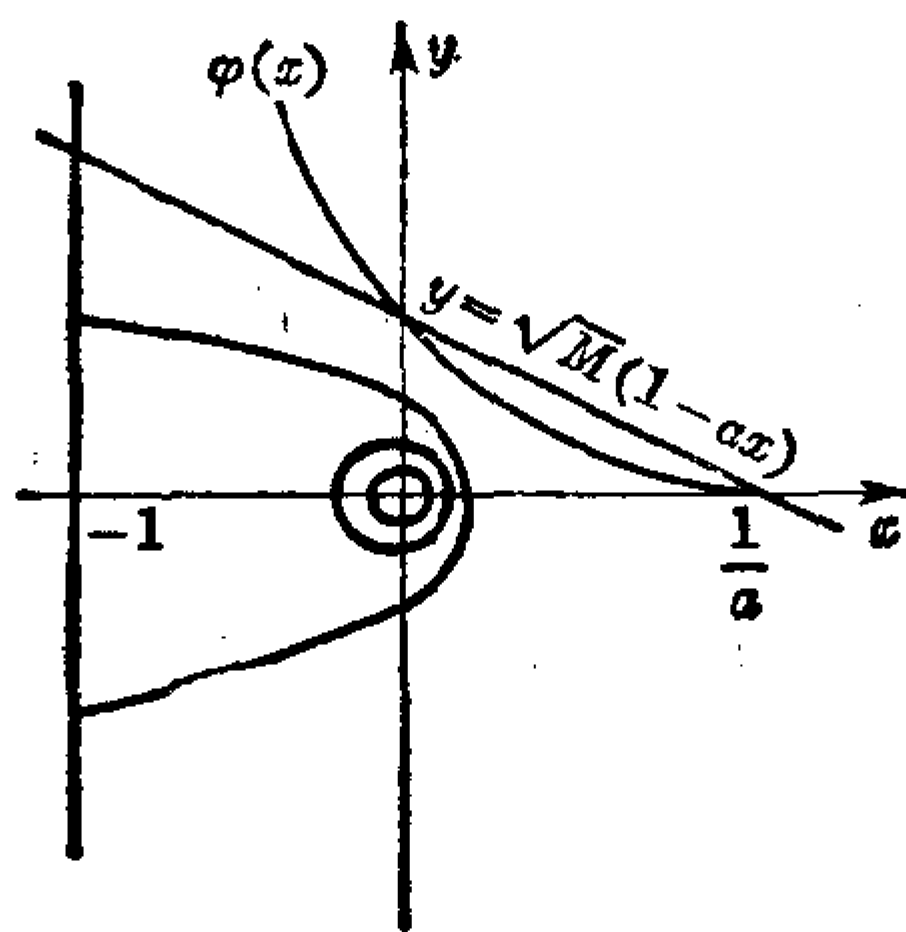


图 15·2

再看情况(15·11). 取定 $\alpha>0$，则在条件 (15·11) 之下方程(15·15)在 x 轴上有两个鞍点 $(0,\ 0)$ 与 $\left(\frac{1}{a},\ 0\right)$，它们分别在直线 $x=-1$ 的两边. 易证 y 轴上的无限远点为鞍点，此时还有两个有限

远结点，位于直线 $x=-1$ 上. 从 $(0, 0)$ 出发的一分界线进入结点 $P_1\left(-1, \sqrt{\frac{\alpha(a+1)}{c}}\right)$，而另一分界线走向无限远结点. 由此可见，一切位于上两分界线上方的轨线都是连接结点 $\left(-1, \sqrt{\frac{\alpha(a+1)}{c}}\right)$ 与无限远结点的，也就是当 $M>0$ 时前面已得到的单值函数 $y=\varphi(x)$ 的图线. 今取 $M=\frac{\alpha}{c(a+1)}$，则直线 $y=\sqrt{M}(1-ax)$ 将通过鞍点 $\left(\frac{1}{a}, 0\right)$ 与结点 $\left(-1, \sqrt{\frac{\alpha(a+1)}{c}}\right)$，且此直线当 $x>-1$ 时与 (15·15) 的方向场不相切. 若取这个 M 所决定的 $\varphi(x)$（见图 15·3），那末代入 $\psi(x)$ 的表达式，就看出 $\psi(x)$ 在 $x>-1$ 时保持符号. 这样，我们已证明 (15·8) 不存在极限环.

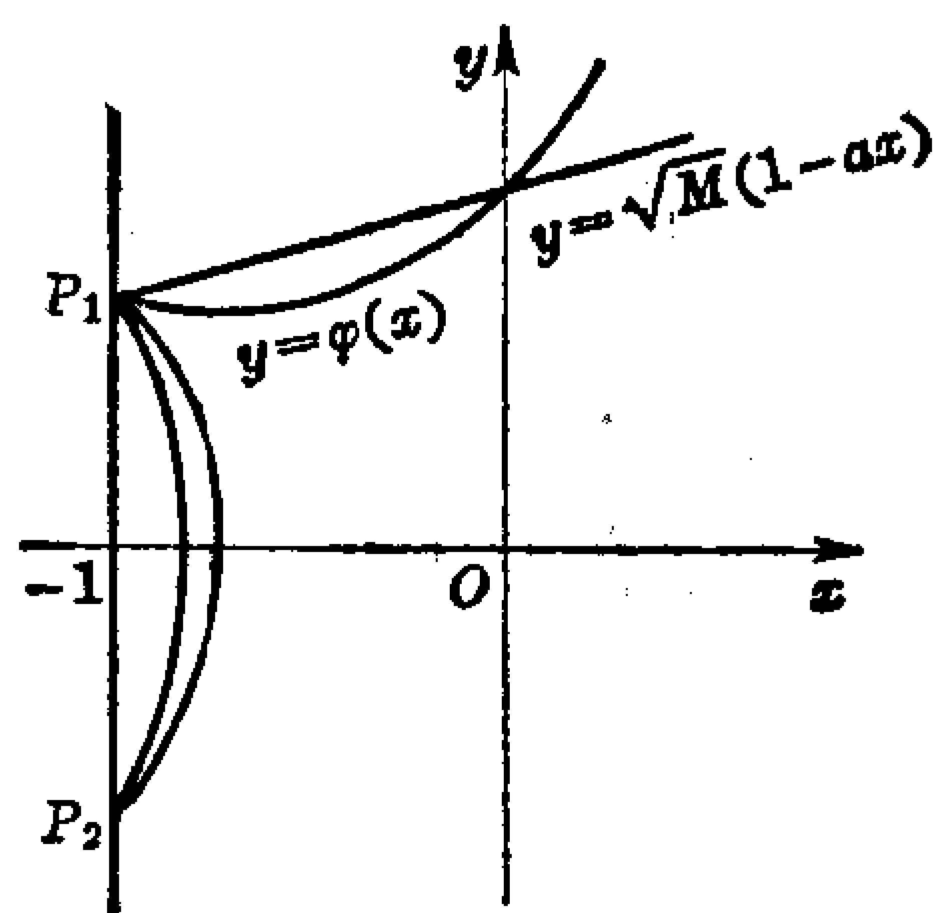


图 15·3

下面再给出方程 (15·5) 的极限环的唯一性的证明.

定理 15·4 方程 (15·5) 如果有极限环的话，最多只有一个.

【证】 为了便于读者查阅作者们的文献，这里仍用他们原来的写法，即改写 (15·5) 为

$$\frac{du}{dx}=\frac{-x+ax^2+(bx+c)u+du^2}{u(x+1)}. \tag{15·17}$$

借助于变换 $u=(x+1)^d y_1$（当 $d=0$ 时它是恒等变换），方程 (15·17) 可化为

$$\frac{dy_1}{dx}=\frac{-x+ax^2+(bx+c)(x+1)^d y_1}{(x+1)^{2d+1} y_1},$$

或等价方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}=(x-ax^2)(x+1)^{-2d-1}=g(x), \\ \dfrac{dx}{dt}=-y+\displaystyle\int_0^x (bx+c)(x+1)^{-d-1}dx=-y-\int_0^x f(x)dx. \end{cases} \tag{15·18}$$

首先研究原点外围极限环的唯一性. 由定理 15·2 和旋转向量场的理论知当 $cb(a+d)>0$ 时没有包围原点的极限环, 故以下不妨设 $cb(a+d)<0$. 又不失一般性可设 $b<0$, 此外, 象定理 15·2 的证明中一样, 又不妨设 $a>-1$. 因此以后我们常有

$$b<0,\quad c(a+d)>0,\quad a>-1.$$

下面就六种不同的情况分别进行讨论:

1) $a\geqslant 0,\ c>0,\ d\geqslant 0$;

2) $a>0,\ c>0,\ d<0,\ a+d>0$;

3) $a>0,\ c<0,\ d<0,\ a+d<0$;

4) $-1<a\leqslant 0,\ c<0,\ d\leqslant 0$;

5) $-1<a\leqslant 0,\ c<0,\ d>0,\ a+d<0$;

6) $-1<a\leqslant 0,\ c>0,\ d>0,\ a+d>0$.

I. 先研究情况 1) 和 4), 它们的特点是 $ad\geqslant 0$. 由 (15·17) 的奇点和积分直线的位置可看出极限环只能位于带域

$$-1<x<\frac{1}{a}\quad (\text{或 } x>-1, \text{对情况 4}))$$

中 (当 $a=0$ 时为半平面 $-1<x$). 其次, 注意对 (15·18) 计算发散量可得

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=(bx+c)(x+1)^{-d-1},$$

而极限环不能与积分直线 $x+1=0$ 相交, 故必与直线 $bx+c=0$ 相交, 因此仅当 $b+ac<0$ 时才存在极限环. 由此不难证明: 对于方程 (15·18), 在情况 1) 之下, 当 $x\in(-1,\ 0)$ 或 $\left(-\frac{c}{b},\ \frac{1}{a}\right)$ 时有[1)]

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{(x+1)(-abx^2-2acx+c)+dx(bx+c)(ax-1)}{(ax^2-x)^2(x+1)^{1-d}}$$
$$>0. \tag{15·19}$$

用 x_2 表示最靠近原点的极限环 L_1 的最右点的横坐标, 则必有

---

1) 注意这时 $-abx^2-2acx+c$ 为定正二次式.

$$x_2 > -\frac{c}{b}.$$

作函数 $$f_1(x) = f(x) - \frac{f(x_2)}{g(x_2)} g(x),$$

在 L_1 所包围的区域内可以找到点 $(x_1<0,\ 0)$，使 $f_1(x_1)=0$，又显见 $f_1(x_2)=0$. 由于 $f_1(x)/g(x)$ 在区间 $(-1,\ 0)$ 与 $\left(-\frac{c}{b},\ \frac{1}{a}\right)$ 中的单调性可知 $f_1(x)<0$ 当 $x\in[x_1,\ x_2]$. 现在对方程(15·18)应用§6的定理6·4，即得极限环的唯一性.

在情况4)，不难看出包围原点的极限环只可能在 $c>b$ 时存在[1)]，且与前一样必定包含 x 轴上的点 $\left(-\frac{c}{b},\ 0\right)$. 这时仍用(15.19)式可证在区间 $\left(-1,\ -\frac{c}{b}\right)$，$(0,\ +\infty)$ 上有

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)<0,$$

以后的证明和情况1)类似.

II. 其次研究情况2)和3)，它们的特点是 $a>0$. 如前仍可设 $b<0$. 在这里需要把 Рычков 的唯一性定理（定理6·11）略加改动，才能使用，见[221].

引理1 设对 $d_1<x<d_2$，$d_1 d_2<0$，给定方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{F(x)-y},$$

它可借助于 Филиппов 变换

$$z = \int_0^x g(x)\,dx$$

变为 $$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{F_1(z)-y}, \quad 当\ x>0,$$

---

1) 先作变换

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{1+x},$$

再证发散量沿任一闭轨线的积分当 $c=b$ 时恒为负，于是注意到原点亦为稳定，即见此时已不可能存在闭轨线.

$$\frac{dy}{dz}=\frac{1}{F_2(z)-y}, \quad 当 x<0.$$

上述两方程分别在区间 $0<z<z_{01}$ 与 $0<z<z_{02}$ 中定义，其中

$$z_{0i}=\int_0^{d_i} g(x)dx.$$

假设下列条件满足：

1) $xg(x)>0$ 当 $x\neq 0$, $g'(0)\neq 0$;

2) $F_1'(z)<0$ 当 $0<z<z_{01}$;

3) 存在唯一的数 z_0 与 $z^*(0\leqslant z_0<z^*<z_{0i})$ 使得：

a) $F_2'(z)(z-z_0)<0$ 对 $z\neq z_0$, $0<z<z_{02}$;

b) $F_1(z^*)=F_2(z^*)$;

c) $F_2''(z)<0$ 当 $z^*<z<z_{01}$;

d) 或是 $F_2''(z)<0$ 对 $z_0<z<z^*$，或是当 $z_0=0$ 且

$$\lim_{z\to 0}\left(F_i(z)-\frac{1}{F_i'(z)}\right)=\alpha_0>0$$

时成立 $$F_2''(z)(z-\bar{z})<0$$

当 $$z\neq\bar{z}<z^*, \quad 0<z<z^*;$$

又 $$F_1''(z)<0$$

当 $$0<z<z_{01};$$

e) $$\frac{d}{dy}[\bar{F}_2(y)-\bar{F}_1(y)]>0,$$

对 $$F_1(z^*)>y>\beta=\max_{i=1,2}[\lim_{z\to z_{0i}}F_i(z)],$$

这里 $\bar{F}_i(y)$ 是 $F_i(z)$ 的反函数.

那末方程最多只能有一个极限环；如果存在，必为单重环.

引理的证明除个别地方外，与定理 6·11 很少差别，故从略.

下面用这引理来证明当 $a>0$ 时(即情况 2), 3))方程(15·18)的包围原点的极限环的唯一性. 我们只证情况 2)，另一情况的证明是类似的.

在 (y, z) 平面上考察曲线 $y=F_i(z)$ $(i=1, 2)$，把它们用参数

形式来记:

$$y=F_i(x_i),\quad z=G(x_i)\quad (i=1,\ 2).$$

这里

$$F(x)=-\int_0^x f(x)dx$$

$$=-(x+1)^{-d}\left[\frac{b}{d-1}(x+1)+\frac{c-b}{d}\right]+\frac{b}{d-1}+\frac{c-b}{d};$$

$$G(x)=\int_0^x g(x)dx$$

$$=(x+1)^{-2d}\left[\frac{a}{2d-2}(x+1)^2+\frac{2a+1}{1-2d}(x+1)+\frac{a+1}{2d}\right]$$

$$-\frac{a}{2d-2}-\frac{2a+1}{1-2d}-\frac{a+1}{2d}.\quad -1<x_2<0<x_1<\frac{1}{a}.$$

这两曲线的交点由下面的方程组确定:

$$F(x_1)=F(x_2),\quad G(x_1)=G(x_2).$$

我们可以象[118]那样来证明这个方程组存在唯一的一组解,也即曲线 $y=F_1(z)$ 与 $y=F_2(z)$ 在 $0<z<\min(z_{01},\ z_{02})$ 内有且仅有一个交点$(z^*,\ F_1(z^*))$,此处从略.

由复合函数求导法则可知引理中的 $F_1''(z)<0$ 相当于

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)>0.$$

为了证明后一不等式在极限环可能存在的带域

$$-1<x<\frac{1}{a}$$

中成立,可以把(15·19)的分式中的分子

$$P(x)=(x+1)(-abx^2-2acx+c)+d(bx+c)(-x+ax^2)$$

进行改写. 注意,如果 $P(x)$ 当 $d=-a$ 时在区间$\left(0,\ \frac{1}{a}\right)$中为正,那末当 $d>-a$ 时更有 $P(x)>0$. 今在 $d=-a$ 时把上式改写为

$$P_1(x)=-ba(a+1)x^3+c[-a(a+2)x^2+x(1-a)+1].$$

为了证明上式在区间$\left(0,\ \frac{1}{a}\right)$中为正，只须看它在 c 取最大值$-\frac{b}{a}$时的符号. 这时 $P_1(x)$ 有重根 $x=\frac{1}{a}$. 因此它在区间$\left(0,\frac{1}{a}\right)$中保持为正. 现在再把 $P(x)$写成

$$x^2[-b(a+d)+xab(d-1)]+c[(x+1)(1-2ax)+dx(-1+ax)].$$

易见上式在第二个方括弧中的多项式在区间$\left(\frac{a+d}{a(d-1)},0\right)$中为正，因而 $P(x)>0$ 在此区间中. 由于

$$\frac{a+d}{a(d-1)}>-1,$$

仅当 $d\to 0$ 时它才趋于 -1. 所以要证 $F_1''(z)<0$ 在极限环可能存在的带域中处处成立，还必须补证：对于方程 (15·17)，当 c 从零增大时，由原点产生的极限环一直扩大到成为通过鞍点$\left(\frac{1}{a},\ 0\right)$的分界线环而消失，它的最左点的横坐标应常大于$\frac{a+d}{a(d-1)}$，但这一点[221]中并未能把作者们在[225]中所遗留下来的问题加以解决. 我们暂时也无法补上这个漏洞，只能留作思考问题，请读者们自己考虑.

为了验证条件

$$\frac{d}{dy}[F_1^{-1}(y)-F_2^{-1}(y)]<0$$

在相应的区域中成立，只须证明两曲线

$$z=[F_i^{-1}(y)]_y' \quad (i=1,\ 2)$$

在 $y>0$ 时最多有一个交点. 这种交点由下面的方程组确定：

$$\frac{G'(x_1)}{F'(x_1)}=\frac{G'(x_2)}{F'(x_2)}, \qquad F(x_1)=F(x_2).$$

它们等价于

$$A\left(x_1+\frac{B}{A}\right)\left(x_2+\frac{B}{A}\right)=\frac{B^2}{A}+C, \quad F(x_1)=F(x_2), \qquad (15\cdot 20)$$

其中 $$A=ab\left(\frac{b}{d-1}+\frac{c-b}{d}\right)+\frac{b(b+ac)}{d-1},$$

$$B=ac\left(\frac{b}{d-1}+\frac{c-b}{d}\right),\qquad C=c\left(\frac{b}{d-1}+\frac{c-b}{d}\right).$$

如果考虑到条件 2) 以及极限环存在的必要条件：$b+ac<0$，$b-c<0$，可见

$$B^2+AC=c(b+ac)[ac(d-1)+b(a+d)][c(d-1)+b]$$
$$d^{-2}(d-1)^{-2}<0,$$

即(15·20)的第一个方程确定增函数 $x_2=\varphi(x_1)$.

其次，由(15·20)的第二个方程出发计算 $\frac{dx_2}{dx_1}$ 在 $z=z^*$ 的值，得到

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{F'(x_1)}{F'(x_2)}=\frac{F_1'(z^*)\frac{dz_1}{dx}}{F_2'(z^*)\frac{dz_2}{dx}},$$

其中 $$\frac{dz_1}{dx}=g(x_1)>0,\qquad \frac{dz_2}{dx}=g(x_2)<0,$$

又由条件 2)知 $F_1'(z^*)<0$，由条件 3a)知 $F_2'(z^*)<0$. 因此

$$\frac{dx_2}{dx_1}<0,$$

故由 $F(x_1)=F(x_2)$ 确定减函数 $x_2=\psi(x_1)$. 这样，(15·20)只有唯一的解就很显然了.

情况 3)的证明是类似的.

III. 最后还剩下情况 5)与 6)，它们的特点是 $ad<0$ 但 $d>0$. 为了证明这时方程(15·18)的极限环的唯一性，[292]又改进了引理 1 而得到下一唯一性判据：

引理 2 如果存在唯一的点 z_0, z^*, $y^*(0<z_0<z^*<z_{01},\ \beta<y^*<0)$，使下列条件成立[1)]：

1) $F_2'(z)<0,\ 0<z<z_{02},\ F_1(0)=F_2(0)=0$;

1) 其中的 β, z_{04}, $\overline{F}_4(y)$ 的意义如前.

2) $(z_0-z)F_1'(z)>0$, 当 $z\neq z_0$, $0<z<z_{01}$, $F_1(z^*)=F_2(z^*)$;

3) $2F_2''(z)z+F_2'(z)<0$, $0<z<z_{02}$;

4) $(y^*-y)\dfrac{d}{dy}(\bar{F}_1(y)-\bar{F}_2(y))>0$, 当 $y\neq y^*$, $\beta<y<0$,

那末方程
$$\frac{dy}{dx}=\frac{g(x)}{F(x)-y}$$
不能有多于一个的极限环，如果有，必定是单重环.

这个引理的证明与引理 1 或定理 6·11 的证明差别较大，为了验证方程 (15·18) 在情况 5) 与 6) 之下满足引理的条件 3)，计算也很繁，故不在此详细介绍，有兴趣的读者可查看作者的原文 [292].

以上只是证明了方程 (15·5) 在原点外围的极限环的唯一性. 注意，如果 y 轴上另一奇点$\left(0,\ \dfrac{1}{n}\right)$与 $(0,\ 0)$ 在 $1+by=0$ 的同一边，则它是鞍点；但若 $1+by=0$ 把 $\left(0,\ \dfrac{1}{n}\right)$与 $(0,\ 0)$ 隔开，则$\left(0,\ \dfrac{1}{n}\right)$也是指标为 $+1$ 的奇点. 它的外围的极限环的唯一性可以用搬动原点的办法来解决，因为这时方程(15·5)的形状不会改变.

最后，取 $B(x,\ y)=(1+by)^{-\frac{2l}{b}-1}$，则可算出
$$\frac{\partial}{\partial x}(BP)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ)=(my+\delta)B(x,\ y).$$
但
$$y=-\frac{\delta}{m}$$
是平行于 $1+by=0$ 的直线，它若不与 $1+by=0$ 重合，则必定在 $1+by=0$ 的一边，并且 (15·5) 的极限环又不可能和 $1+by=0$ 相交，因此知道$(0,\ 0)$与$\left(0,\ \dfrac{1}{n}\right)$外围不可能同时存在极限环. 定理 15·4 证毕.

注意：读者在 §12 定理 12·6 中已经看到，为了证明(I)类方程的极限环的唯一性，我们需要分成四种不同的情况，分别用不同的变量代换把方程化为 Liénard 型方程，然后再应用[111]的唯一

性定理来解决问题. 对于本节的定理 15·4, 情况也有些类似. 然而就方程的形状来看, 不论是(I)类方程, 还是 $(III)_{a=0}$, 即方程(15·5), 都远比转化以后的方程简洁得多; 并且这两方程组之间所差的只是第二个方程右端的一个因式$(1+by)$, 而我们所得到的有关极限环的不存在性与唯一性的结论则完全一样. 因此, 我们有理由提出下面两个值得思考的问题以供有兴趣的读者作进一步的深入探讨:

问题 I. 能否不经变量代换直接证明 (I) 类方程极限环的唯一性?

问题 II. 能否由 (I) 类方程极限环的唯一性推出 $(III)_{a=0}$ 的极限环的唯一性?

下面引进定理 15·4 的两个重要推论:

推论 15·1 若二次系统有一积分直线和一细焦点, 则它没有极限环.

因为总可以经过坐标变换把方程化为(15·6).

推论 15·2 若二次微分系统有一条积分直线, 则它最多只能有一个极限环.

因为总可经过坐标变换把方程化为(15·5).

以上两推论中的结果已经在 § 11 的最后提到过.

关于 III 类方程极限环的唯一性还有以下一些结果:

[226] 证明

$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+lx^2,\quad \frac{dy}{dt}=x(1+ax+by)$$

当 $\delta a(b+2l)>0$ 且 δ 在某一区间 $(0,\ \delta^*)$ 或 $(\delta^*,\ 0)$ 中变化时极限环存在且唯一.

[227] 证明

$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+bx^2+b\delta xy-by^2,$$

$$\frac{dy}{dt}=x(1+ax+by) \tag{15·20}$$

的极限环的唯一性. [228] 推广上述结果, 但设第一方程不含 y^2 项.

[229] 研究

$$\frac{dx}{dt}=ly+mx-ly^2+nxy-mx^2+\alpha(x+bny-x^2),$$

$$\frac{dy}{dt}=x(1+by-x)$$

的极限环的存在唯一性和稳定性.

关于极限环的集中分布问题, 除了 §14 讨论过的(II)类方程以外, 还有[25]用他最先发现的方法证明: 当

$$[2am-b(b+2l)][m^2-2n(b+2l)]\geqslant 0 \tag{15·21}$$

时方程 (15·1) 的极限环必定集中分布 (即不可能在两个指标 +1 的奇点外围同时存在极限环). [27] 推广了 [25] 的方法同时又改善了[25]的结果, 证明: 当(15·21)不一定成立时只要

$$[2am-b(b+2l)][m^2-2n(b+2l)]+m^2b^2\geqslant 0, \tag{15·22}$$

方程(15·1)的极限环就必定集中分布.

[230]对方程(15·1)作变换

$$\tilde{x}=x,\quad \tilde{y}=\frac{a}{b}x+y,$$

得到方程(仍记 $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ 为 x, y):

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y+\delta'x+l'x^2+m'xy+ny^2=P(x,y),\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{a}{b}P(x,y)+x(1+by)=Q(x,y),\end{cases} \tag{15·23}$$

其中

$$d'=d+\frac{a}{b},\quad l'=l-\frac{a}{b}\left(m-\frac{a}{b}n\right),\quad m'=m-\frac{2a}{b}n. \tag{15·24}$$

然后把(15·23)和方程

$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta'x+l'x^2+m'xy+ny^2,\quad \frac{dy}{dt}=x(1+by)$$

(15·25)

比较, 得到许多关于极限环存在性和集中分布的结果. 例如他证明:

定理 15·5 若方程(15·25)有绕奇点 O 的极限环或分界线环 Γ, 则当

$$\frac{a}{b}\delta>0$$

时, 在 Γ 内部且只在其内部, 方程(15·23)有极限环, 此环必为稳定(不稳定), 如果

$$\frac{a}{b}>0\quad(<0).$$

若(15·25)在 O 外围无环, 则当

$$\frac{a}{b}\left(\delta+\frac{a}{b}\right)<0$$

时(15·23)在 O 外围亦无环. 若(15·25)在另一指标 $+1$ 的奇点 M 外围有极限环或分界线环 Γ', 则当

$$\frac{a}{b}\left(\delta+\frac{m}{n}\right)<0$$

时, 在 Γ' 内部且只在其内部方程(15·23)有极限环, 此环必为稳定(不稳定), 如果

$$\frac{a}{b}<0\quad(>0).$$

若(15·25)在 M 外围无环, 则当

$$\frac{a}{b}\left(\delta+\frac{m}{n}-\frac{a}{b}\right)>0$$

时(15·23)在 M 外围亦无环.

此外, [230]中同时还得到一些有关极限环集中分布的结果.

关于 III 类方程极限环集中分布的一个很好的结果是[19]得到的, 他们证明:

定理 15·6 如果(15·1)除了两个指标 $+1$ 的焦点型奇点以外，还存在第三个有限远奇点，则极限环必定集中分布；反之，如果(15·1)只有两个有限远的焦点型奇点，则极限环可能不是集中分布的.

证明用 Dulac 函数法，详见 §16.

除此以外，还有[231]，讨论 II 类方程的环的集中分布问题.

关于保证极限环存在的 δ((15·1) 第一个方程右边 x 的系数)的变动范围是一个重要的有理论意义和实用价值的问题. 我们在 §11 中已举出一个简单的例子 [181]. 又在 §12 中曾指出. 对于 I 类方程, δ 的变动范围若为 $(0, \delta^*)$ 或 $(\delta^*, 0)$，则

$$\delta^*=f(l, m, n),$$

这个函数以及 $\delta=\delta^*$ 时所得的分界线环的方程都不得而知，对于方程 (15·5)，[179] 在一定的条件下得到四个有关保证极限环存在的, δ 的准确区间的结果如下：

定理 15·7 设方程(15·5)满足：

1) $n+l>0,\ m>0,\ l<0,\ 0<n\leqslant 1,\ m^2-4n(l+1)>0,$

则当且仅当 $$0>\delta>\frac{l+n}{2n(l+1)}\left(-m+\sqrt{m^2-4n(l+1)}\right)$$

时存在包围原点 O 的极限环；

2) $l+n<0,\ m>0,\ l>-1,\ 0<n<1,\ m^2+4l(1-n)>0,$

则当且仅当 $$0<\delta<\frac{l+n}{2n(l+1)}\left(-m+\sqrt{m^2-4n(l+1)}\right)$$

时有包围原点 O 的极限环；

3) $n=0,\ m>0,\ -1\leqslant l<0,\ m^2+l>0,$

则当且仅当 $$0<\delta<-\frac{l}{m}$$

时存在极限环；

4) $n=0,\ m>0,\ -1\leqslant l<0,\ m^2+l\leqslant 0,$

则当且仅当 $$0<\delta<-m+2\sqrt{-l}$$

时存在极限环.

类似的结果也在[232]与[233]中得到一些，例如[233]得到：

定理 15·8 当

$$l=0,\quad b>-n,\quad \delta=\frac{m}{b},\quad m^2+4nb<0$$

时方程(15·5)存在由直线 $1+by=0$ 与半赤道组成的两个分界线环，它们分别包围两个指标为 $+1$ 的有限远奇点.

与[119]一样，[232]所得到的，与 δ 的存在区间之端点对应的分界线环也是由赤道上的弧段和两条半射线段所构成的. 在[234]中也研究保证方程(15·5)存在极限环的 δ 的变动范围，得到如下的简洁的结果：

定理 15·9 不妨设 (15·5) 中的 $b=-1$，又设

$$m>0,\quad 2l+1>0,\quad n=1+\frac{m^2}{2(2l+1)},$$

则当且仅当

$$\frac{1-n}{m}<\delta<0$$

时方程存在极限环.

在这里，当

$$\delta=\frac{1-n}{m}$$

时所得的分界线环已不是由直线段或赤道上的弧段所构成，而是经过鞍点$\left(\frac{1}{n},\ 0\right)$的椭圆形轨线了.

此外，在[235]中还研究了方程(15·5)以双曲线的一支和赤道弧围成的二角形为奇闭轨线(同时也就得到保证极限环存在的，某一变动参数的容许变化区间)的条件，以及以抛物线和一直线段为奇闭轨线的条件. 又在[236]中对于有对称中心的二次系统

$$\frac{dx}{dt}=a+\sum_{i+j=2}a_{ij}x^iy^j,\quad \frac{dy}{dt}=b+\sum_{i+j=2}b_{ij}x^iy^j,\qquad (15·26)$$

研究了类似的问题. 例如他得到:

定理 15·10 若在方程

$$\frac{dx}{dt}=1-x^2+xy,\quad \frac{dy}{dt}=l-lx^2+2xy+ny^2+\alpha(1-x^2+xy) \tag{15·27}$$

中有 $l-2>n\geqslant 0$, $ln-l+2<0$, $ln-l+n+3>0$, 则当且仅当

$$0<\alpha<\bar{\alpha}=\frac{l-ln-2}{n+1}$$

时(15·27)存在两个互不包含的极限环.

此外还有几篇文章研究具三阶细焦点(0, 0)的二次系统:

$$\frac{dx}{dt}=-y+lx^2+5axy+ny^2,\quad \frac{dy}{dt}=x+ax^2+(3l+5n)xy \tag{15·28}$$

的定性性质. [237]和[238]各自独立地证明: 当 $n=0$ 时(15·28)在全平面没有极限环[1]. 进一步[182]又证明:

定理 15·11 如果(15·28)只有一个无限远初等奇点, 则此系统只有两个有限远奇点, 其中另一奇点必为粗焦点, 且包围粗焦点有奇数个极限环, 包围(0, 0)的有偶数个极限环.

下面介绍苏联数学家按他们的分类方法来研究二次系统所得到的一些较好的结果.

考虑方程

$$y'=\frac{\bar{Q}_2(x,\ y)}{\bar{P}_2(x,\ y)}=\frac{\sum\limits_{0\leqslant i+j\leqslant 2} a'_{ij}x^iy^j}{\sum\limits_{0\leqslant i+j\leqslant 2} b'_{ij}x^iy^j}, \tag{15·29}$$

引进变量代换 $x_1=y-\eta x$, $y_1=y$, 则在 dx_1 中 y_1^2 的系数是

$$\frac{1}{\eta^2}\left[\bar{Q}_2\left(\frac{1}{\xi},\ \frac{\eta}{\xi}\right)-\eta\bar{P}_2\left(\frac{1}{\xi},\ \frac{\eta}{\xi}\right)\right]\xi^2\Bigg|_{\xi=0}$$

$$=\frac{1}{\eta^2}\left[(a'_{20}-b'_{20}\eta)+(a'_{11}-b'_{11}\eta)\eta+(a'_{02}-b'_{02}\eta)\eta^2\right].$$

我们就取 η 为上式右边 [ ] 内 η 的二次式的零点, 然后仍改记 x_1.

1) $n\neq 0$ 时(15·28)在全平面无环, 最近已由李承治证明.

y_1 为 x, y, 这样便得到方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q_2(x, y)}{b_{00}+b_{10}x+b_{20}x^2+b_{11}xy+b_{01}y}. \tag{15·30}$$

1. 如果 $b_{11}\neq 0$, 则可进一步通过 x 的线性变换使 $b_{01}=0$, 再设 $y'=b_{10}+b_{20}x+b_{11}y$, $x'=x$, 便得(仍记所得的分子为 Q_2, x', y' 为 x, y):

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q_2(x, y)}{b_{00}+xy}. \tag{15·31}$$

在这里如果 $b_{00}=0$, 那末方程就和 $(\mathrm{III})_{a=0}$ 本质上是一样的; 如果 $b_{00}\neq 0$, 则(15·31)又可化为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2}{1+xy}. \tag{15·32}$$

如果 $b_{11}=0$, 则(15·30)仅当 $b_{01}\neq 0$ 时才可能存在极限环. 这时(15·30)又可经 x 的线性变换化为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q_2(x, y)}{b_{20}x^2+y}. \tag{15·33}$$

在这里如果 $b_{20}=0$, 那末方程就是(I)类方程, 不用再考虑了. 如果 $b_{20}\neq 0$, 则(15·33)又可化为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q_2(x, y)}{y+x^2}. \tag{15·34}$$

(15·32) 和 (15·34) 就是 §11 曾提到过的苏联分类法中的两种主要类型. 现在我们先从(15·32)推导出一些有用的结果.

在(15·32)中再作代换

$$Y=\frac{y}{x}+\frac{1}{x^2},\quad x=\frac{1}{\xi}, \tag{15·35}$$

则可得到

$$\xi Y\frac{dY}{d\xi}=P_4(\xi)+P_2(\xi)Y+(1-a_{02})Y^2, \tag{15·36}$$

其中

$$P_4(\xi)=-a_{20}-a_{10}\xi+(a_{11}-a_{00})\xi^2+a_{01}\xi^3-a_{02}\xi^4,$$

$$P_2(\xi)=(1+2a_{02})\xi^2-a_{01}\xi-a_{11}. \tag{15·37}$$

(15·36)对应的方程组是

$$\frac{dY}{dt}=P_4(\xi)+P_2(\xi)Y+(1-a_{02})Y^2,\quad \frac{d\xi}{dt}=\xi Y. \tag{15·38}$$

由(15·32)看出直线 $x=0$ 是方程的无切直线，故极限环不和它相交. 因此当变换到方程(15·36)时，极限环的个数和它们的相对位置没有改变. 由于 $\xi=0$ 是(15·38)的积分直线，极限环不可能和它相交，故可作变换

$$Y=|\xi|^{1-a_{02}}y, \tag{15·39}$$

而(15·38)化为

$$y\frac{dy}{d\xi}=(P_4(x)|\xi|^{2a_{02}-3}+P_2(\xi)|\xi|^{a_{02}-2}y)\operatorname{sgn}\xi, \tag{15·40}$$

或对应的方程组

$$\frac{d\xi}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-g(\xi)-f(\xi)y, \tag{15·41}$$

其中

$$\begin{aligned} g(\xi)&=-P_4(\xi)|\xi|^{2a_{02}-3}\operatorname{sgn}\xi,\\ f(\xi)&=-P_2(\xi)|\xi|^{a_{02}-2}\operatorname{sgn}\xi. \end{aligned} \tag{15·42}$$

(15·41) 已具有 Liénard 方程的形状. 其发散量为 $-f(\xi)$. 由此看出：如果 $P_2(\xi)$ 在区域 $\xi>0$ 或 $\xi<0$ 中保持常号，则方程(15·41)，从而(15·32)，在该半平面中就不存在极限环. 下面要证明这个结论对于带形区域

$$\xi_1<\xi<\xi_2,\quad \xi_1\xi_2>0 \tag{15·43}$$

也是正确的. 为此先证：

定理 15·12 如果 (15·37) 中的 $P_4(\xi)=Q_2(\xi)P_2(\xi)$, 即 $P_2(\xi)$ 是 $P_4(\xi)$ 的二次因式，则方程(15.32)没有极限环.

【证】 先设 $P_2(\xi)$ 有两个非零根，即 $a_{11}\neq0$, $1+2a_{02}\neq0$. 这时

$$\begin{aligned} Q_2(\xi)=&-a_{02}(1+2a_{02})^{-1}\xi^2+a_{01}(1+a_{02})(1+2a_{02})^{-2}\xi\\ &+a_{20}a_{11}^{-1}. \end{aligned} \tag{15·44}$$

现在把(15·41)化到 Liénard 平面，得到

$$\frac{d\xi}{dt}=\eta-F(\xi),\quad \frac{d\eta}{dt}=-g(\xi), \tag{15·45}$$

其中
$$F(\xi)=\int_{\xi_0}^{\xi}f(\xi)d\xi,$$

而 $(\xi_0, 0)$ 是 (15·45) 或 (15·41) 的一个焦点型奇点. 为了证明 (15·45)在 $(\xi_0, 0)$外围不存在极限环，不妨限制在带域 $\bar{\bar{\xi}}_0<\xi<\bar{\xi}_0$ 中来讨论；这里 $\bar{\bar{\xi}}_0(\bar{\xi}_0)$是 $<(>)\xi_0$ 的，且与 ξ_0 最近的 $g(\xi)=0$ 的根，如果 $\bar{\bar{\xi}}_0(\bar{\xi}_0)$不存在，就改取之为 $-\infty(+\infty)$. 利用 Филиппов 变换

$$z=\int_{\xi_0}^{\xi}g(\xi)d\xi,$$

(15·45)被变为两个方程:

$$\frac{d\eta}{dz}=\frac{1}{F_1(z)-\eta}\quad (\text{对应于 } \xi_0\leqslant\xi<\bar{\xi}_0), \tag{$15·45)_1$}$$

$$\frac{d\eta}{dz}=\frac{1}{F_2(z)-\eta}\quad (\text{对应于 } \bar{\bar{\xi}}_0<\xi\leqslant\xi_0). \tag{$15·45)_2$}$$

下面要证明曲线 $\eta=F_1(z)$和 $\eta=F_2(z)$在区域

$$0\leqslant z\leqslant\min\left[\int_{\xi_0}^{\bar{\xi}_0}g(\xi)d\xi,\ \int_{\xi_0}^{\bar{\bar{\xi}}_0}g(\xi)d\xi\right]$$

内只有一个公共点 (0, 0)，由此根据 §5 定理 5·4 即知方程 (15·45)在$(\xi_0, 0)$外围不存在极限环，为此，只要证明

$$\frac{d}{d\xi}[\bar{F}_1(\eta)-\bar{F}_2(\eta)] \tag{15·46}$$

(其中 $\bar{F}_i(\eta)$是 $F_i(z)$的反函数)在对应的区域中不变号，或者[1)]

$$Q_2(\xi_1)\xi_1^{a_{02}-1}=Q_2(\xi_2)\xi_2^{a_{02}-1}, \tag{15·47}$$

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1}P_2(\xi)\xi^{a_{02}-2}\,d\xi=\int_{\xi_0}^{\xi_2}P_2(\xi)\xi^{a_{02}-2}\,d\xi \tag{15·48}$$

当 $\bar{\xi}_0>\xi_1\geqslant\xi_0\geqslant\xi_2>\bar{\bar{\xi}}_0$ 时两联立方程有唯一的一组解 $\xi_1=\xi_2=\xi_0$. 易见当 $a_{02}\neq-1, 0, 1$ 时条件(15·48)化为

1) 即 $g(\xi_2)/f(\xi_2)=g(\xi_1)/f(\xi_1)$ 与 $F(\xi_1)=F(\xi_2)$ 只有一组解: $\xi_1=\xi_2=\xi_0$.

$$\frac{1+2a_{02}}{a_{02}+1}(\xi_1^{a_{02}+1}-\xi_2^{a_{02}+1})-\frac{a_{01}}{a_{02}}(\xi_1^{a_{02}}-\xi_2^{a_{02}})$$

$$-\frac{a_{11}}{a_{02}-1}(\xi_1^{a_{02}-1}-\xi_2^{a_{02}-1})=0, \qquad (15\cdot49)$$

而条件(15·47)可以写成

$$-a_{02}(1+2a_{02})(\xi_1^{a_{02}+1}-\xi_2^{a_{02}+1})+a_{01}(1+a_{02})(\xi_1^{a_{02}}-\xi_2^{a_{02}})$$

$$+\frac{a_{20}}{a_{11}}(1+2a_{02})^2(\xi_1^{a_{02}-1}-\xi_2^{a_{02}-1})=0. \qquad (15\cdot50)$$

以(15·49)的 $\xi_1^{a_{02}+1}-\xi_2^{a_{02}+1}$ 的表达式代入(15·50)，得到

$$(\xi_1^{a_{02}-1}-\xi_2^{a_{02}-1})\Delta=0, \qquad (15\cdot51)$$

其中 $$\Delta=\frac{-a_{02}a_{11}(1+a_{02})}{a_{02}-1}+\frac{a_{20}}{a_{11}}(1+2a_{02})^2.$$

由于除了 $\xi_2=\xi_1=\xi_0$ 以外，常有 $\xi_2<\xi_1$，故方程(15·51)当 $\Delta\neq0$ 时有唯一的解 $\xi_1=\xi_2=\xi_0$，即在$(\xi_0,\ 0)$外围不存在极限环.

如果 $\Delta=0$，则$(\xi_0,\ 0)$是中心，从而也不存在极限环.

对于情况 $a_{02}=-1$，$a_{02}=0$ 或 $a_{02}=1$，可作类似的变换，得到相当于(15·51)的方程为

$$\frac{a_{20}}{a_{11}}[\xi_1^{-2}-\xi_2^{-2}]=0,$$

$$\frac{a_{20}}{a_{11}}[\xi_1^{-1}-\xi_2^{-1}]=0 \quad 或 \quad -2a_{11}\ln\frac{\xi_1}{\xi_2}=0,$$

故可得与前同样的结论.

在情况 $a_{11}=0$ 时 $Q_2(\xi)$ 有表达式:

$$Q_2(\xi)=-a_{02}(1+2a_{02})^{-1}\xi^2+a_{01}(1+a_{02})(1+2a_{02})^{-2}\xi$$

$$+\frac{a_{10}}{a_{01}},$$

余下的计算和 $a_{11}\neq0$ 时类似.

又若 $P_2(\xi)$ 有一对零根，则由发散量的常号即知不存在极限环. 定理证毕.

由此定理可以立刻推出 §11 末尾所提到的二次系统的一个重要性质:

定理 15·13 如果方程 (15·38) 的发散量为零的曲线通过两个初等奇点[1]，则不存在极限环.

【证】 由前知初等奇点应是形如$(\xi_1, 0)$与$(\xi_2, 0)$的奇点. 又由(15·38)看出，在这些点的特征方程是

$$\lambda^2 - P_2(\xi_i)\lambda - \xi_i P_4'(\xi_i) = 0.$$

由定理的假设知，应有 $P_2(\xi_1) = P_2(\xi_2) = 0$. 但另一方面，$\xi_1$, ξ_2 应是 $P_4(\xi) = 0$ 的根，故 $P_2(\xi)$是 $P_4(\xi)$的因式. 应用定理 15·12 即得本定理的证明.

现在回到(15·43). 假设 $P_2(\xi)$在此带域中为常号，则显见方程 (15·41) 不能有位于此带域中的极限环. 但若 $P_2(\xi_1) = P_2(\xi_2) = 0$，方程是否有包围$(\xi_1, 0)$或$(\xi_2, 0)$的极限环呢？这个问题由定理 15·13 立刻可知答案是否定的.

最后注意，当 $a_{01} = a_{10} = 0$ 时方程(15·38)的相图有关于 $\xi = 0$ 的对称性，这时要研究极限环的存在性与个数，只须研究半平面 $\xi \geqslant 0$ 就够了，作变换 $\xi^2 = X$，则(15·36)化为更简单的形式：

$$2XY\frac{dY}{dX} = -a_{20} + (a_{11} - a_{00})X - a_{02}X^2 + [(1+2a_{02})X - a_{11}]Y + (1-a_{02})Y^2. \tag{15·52}$$

由此可见，此时方程已化为 $(\text{III})_{a=0}$ 的(15·5). 这样，在 $\xi > 0$(或 < 0)半平面中最多存在一个极限环；又若方程存在细焦点，则没有极限环[2].

同样的结果后来也被[239]所独立地得到.

注意：前面提到的关于方程(15·28)的[237]和[238]的结果就是用证明定理 15·12 的办法来证明的. 此外，§ 14 中已提到[216]中关于在条件(14·17)之下方程(14·5)不存在极限环也是用同样

1) 此时两奇点或同为细焦点，同为细鞍点，或一为细焦点，一为细鞍点，它们的共同特征是：线性部分的特征根有相同的绝对值.

2) 注意，由(15·32)看出，此时方程所确定的向量场实际上有对称中心(0, 0).

的方法证明的.

定理 15·13 只是对方程(15·32)证明的. 但在[222]中对方程(15·34)也进行了类似的研究. 为此,他们先作变量代换

$$x^2+y=\bar{y}e^{a_{02}x}, \tag{15·53}$$

把(15·34)化为

$$\frac{d\bar{y}}{dx}=\frac{-f(x)\bar{y}-g(x)}{\bar{y}}, \tag{15·54}$$

其中

$$\begin{aligned} f(x) &= -P_2(x)e^{-a_{02}x} \\ &= -(a_{01}+(2+a_{11})x-2a_{02}x^2)e^{-a_{02}x}, \\ g(x) &= -P_4(x)e^{-2a_{02}x} \\ &= -[a_{00}+a_{10}x+(a_{20}-a_{01})x^2-a_{11}x^3+a_{02}x^4]e^{-2a_{02}x}. \end{aligned} \tag{15·55}$$

然后用同样的办法证明定理 15·13 对方程(15·54), 从而方程(15·34)也成立, 最后注意到(15·31)当 $b_{00}=0$ 时为 $(\mathrm{III})_{a=0}$ 型方程,对于它有定理 15·4,我们于是得到:

定理 15·14 如果二次系统(15·29)有两个细焦点,或两个细鞍点,或一个细焦点,一个细鞍点,则它没有极限环.

注意: 根据以上的讨论, 读者看到所有的二次系统都可以经过适当的变量代换化为 Liénard 型方程组. 但这种化法并不是唯一的. 在[228]中给出了适用于比二次系统更为广泛的变量代换:

定理 15·15 形如

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_0(x)-f_1(x)y, \\ \frac{dy}{dt} &= g_0(x)+g_1(x)y+g_2(x)y^2 \quad (f_1(x)\neq 0) \end{aligned} \tag{15·56}$$

的方程都可以经过变量代换化为 Liénard 型方程.

【证】 先令 $x=x$, $\xi=f_0(x)-f_1(x)y$, 则得

$$\frac{dx}{dt}=\xi,\quad \frac{d\xi}{dt}=-\psi_0(x)-\psi_1(x)\xi-\psi_2(x)\xi^2, \tag{15·57}$$

其中 $$\psi_0(x)=f_1(x)g_0(x)+f_0(x)g_1(x)+\frac{g_2(x)}{f_1(x)}f_0^2(x),$$

$$\psi_2(x)=\frac{g_2(x)}{f_1(x)}-\frac{f_1'(x)}{f_1(x)},$$

$$\psi_1(x)=\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}f_0(x)-f_0'(x)-g_1(x)-2\frac{g_2(x)}{f_1(x)}f_0(x).$$

再令 $$\xi=u\exp\left(-\int_0^x\psi_2(z)dz\right),$$

则(15·57)成为

$$\frac{dx}{dt}=u\exp\left(-\int_0^x\psi_2(z)dz\right),$$

$$\frac{du}{dt}\exp\left(-\int_0^x\psi_2(z)dz\right)-u^2\psi_2\exp\left(-2\int_0^x\psi_2(z)dz\right)$$

$$=-\psi_0(x)-\psi_1(x)u\exp\left(-\int_0^x\psi_2(z)dz\right)$$

$$-\psi_2(x)u^2\exp\left(-2\int_0^x\psi_2(z)dz\right).$$

上式即 $$\frac{dx}{dt}=u\exp\left(-\int_0^x\psi_2dz\right),$$

$$\frac{du}{dt}=-\psi_0\exp\left(\int_0^x\psi_2dz\right)-\psi_1u.$$

再令 $$V=u+\int_0^x\psi_1\exp\left(\int_0^s\psi_2dz\right)ds,$$

$$\frac{dt}{d\tau}=\exp\left(\int_0^x\psi_2dz\right),$$

则得

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{d\tau}=V-\displaystyle\int_0^x\psi_1(z)\exp\left(\int_0^z\psi_2(s)ds\right)dz,\\ \dfrac{dV}{d\tau}=-\psi_0(x)\exp\left(2\displaystyle\int_0^x\psi_2(z)dz\right),\end{cases}\tag{15·58}$$

它就是我们所需要的形式，定理证毕.

显见 $(\mathrm{III})_{n=0}$ 已具有 (15·56) 的形式. 要使 $(\mathrm{III})_{n\neq0}$ 能适用这一套变换，可先设 $n=1$，对方程

$$\frac{dx}{dt}=-y(1-y)+\delta x+lx^2+mxy,\quad \frac{dy}{dt}=x(1+ax+by)$$

施行变换

$$x=\frac{\bar{x}}{1+\bar{y}},\quad y=\frac{\bar{y}}{1+\bar{y}},$$

把含奇点 (0, 1) 的直线 $y=1$ 变到无穷远去(相应地赤道被变成 $\bar{y}=-1$),就可得到形如(15·56)的方程了.

最后,关于二次系统奇闭轨线除了从前提到过的 [14] 的工作以外,在苏联还有[192], [240], [241]等工作. 在[192]中把奇闭轨线分类列表, 并举例说明其实现的可能性. 在[240]中专门研究方程(15·31)当 $b_{00}=0$ 时奇异环的存在性和稳定性, 在[241]中证明当(15·31)中的系数满足条件:

$$b_{00}=0,\quad a_{01}^2-4a_{00}a_{02}<0,\quad a_{11}^2-4a_{20}(a_{02}-1)<0,$$

$$\frac{-1+a_{02}}{a_{02}}<0,\quad a_{00}a_{20}<0$$

时存在两个由上(下)半赤道和 x 轴构成的, 不能由奇异环上两鞍点的特征值来判别稳定性的临界奇异环, 并得到判别稳定性的充分条件. 但[242]指出他的计算有错误, 给予修正, 同时又给出判别稳定性的更为简单的充分条件.

习　题

1. 证明定理15·3.
2. 证明(15·16)式以及后面的 $P_2(x)$ 的表达式.
3. 证明图15·1, 并作出在条件(15·11)之下方程(15·15)的全局相图.
4. 用计算发散量沿闭轨线积分一周的方法证明, 对于方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x+ax^2+bxy+cy^2}{y},$$

只要下列三组条件之一成立, 便不存在极限环:

(i) $a<0,\ c=0$;　(ii) $a=0$;　(iii) $a>0,\ c=0$.

5. 证明(15·36)和(15·37)两式.
6. 证明(15·40)和(15·44)式.
7. 在 $a_{02}=-1$, 0 或 1 时证明定理15·12.

8. 证明(15·54)和(15·55)式.

9. 给出定理15·15的证明的详细推导.

10. 证明方程

$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+lx^2+mxy,\quad \frac{dy}{dt}=x(1+ax+by)$$

可借变换 $v=y-\frac{b}{m}x-\frac{b}{m^2}\ln(1-mx),\quad \frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{1-mx}$

化为 Liénard 方程

$$\frac{dx}{d\tau}=-v-\left[\frac{b}{m}x+\frac{b}{m^2}\ln(1-mx)-\frac{\delta x+lx^2}{1-mx}\right],$$

$$\frac{dv}{d\tau}=\frac{x+ax^2}{1-mx}+\frac{bx(\delta x+lx^2)}{(1-mx)^2}.$$

11. 对方程

$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+lx^2+mxy,\quad \frac{dy}{dt}=x(1+ax-y),$$

试证当 $\delta\geqslant m>0$, $a(2l+1)\leqslant 0$ 或 $\delta\leqslant m<0$, $a(2l+1)\geqslant 0$ 时不存在极限环. 又若 $0\leqslant a-\delta\leqslant m$, $l+ma\leqslant 0$, 则方程存在唯一的极限环.

12. 试研究在变换

$$X=\frac{1}{x},\ Y=\frac{1}{x^2}(1+xy)$$

之下射影平面(x, y, z)与(X, Y, Z)之间的区域对应关系, 并指出哪些地方不是1-1对应.

§16. 二次系统定性研究中的 Dulac 函数法

在前面几节研究 I, II, III 类方程的极限环不存在性时读者已经看到 Dulac 函数法对于二次系统似乎有特别的好处. 例如,在§12 证明 $(\mathrm{I})_{\delta=0}$ 不存在极限环 (定理 12·4) 只用了两个不同的 Dulac 函数(12·22)和(12·23), 然后算一下发散量, 立刻就解决问题. 而 [201] 和 [202] 证明同一结果却都用了三四页的篇幅. 同样, 对于 $(\mathrm{III})_{a=\delta=0}$ 的无环性, 上一节中我们介绍了[203]的证明, 也用了几页的篇幅, 下面试看居乃旦和[243]的证明:

定理 16·1 方程

$$\frac{dx}{dt}=-y+lx^2+mxy+ny^2, \quad \frac{dy}{dt}=x(1+by) \tag{16·1}$$

当 $m(l+n)=0$ 时有中心点, 当 $m(l+n)\neq 0$ 时没有极限环.

【证】 1) $m^2+4n(n+b)\geqslant 0$ 的情况.

这时 $n(n+b)\theta^2-m\theta-1=0$ 有实根. 取此方程的任一根, 再置

$$B_1(x, y)=(1+by)^{\frac{1}{b}(mn\theta-b-2l)}(n\theta y-x-\theta)^{m\theta}. \tag{16·2}$$

然后计算

$$\frac{\partial(B_1P)}{\partial x}+\frac{\partial(B_1Q)}{\partial y}$$
$$=-m(l+n)\theta x^2(1+by)^{\frac{1}{b}(mn\theta-b-2l)}(n\theta y-x-\theta)^{m\theta-1}, \tag{16·3}$$

并且注意 $n\theta y-x-\theta=0$ 是通过鞍点或结点$\left(0, \frac{1}{n}\right)$而与该点的一

个例外方向相切的一条积分直线，或是轨线和它相交时都从同一个方向穿过，故极限环若存在只能在此直线的一边，于是由(16·3)即得定理的证明.

2) $m^2+4n(n+b)<0$ 的情况.

这时(16·2)不能用了，因为 $n(n+b)\theta^2-m\theta-1=0$ 只有一对共轭复根. 现在我们依照[243]取

$$B_2(x,\ y)=(1+by)^{-\frac{2l}{b}-1}\exp\left\{\frac{2m}{\sigma}\operatorname{tg}^{-1}\left[-\frac{2n(n+b)x}{\sigma(1-ny)}-\frac{m}{\sigma}\right]\right\}, \tag{16·4}$$

其中 $\sigma=\sqrt{-m^2-4n(n+b)}$. 然后计算

$$\frac{\partial}{\partial x}(B_2P)+\frac{\partial}{\partial y}(B_2Q)$$
$$=\frac{m(l+n)x^2(1-ny)}{L}(1+by)^{-\frac{2l}{b}-1}e^{\frac{2m}{\sigma}\operatorname{tg}^{-1}\left[-\frac{2n(n+b)x}{\sigma(1-ny)}-\frac{m}{\sigma}\right]}, \tag{16·5}$$

其中 $L=(1-ny)^2-n(n+b)x^2-mx(1-ny)$ 为正定二次型，并注意现在 $1+by=0$ 把 $(0,\ 0)$ 和 $\left(0,\ \frac{1}{n}\right)$ 分开，故原点外围的极限环不可能和 $1-ny=0$ 相交. 于是由(16·5)即得定理的证明.

注意 1: 在 (16·2) 中令 $b\to0$, 则 $B(x,\ y)$ 的极限函数就是(12·23)中的 Dulac 函数.

注意 2: L 可分解为 $[(ny-1)\theta_1-x][(ny-1)\theta_2-x]$, θ_i 是 $n(n+b)\theta^2-m\theta-1=0$ 的一对共轭复根.

注意 3: 若对(16·4)中的反三角函数应用熟知的公式

$$\operatorname{tg}^{-1}z=\frac{1}{2i}\ln\frac{i-z}{i+z}=\ln\left(\frac{i-z}{i+z}\right)^{\frac{1}{2i}}, \tag{16·6}$$

再改写 $-i\sigma=\sqrt{m^2+4n(n+b)}=\sqrt{\varDelta}$, 则得

$$B_2'(x,\ y)=(-1)^{\frac{m}{\sqrt{\varDelta}}}(1+by)^{-\frac{2l}{b}-1}\left[x+\frac{m+\sqrt{\varDelta}}{2n(n+b)}(1-ny)\right]^{\frac{m}{\sqrt{\varDelta}}}$$

$$\times\left[x+\frac{m-\sqrt{\Delta}}{2n(n+b)}(1-ny)\right]^{\frac{-m}{\sqrt{\Delta}}}, \tag{16·7}$$

并丢掉前面的因子$(-1)^{\frac{m}{\sqrt{\Delta}}}$，那末可证这个 $B_2'(x, y)$ 也可用于 $m^2+4n(n+b)\geqslant 0$ 的情况，代替 $B_1(x, y)$ 作为那里的 Dulac 函数.

再看一个例子. [201] 中证明 $(\mathrm{I})_{\delta=0}$ 无环是从研究方程

$$\frac{dy}{dt}=x,\quad \frac{dx}{dt}=-y+lx^2+mxy-ly^2+f(y) \tag{16·8}$$

的性质开始的. 他证明：若 $f(y)$ 不变号，在 $y=0$ 的任何邻域中不恒等于零，且能保证(16·8)的初值问题的唯一性，则(16·8)没有极限环，然后再取适当的 $f(y)$ 来证明 $(\mathrm{I})_{\delta=0}$ 没有极限环. 现在我们用 Dulac 函数法来证明下面的定理，它所包含的东西也比 $(\mathrm{I})_{\delta=0}$ 无环更多一些.

定理 16·2 设在方程

$$\frac{dx}{dt}=-y+lx^2+mxy+ny^2+\theta f(y)=P,\qquad \frac{dy}{dt}=x=Q, \tag{16·9}$$

其中 θ 为常数，$f(y)$ 除满足以上所说的条件以外，还满足

$$(l+n)\theta f(y)\geqslant 0,$$

则(16·9)不存在极限环.

【证】 取 Dulac 函数(仍是(12·23)中的函数)

$$B_3(x, y)=(x-\alpha ny+\alpha)^{\alpha m}e^{(\alpha mn-2l)y}, \tag{16·10}$$

其中 $\alpha=\frac{1}{2n^2}(m+\sqrt{4n^2+m^2})$ 是 $n^2\alpha^2-m\alpha-1=0$ 的正根，可以算出

$$\frac{\partial}{\partial x}(B_3P)+\frac{\partial}{\partial y}(B_3Q)$$
$$=\alpha m[(l+n)x^2+\theta f(y)](x-\alpha ny+\alpha)^{\alpha m-1}e^{(\alpha mn-2l)y}. \tag{16·11}$$

再注意在定理的条件下直线 L：$x-\alpha ny+\alpha=0$ 是无切直线，因为

$$\left.\frac{dL}{dt}\right|_{L=0}=(l+n)x^2+\theta f(y),$$

由此立刻得到定理的证明．特别，若 $f(y)\equiv 0$，则本定理就退化成为定理 12·4；若 $l+n=0$，它就退化为[201]中的定理了．

读者看了这几个比前几节更为复杂，但也更为有用的 Dulac 函数以后，一定会提出问题：这些 Dulac 函数是怎么找到的？有没有什么一定的方法？ 的确，在我们于六十年代初期开始想证明某些较简单的二次系统不存在极限环时，完全是碰运气乱凑的． 当时所用的函数主要是指数函数，其指数部分是低次多项式，以及分式函数，如 § 12 的函数(12·22)，定理 14·1 的证明中的 $\frac{1}{1-mx}$，§ 15 的函数(15·3)，等等．函数 $B_3(x, y)$ 也是在此指导思想之下凑出来的． 但一经找到 $B_3(x, y)$ 以后，我们就得到启发：原来 $x-amy+a=0$ 是过鞍点的分界线在鞍点的切线，它同时又是系统的无切直线． 此外，当 $l+n=0$ 时，一方面 $x-amy+a=0$ 成为积分直线，另一方面，$B_3(x, y)$ 又成为 $(\mathrm{I})_{\delta=0}$ 的积分因子．由此我们体会到，在 Dulac 函数中应推广分式函数成为形如 $(ax+by+c)^k$ 的幂函数，其中直线 $ax+by+c=0$ 或为无切直线，或为积分直线，或为过奇点在例外方向的直线，当然这奇点也可能是结点，因为结点也有例外方向；同时，求 Dulac 函数可以先求有中心点时的积分因子． 此外，由 $B_1(x, y)$ 到 $B_2(x, y)$ 则说明：如果一个 Dulac 函数只能适用于一种情况之下，那末通过复变量的初等函数之间的关系可以由此得到另一 Dulac 函数，它就能适用于其他的情况[1)]．最后注意，以上诸例中所得到的发散量在可能存在极限环的区城中或是定号，或是恒等于零． 但是如果所得的发散量除了定号部分以外，还有一个可变号的线性函数 $Ax+By+C$，那末在直线 $Ax+By+C=0$ 上最多只能有两个与二次系统的轨线相切之点． 如果已知此直线通过二次系统的一个非焦点的奇点，那末它上面最多

1) 这一事实在复域定性理论中的意义何在，值得研究．

还只能有一个切点，由此就可证明该系统的极限环如果存在的话，必然是集中分布的. 以上这些就是 § 15 定理 15·6 的证明的主要思路. 至于所用的 Dulac 函数后面再给出.

下面试用求中心点情况下的积分因子的办法来导出 Dulac 函数 $B_i(x, y)\ (i=1, 2)$. 考虑 $(\mathrm{III})_{a=\delta=0}$:

$$\frac{dx}{dt}=-y+lx^2+mxy+ny^2,\quad \frac{dy}{dt}=x(1+by). \tag{16·12}$$

它当 $l+n=0$ 时有积分因子

$$\mu_1(x, y)=V_1^{-1}V_2^{-1}, \tag{16·13}$$

其中

$$V_1=1-2ny-mx+n^2y^2+mnxy-n(n+b)x^2=L\text{（见(16·5)）}.$$

$$V_2=1+by.$$

为了使得当 $l+n\neq 0$ 时所得的发散量的表达式尽量简单，现在取 (16·12) 的 Dulac 函数为

$$B_4(x, y)=V_1^{-1}V_2^{\eta},\quad \eta=-1-\frac{2(l+n)}{b}. \tag{16·14}$$

这样算出的发散量

$$\frac{\partial}{\partial x}(B_4P)+\frac{\partial}{\partial y}(B_4Q)$$

$$=m(l+n)x^2\left[1-ny+\frac{2n(n+b)}{m}x\right]V_1^{-2}V_2^{\eta}, \tag{16·15}$$

其中 $V_1=L=-n(n+b)(\overline{ny-1}\,\theta_1-x)(\overline{ny-1}\,\theta_2-x)$，而 θ_1, θ_2 是 $n(n+b)\theta^2-m\theta-1=0$ 的两根. 如果 $m^2+4n(n+b)\geqslant 0$，则 θ_1, θ_2 为实数，两直线

$$\theta_1(ny-1)-x=0 \quad 与 \quad \theta_2(ny-1)-x=0 \tag{16·16}$$

都过 $\left(0, \frac{1}{n}\right)$，此奇点是鞍点或结点，它们和 x 轴的交点分别为 $(-\theta_1, 0)$ 与 $(-\theta_2, 0)$. 而 $1-ny+\frac{2n(n+b)}{m}x=0$ 也过 $\left(0, \frac{1}{n}\right)$,

它和 x 轴的交点$\left(-\frac{m}{2n(n+b)},\ 0\right)$则夹在 $(-\theta_1,\ 0)$ 与 $(-\theta_2,\ 0)$ 之间. 由此可见,如果 $\theta_1\theta_2<0$, 即 $n(n+b)>0$(这时$\left(0,\ \frac{1}{n}\right)$是鞍点), 则 $1-ny+\frac{2n(n+b)}{m}x=0$ 有可能和极限环相交而不致导出矛盾. 故这时 (16·15) 不能用来证明(16·12)当 $m(l+n)\neq0$ 时不存在极限环. 但若 $\theta_1\theta_2>0$, 即 $n(n+b)<0$, 这时$\left(0,\ \frac{1}{n}\right)$是结点(或焦点), 则两直线(16·16)与 x 轴的交点在原点的同一边(或二者都是虚直线). 当$\left(0,\ \frac{1}{n}\right)$是结点时,

$$1-ny+\frac{2n(n+b)}{m}x=0$$

与 x 轴的交点夹在$(\theta_1,\ 0)$与$(\theta_2,\ 0)$之间, 且由于 (16·16) 为无切直线, 故知不可能存在极限环. 当$\left(0,\ \frac{1}{n}\right)$是焦点时, (16·16) 与 x 轴无实交点, (16·15)仍然不能用来证明 (16·12) 当 $m(l+n)\neq0$ 时不存在极限环.

下面将改用 $\Phi(U)B_4(x,\ y)$ 来代替 $B_4(x,\ y)$ 作为 Dulac 函数试试看, 这里 $U=C$ 是(16·12)当 $l+n=0$ 时的通积分, Φ 是 U 的适当选取的函数. 容易用初等积分法算出当 $l+n=0$ 时(16·12)有通积分

$$U_1(x,\ y)=\ln\left[V_1^{\frac{1}{2n(n+b)}}(1+by)^{\frac{1}{b(n+b)}}\right]+\frac{m}{2\sigma_1 n(n+b)}\ln\frac{L_+}{L_-}=C, \tag{16·17}$$

其中 $\sigma_1=\sqrt{m^2+4n(n+b)}$, 又

$$\begin{aligned}L_-&=-2n(n+b)x-(m-\sigma_1)(1-ny),\\ L_+&=-2n(n+b)x-(m+\sigma_1)(1-ny),\end{aligned} \tag{16·18}$$

$$V_1=-\frac{L_+L_-}{4n(n+b)}.$$

(16·17) 式只适用于 $m^2+4n(n+b)\geqslant0$ 的时候. 如果 $m^2+4n(n+b)<0$, 则在 L_+ 与 L_- 中将出现复系数. 仍用(16·6), 便可

由(16·17)化得(16·12)的另一通积分为

$$U_2(x,\ y)=\ln[V_1^{\frac{1}{2n(n+b)}}(1+by)^{\frac{1}{b(n+b)}}]+\frac{m}{\sigma_2 n(n+b)}\operatorname{tg}^{-1}\left[\frac{-2n(n+b)x-m(1-ny)}{\sigma_2(1-ny)}\right]=C, \tag{16·19}$$

其中 $\sigma_2=\sqrt{-m^2-4n(n+b)}$.

今在 $m^2+4n(n+b)\geqslant 0$ 时改取 Dulac 函数为

$$B_5(x,\ y)=e^{\frac{2n(n+b)\sigma_1}{\sigma_1-m}U_1(x,y)}B_4(x,\ y)=L_+^{m\alpha_1}(1+by)^{\frac{1}{b}(mn\alpha_1-2l-b)},$$

其中 $\alpha_1=\dfrac{m+\sigma_1}{2n(n+b)}$ 是 $n(n+b)\alpha^2-m\alpha-1=0$ 的根，则显见 $B_5(x,\ y)$就是(16·2)式中的 $B_1(x,\ y)$，所以是可用的.

同样，在 $m^2+4n(n+b)<0$ 时改取 Dulac 函数为

$$B_6(x,\ y)=e^{2n(n+b)U_2(x,y)}\cdot B_4(x,\ y)=(1+by)^{-\frac{2l}{b}-1}e^{\frac{2m}{\sigma_2}\operatorname{tg}^{-1}\left[-\frac{2n(n+b)x}{\sigma_2(1-ny)}-\frac{m}{\sigma_2}\right]}, \tag{16·20}$$

那末它就是(16·4)中的 $B_2(x,\ y)$，所以也是可用的.

由此可见，Dulac 函数 $B_1(x,\ y)$与 $B_2(x,\ y)$ 可按一定的办法造出，而不是完全乱凑出来的.

下面再举一个例子，考虑方程[219]：

$$\frac{dx}{dt}=-y+lx^2+mxy,\quad \frac{dy}{dt}=x(1+ax). \tag{16·21}$$

易见当 $l=0$ 时方程有积分因子

$$\mu=\frac{1}{1-mx}$$

和通积分

$$U_3=\frac{a}{2m}x^2+\frac{1}{m}\left(1+\frac{a}{m}\right)x-\frac{1}{2}y^2+\left(1+\frac{a}{m}\right)\frac{1}{m^2}\ln(1-mx).$$

令

$$U_4=e^{2mU_3}=(1-mx)^{\frac{2}{m}\left(\frac{a}{m}+1\right)}e^{ax^2-my^2+2\left(1+\frac{a}{m}\right)x}. \tag{16·22}$$

显然 $$U_1\mu=(1-mx)^{\frac{2a}{m^2}+\frac{2}{m}-1}e^{ax^2-my^2+2\left(1+\frac{a}{m}\right)x}$$

仍是(16·21)的积分因子，但此式中不含 l. 和前例类似，为了得到 $l\neq 0$ 时的 Dulac 函数，应取

$$B(x,\ y)=U_1\mu e^{-2ly}=(1-mx)^{\frac{2a}{m^2}+\frac{2}{m}-1}e^{ax^2-my^2+2\left(\frac{a}{m}+1\right)x-2ly},\tag{16·23}$$

这里添上的因式恰好是(16·21)当 $a=m=0$ 时的积分因子. 然后对方程(16·21)可算出

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ)=-l[2a^2mx^2+2a-m]x^2B(1-mx)^{-1}.\tag{16·24}$$

由(16·24)看出，当 $l=0$ 或 $a=m=0$ 时(16·21)有中心点. 当 $l\neq 0,\ m\neq 2a$ 时原点为焦点. 若 $m=2a$, 则原点为细焦点，$\bar{v}_3=0$, 而 $\bar{v}_5$ 的符号由 l 的符号决定(见§12(12·21)式)，故不存在极限环.

有时对某些方程同时可以找出几个不同类型的 Dulac 函数，例如方程 $(\mathrm{I})_{\delta=n=0}$:

$$\frac{dx}{dt}=-y+lx^2+mxy,\quad \frac{dy}{dt}=x,\tag{16·25}$$

它当 $l=0$ 时有中心，且有积分因子

$$\mu_1=e^{mx-\frac{m^2}{2}y^2}\quad 和\quad \mu_2=\frac{1}{1-mx}$$

及通积分 $$U=(1-mx)e^{mx-\frac{m^2}{2}y^2}.$$

又当 $m=0$ 时方程也有中心和积分因子 e^{-2ly}. 函数

$$B_1=e^{mx-\frac{m}{2}y^2-2ly}\quad 和\quad B_2=(1-mx)^{-1}e^{-2ly}$$

都可用来作为(16·25)的 Dulac 函数:

$$\frac{\partial}{\partial x}(B_1P)+\frac{\partial}{\partial y}(B_1Q)=mlx^2e^{mx-2ly-\frac{m^2}{2}y^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(B_2P)+\frac{\partial}{\partial y}(B_2Q)=mlx^2(1-mx)^{-1}e^{-2ly}$$

上式说明,当 $ml\neq 0$ 时(16·25)不存在极限环.

以上对于 III 类方程，实际上我们只讨论了可能满足中心点条件的一种情况，即(16·1). 对于可能满足其他中心点条件的二次系统不在此一一讨论,读者可参看[244].

下面要用 Dulac 函数法来证明 §15 的定理 15·6.

1. 当 $m^2+4n(n+b)\geqslant 0$ 的情况.

取 $\quad \overline{B}_1=e^{b(n+b)U_1}\mu_1=L_+^{\frac{(\sigma_1+m)b}{2n\sigma_1}-1}L_-^{\frac{(\sigma_1-m)b}{2n\sigma_1}-1}$,

其中 U_1 与 μ 的意义如 (16·17) 与 (16·13), L_+ 与 L_- 的意义如(16·18). 对方程

$$\frac{dx}{dt}=-y+lx^2+mxy+ny^2,\quad \frac{dy}{dt}=x(1+ax+by) \tag{16·26}$$

计算发散量,得到

$$\frac{\partial}{\partial x}(\overline{B}_1P)+\frac{\partial}{\partial y}(\overline{B}_1Q)$$

$$=[Cx+A(1-ny)]x^2L_+^{\frac{(\sigma_1+m)b}{2n\sigma_1}-2}L_-^{\frac{(\sigma_1-m)b}{2n\sigma_1}-2}, \tag{16·27}$$

其中 $$A=m(l+n)-a(2l+b),$$

$$C=am(2l+b+n)-(2l+b)(n+b)(n+l). \tag{16·28}$$

直线 l: $Cx+A(1-ny)=0$ 通过$\left(0,\ \frac{1}{n}\right)$, 这时$\left(0,\ \frac{1}{n}\right)$是鞍点或结点. 因此它上面最多还可能再有一个与 (16·26) 的轨线相切之点. 这就说明(16·26)若有极限环 (它必定和 l 相交, 从而它内部至少包含 l 上的一个切点), 必定集中分布于一个指标为 $+1$ 的焦点型奇点外围. 它可能是(0, 0), 但也可能是 $1+ax+by=0$ 上的奇点.

2. 当 $m^2+4n(n+b)<0$ 的情况.

取

$$\overline{B}_2=V_1^{\frac{b+2l}{2n}}\cdot e^{\frac{2m(l+n)+mb}{n\sigma_2}\cdot \operatorname{tg}^{-1}\left[\frac{-2n(n+b)x-m(1-ny)}{\sigma_2(1-ny)}\right]},$$

计算发散量,得到

$$\frac{\partial}{\partial x}(\overline{B}_2 P)+\frac{\partial}{\partial y}(\overline{B}_2 Q)$$
$$=[Cx+(1-ny)A]V_1^{\frac{2l+b}{2n}-1}e^{\frac{2m(l+n)+mb}{n\sigma_2}\operatorname{tg}^{-1}\left[\frac{-2n(n+b)x-m(1-ny)}{\sigma_2(1-ny)}\right]}.$$

注意现在$\left(0,\ \frac{1}{n}\right)$是焦点. 因此,如果$\left(0,\ \frac{1}{n}\right)$外围不存在极限环,则如前一样可证(16·26)的极限环必定集中分布. 但若$\left(0,\ \frac{1}{n}\right)$外围出现极限环, 则 (0, 0) 外围仍有可能出现极限环而不致与"$Cx+(1-ny)A=0$ 上最多只有两个与 (16·26) 的轨线相切的点"这一事实相矛盾, 这时极限环就可能不是集中分布的了. 例子已见 § 11 的方程(11·10). 但若除两个焦点以外还有其他有限远奇点$(x_1,\ y_1)$, 则在该奇点必定有例外方向. 我们就可以用该奇点代替$\left(0,\ \frac{1}{n}\right)$, 以1)[19]:

$$L'_{\pm}=y-y_1-\theta_i(x-x_1)\qquad(i=1,\ 2)$$

分别代替 L_+ 与 L_-, 其中 θ_i 是方程

$$(-1+mx_1+2y_1)\theta^2+[(2l-b)x_1+my_1]\theta-ax_1=0$$

的两根,实际上就是$(x_1,\ y_1)$的两个例外方向的斜率,并且以

$$\overline{B}_3=[y-y_1-\theta_1(x-x_1)]^{k_1}[y-y_1-\theta_2(x-x_1)]^{k_2}$$

代替前面的 $\overline{B}_1$ 与 $\overline{B}_2$, 其中

$$k_1=\frac{(\theta_1 x_1-y_1)[m-(b+2l)\theta_2]}{\theta_2-\theta_1},$$
$$k_2=\frac{(\theta_2 x_1-y_1)[m-(b+2l)\theta_1]}{\theta_1-\theta_2}.$$

于是可算出

$$\frac{\partial}{\partial x}(\overline{B}_3 P)+\frac{\partial}{\partial y}(\overline{B}_3 Q)$$
$$=KL_+'^{k_1-1}L_-'^{k_2-1}(y_1x-x_1y)^2(A'x+B'y+C'),$$

---

1) 在以下的计算中设 $n=1$, 当 $n\neq 0$ 时总是可以这样假设的.

其中
$$A'=al(b+2l)\frac{x_1}{y_1}+am+am(b+2l),$$
$$B'=\frac{my_1}{x_1^2}+mb+a(b+2l)-\frac{m}{x_1^2}+\frac{m^2}{x_1},\qquad(16\cdot29)$$
$$C'=m(l+1)-a(b+2l).$$

容易验证直线 $A'x+B'y+C'=0$ 必定通过奇点 (x_1, y_1)，于是如前一样我们就可证明这时 $(0, 0)$ 与 $(0, 1)$ 外围不可能同时存在极限环了.

值得考虑的是：§15 的定理 15·12 能否用 Dulac 函数法来证明？我们猜想大概是可以的.

最后证明 §11 末尾所提到的，关于二次系统的焦点精细度的一个重要性质，即

定理 16·3 若二次微分系统有两个细焦点，则它们都只能是一阶细焦点.

这一定理最先在[191]中得到，也是用 Dulac 函数法来证明的. 但现在[245]中有更为简单方便的证明. 因此这里采用[245]的证法，至于用 Dulac 函数方法的证明与以上所说的那些很类似，留给读者作为习题.

【证】 采用 Баутин 的标准形式：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\lambda_1x-y-\lambda_3x^2+(2\lambda_2+\lambda_5)xy+\lambda_6y^2,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=x+\lambda_1y+\lambda_2x^2+(2\lambda_3+\lambda_4)xy-\lambda_2y^2.\end{cases}\qquad(16\cdot30)$$

假设 $O(0, 0)$ 是至少为二阶的细焦点，我们要证明：如果还存在另一焦点型的奇点 N，则 N 或是粗焦点；或是 O 与 N 都是中心.

由 §9(9·40)中 $\bar{v}_3$, $\bar{v}_5$ 的表达式可知，若 $O(0, 0)$ 至少为二阶细焦点，则必有 $\lambda_1=\lambda_5=0$. 这时(16·30)成为

$$\frac{dx}{dt}=-y-\lambda_3x^2+2\lambda_2xy+\lambda_6y^2=P,$$

$$\frac{dy}{dt}=x+\lambda_2x^2+(2\lambda_3+\lambda_4)xy-\lambda_2y^2=Q, \qquad (16\cdot31)$$

而方程的发散量是

$$D=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=\lambda_4x.$$

如果$\lambda_4=0$,则(16·31)为恰当方程,它的初等奇点只能是中心或鞍点. 故不妨设$\lambda_4\neq0$. 这时如果另一焦点型奇点N不在y轴上,则D在N的值不为零,N应是粗焦点. 现在假设N在y轴上,我们来求y轴上的奇点的坐标,以$x=0$代入$P=0$,得到

$$y=0 \quad 及 \quad y=\frac{1}{\lambda_6},$$

代入$Q=0$,得到$\lambda_2y^2=0$. 因此N的可能坐标是$(0, 0)$或$\left(0, \frac{1}{\lambda_6}\right)$. 在第一种情况,$N=0$,没有第二个细焦点. 在第二种情况必须$\lambda_2=0$. 但当$\lambda_2=0$时(16·31)又成为可积分,$N$仍只能是中心.

当然,二次系统存在两个一阶细焦点的情况是有的,如§13的方程(13·3),当$m>-a>\frac{1}{a}-a$, $27a<4m^3$时其全局结构如图13·10,这时$O(0, 0)$与$R\left(-\frac{1}{a}, 0\right)$都是一阶细焦点,定理证毕.

[245]中还进一步证明:当二次系统存在两个一阶细焦点时,它们必定具有不同的稳定性. 证明从略,作为习题.

习 题

1. 证明(16·3)与(16·5)两式.
2. 证明定理16·1后面的注意1以及(16·7)式.
3. 验证(16·27)式和(16·29)式.
4. 设在$\frac{dx}{dt}=ax+by+x(x^2+y^2)$, $\frac{dy}{dt}=cx+dy-y(x^2+y^2)$中有$a+d>0$, $(a-d)^2+4bc<0$,试用Dulac函数$[by^2+(a-d)xy-cx^2]^{-1}$证明方程有唯一的极限环,它是稳定环[170].

5. 试用 Dulac 函数 $\frac{1}{x(x+y)}$ 证明

$$\frac{dx}{dt}=3xy,\quad \frac{dy}{dt}=y^2-2x^2-4xy+2x$$

不存在极限环.

6. 试证在方程

$$\frac{dx}{dt}=-y(1+y-mx)+\delta x,\quad \frac{dy}{dt}=x(1+ax)$$

中若
$$0<-\frac{1}{a}<m,$$

则当
$$\delta>\frac{m}{2}\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{ma}}\right)$$

时方程已不存在极限环[246].

(提示: 取 Dulac 函数$[m^2x-my+d-m]^{-1}$.)

7. 证明 $\frac{dx}{dt}=x(y-k)$, $\frac{dy}{dt}=\gamma x+\beta y+gy^2$ 不存在极限环[170].

8. 证明 $\frac{dx}{dt}=y^2-(x+1)[(x-1)^2+\lambda]$, $\frac{dy}{dt}=-xy$ 当 $\lambda\geqslant 1$ 时无闭轨线[170].

9. 证明 $\frac{dx}{dt}=2xy$, $\frac{dy}{dt}=1+y-x^2+y^2$ 无闭轨线[170].

10. 证明 $\frac{dx}{dt}=2x(1+x^2-2y^2)$, $\frac{dy}{dt}=-y(1-4x^2+3y^2)$ 无闭轨线[170].

11. 取 Dulac 函数 $B=e^{2\varepsilon x}$, 证明

$$\frac{dx}{dt}=y-\frac{1-\beta}{1+\beta x},\qquad \frac{dy}{dt}=-\varepsilon(x^2+y^2)$$

$\left(\text{其中 }\varepsilon>0,\ 0<\beta<\frac{1}{3}\right)$在半平面 $1+\beta x>0$ 中无闭轨线[170].

12. 证明 $\frac{dx}{dy}=xy$, $\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{3}(x-1)(x+2)+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}xy+\frac{1}{3}y$ 无闭轨线[170].

13. 用 Dulac 函数法证明定理16·3.

§ 17. 有界二次系统的极限环

所谓有界二次系统，就是一切轨线当 $t \geqslant 0$ 时保持为有界的二次系统. 这方面的研究工作最早见于 Dickson-Perko[247]，在此文中首先研究了 n 维空间中的定常二次有界微分系统，然后转而对平面二次系统作了详细而深入的研究，这后面一部分工作的主要部分后来又发表于 [248]. 他们借助于 § 10 提到过的 [165] 的结果对有界二次系统作了详细分类和全局相图. 但对极限环的存在性与个数则完全没有讨论. 与[248]独立，在[249]中也得到二次系统为有界的许多充分条件；但是同样，他们也没有考虑极限环问题. 本节介绍[250, 253]的工作，其中最先研究有界二次微分系统的极限环的存在性与唯一性，得到许多结果，但尚未能彻底解决问题. 为了便于和前面各节的结果相比较，代替[248]的分类法，本节改按我们所熟悉的 III 类方程以及有限奇点个数的多少来分段进行讨论.

易见任何有界二次系统必至少有一个奇点，把原点移到此奇点去，则方程可写为

$$\frac{dx}{dt}=p_{10}x+p_{01}y+X_2(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=q_{10}x+q_{01}y+Y_2(x, y), \tag{17·1}$$

其中 p_{10}, p_{01}, q_{10}, q_{01} 都是常数，$X_2(x, y)$ 与 $Y_2(x, y)$ 为齐二次式.

研究二次系统(17·1)的有界性与其对应的齐二次系统

$$\frac{dx}{dt}=X_2(x, y), \qquad \frac{dy}{dt}=Y_2(x, y) \tag{17·2}$$

的性质有一定的关系. 把(17·2)化为极坐标，得到

$$\frac{dr}{dt}=r^2[X_2(\cos\theta,\ \sin\theta)\cos\theta+Y_2(\cos\theta,\ \sin\theta)\sin\theta]$$

$$=r^2F(\theta),\tag{17·3}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=r[Y_2(\cos\theta,\ \sin\theta)\cos\theta-X_2(\cos\theta,\ \sin\theta)\sin\theta]$$

$$=rG(\theta).$$

设 $\theta=\theta_0$ 是 $G(\theta)=0$ 的根，且 $F(\theta_0)>0$，则 (17·3) 的满足初值 $r(t_0)=r_0$，$\theta(t_0)=\theta_0$ 的解是

$$r(t)=\frac{1}{F(\theta_0)}\frac{1}{t_0+\dfrac{1}{r_0F(\theta_0)}-t},\qquad \theta=\theta_0.\tag{17·4}$$

它是(x, y)平面上的一条射线，当 $r(t)\to+\infty$ 时 $t\to t_0+\dfrac{1}{r_0F(\theta_0)}$.

定义 17·1 设 $r=r(t)$是(17·1)的这样的解，使当 $r\to+\infty$ 时 t 趋于有限值，则称 $r(t)$ 是具有有限逃逸时间的解. 对于(17·3)，如果存在 θ_0 使 $G(\theta_0)=0$，$F(\theta_0)>0$，且(17·4)是(17·3)的有限逃逸时间解，则称(17·4)为射线解.

定理 17·1 如果(17·2)有一射线解，则(17·1)具有有限逃逸时间的无界解.

【证】 作变换

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad \frac{d\tau}{dt}=r,$$

则(17·1)变成

$$\frac{dr}{d\tau}=p_{10}\cos^2\theta+(p_{01}+q_{10})\cos\theta\sin\theta+q_{01}\sin^2\theta+rF(\theta)$$

$$=P_1(\theta)+rF(\theta),$$

$$\tag{17·5}$$

$$\frac{d\theta}{d\tau}=\frac{1}{r}[q_{10}\cos^2\theta+(q_{01}-p_{10})\cos\theta\sin\theta-p_{01}\sin^2\theta]+G(\theta)$$

$$=\frac{1}{r}Q_1(\theta)+G(\theta).$$

由假设知，存在 $\theta=\theta_0$ 使 $G(\theta_0)=0$，$F(\theta_0)>0$. 不妨设 $F(\theta_0)=\lambda>0$. 令 $\sigma=r^{-1}$，则(17·5)变为

$$\dot{\sigma}=-\sigma F(\theta)-\sigma^2P_1(\theta),\ \dot{\theta}=\sigma G_1(\theta)+G(\theta),$$

它有奇点$(\sigma=0,\ \theta=\theta_0)$，且前一方程有一负特征根 $-\lambda$. 故由 Ляпунов 的古典定理知方程组有一趋于$(\sigma=0,\ \theta=\theta_0)$的轨线，相应地,方程(17·5)有一轨线$(r(\tau),\ \theta(x))\to(+\infty,\ \theta_0)$. 对(17·5)的第一方程应用常数变易公式,可知 $r(\tau)\to+\infty$ 时应有 $\tau\to+\infty$. 最后由

$$t=\int_0^\tau\frac{ds}{r(s)}$$

可见当 $\tau\to+\infty$ 时有 $t<\infty$. 证毕.

现在我们来研究二次系统

$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2,\quad \frac{dy}{dt}=x(1+ax+by) \tag{17·6}$$

什么时候才能成为有界系统. 将(17·6)对应的齐二次系统

$$\frac{dx}{dt}=lx^2+mxy+ny^2,\qquad \frac{dy}{dt}=bxy+ax^2 \tag{17·7}$$

作定理 17·1 中的变换,则得

$$\frac{dr}{d\tau}=r[l\cos^3\theta+(m+a)\cos^2\theta\sin\theta+(n+b)\cos\theta\sin^2\theta]$$

$$=rF(\theta),$$

$$\frac{d\theta}{d\tau}=a\cos^3\theta+(b-l)\cos^2\theta\sin\theta-m\cos\theta\sin^2\theta-n\sin^3\theta$$

$$=G(\theta).$$

因为$O(0,\ 0)$是孤立奇点,由定理 17·1 知道,(17·6)为有界系统的必要条件是:

$$n=0,\ (b-l)^2+4ma<0,$$

或

$$m=n=0,\quad b=l,\quad a\neq0.$$

因此要建立系统(17·6)为有界的充要条件,只需建立系统

$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+lx^2+mxy,\quad \frac{dy}{dt}=x(1+ax+by) \tag{17·8}$$

为有界的充要条件. 而上述必要条件可改写为

$$(b-l)^2+4ma<0 \quad 或 \quad b=l,\ m=0,\ a\neq 0. \tag{17·9}$$

定理 17·2 系统(17·8)为有界系统的充要条件是下列诸条件之一成立:

(1) $(b-l)^2+4ma<0,\ mb<0$;

(2) $(b-l)^2+4ma<0,\ b=m+a=0,\ m(l+m\delta)\leqslant 0,\ m\neq 0$;

(3) $m=0,\ b=l,\ ab>0$.

【证】 充分性. 考察系统(17·8)的轨线在无限远奇点附近的性态. 作 Poincaré 变换

$$x=\frac{u}{z},\ y=\frac{1}{z},\ \frac{dt}{d\tau}=z,$$

则(17·8)变为

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau}&=mu-z+(l-b)u^2+\delta uz-au^3-u^2z,\\ \frac{dz}{d\tau}&=-uz(b+au+z).\end{aligned} \tag{17·10}$$

由条件(17·9)知(17·8)只有唯一的无限远奇点(0, ±1, 0).

先研究 $m\neq 0$ 的情况, 不妨设 $m>0$, 否则将 x, y 变号就可办到这一点. 令

$$\bar{x}=-z,\ \bar{y}=mu-z,\ \frac{d\tau}{d\tau'}=\frac{1}{m},$$

则(17·10)变成

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau'}=\frac{1}{m^2}\bar{x}(\bar{x}-\bar{y})\left[b-\frac{1}{m}(a+m)\bar{x}+\frac{a}{m}\bar{y}\right]=P_3(\bar{x},\ \bar{y}),$$

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{y}}{d\tau'}&=\bar{y}+\frac{1}{m}(\bar{x}-\bar{y})\left[\frac{m\delta+l}{m}\bar{x}-\frac{l-b}{m}\bar{y}-\frac{m+a}{m^2}\bar{x}\bar{y}-\frac{a}{m^2}\bar{y}^2\right]\\ &=\bar{y}+Q_3(\bar{x},\ \bar{y}).\end{aligned}$$

设由 $\bar{y}+Q_3(\bar{x},\ \bar{y})=0$ 解出 $\bar{y}=\varphi(\bar{x})$, 它满足 $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$. 代入 $P_3(\bar{x},\ \bar{y})$, 得到

$$\psi(\bar{x}) = P_3(\bar{x}, \varphi(\bar{x}))$$

$$= \frac{b}{m^2}\bar{x}^2 + \frac{1}{m^4}[b(m\delta+l) - m(a+m)]\bar{x}^3$$

$$+ \frac{m\delta+l}{m^6}[b(m\delta+2l-b) - m(m+2a)]\bar{x}^4 + o(\bar{x}^4). \tag{17·11}$$

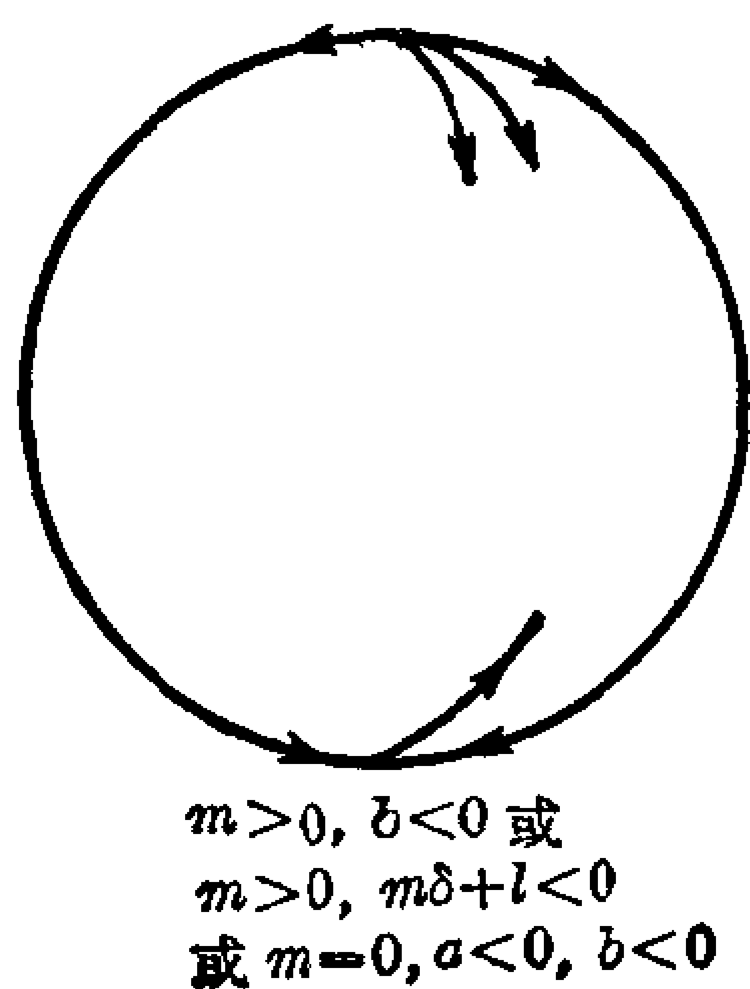
由(17·11)知道：若 $b\neq 0$，或 $b=m+a=0$ 而 $m\delta+l\neq 0$，则 (0, ±1, 0) 是半鞍结点，且当 $b<0$，或 $b=m+a=0$，$m\delta+l<0$ 时 (17·8)的轨线在无限远奇点(0, ±1, 0)附近的性态如图 17·1 所示，故(17·8)的一切解当 $t\geqslant 0$ 时有界[1]。

又若 $b=a+m=m\delta+l=0$，则由(17·9)知必有 $|\delta|<2$，这时(17·9)可改写为

$$\frac{dx}{dt} = (1+ax)(\delta x - y),\quad \frac{dy}{dt} = x(1+ax).$$

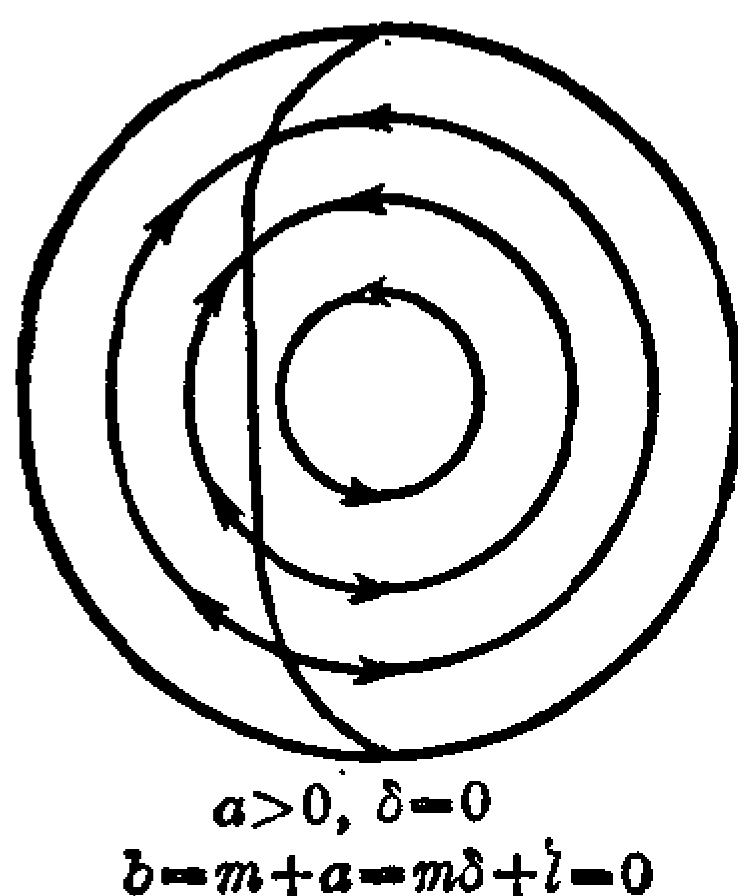
直线 $1+ax=0$ 上充满奇点，方程的全局相图如图 17·2，由此可知(17·8)的一切解有界.

其次，当 $m=0$，$b=l$ 时，(17·10)成为



$m>0,\ b<0$ 或
$m>0,\ m\delta+l<0$
或 $m=0, a<0, b<0$

图 17·1



$a>0,\ \delta=0$
$b=m+a=m\delta+l=0$

图 17·2(a)

1) 如果不设 $m>0$，则当 $m<0$, $b>0$ 或 $m<0$, $b=m+a=0$, $m\delta+l>0$ 时所得无限远奇点附近的轨线图可由图 17·1 关于(0, 0)作对称而得到，这时箭头并不倒向，故一切解当 $t\geqslant 0$ 时仍为有界.

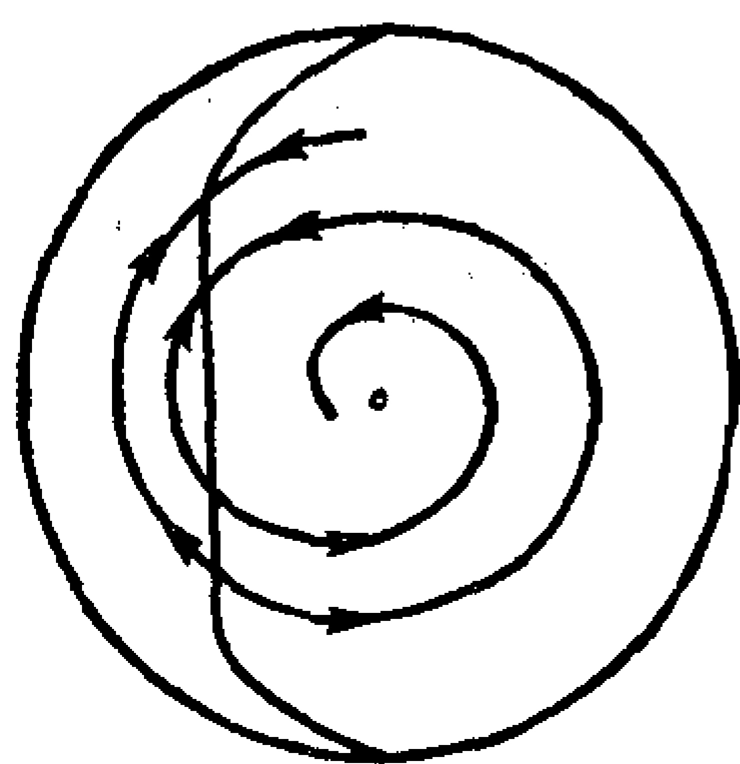

$b=m+a=m\delta+l=0$
$a>0, -2<\delta<0$

图 17·2(b)

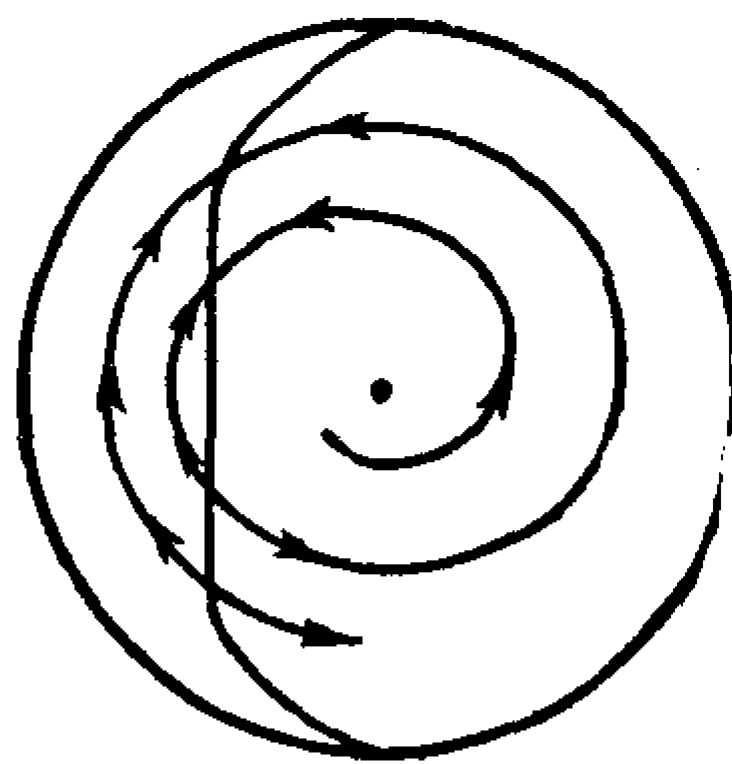

$b=m+a=m\delta+l=0$
$a>0,\ 0<\delta<2$

图 17·2(c)

$$\frac{du}{d\tau}=-z+\delta uz-au^3-u^2z,\quad \frac{dz}{d\tau}=-uz(b+au+z). \tag{17·12}$$

作变换 $\bar{x}=u,\ \bar{y}=-au^3-(1-\delta u+u^2)z$, 则(17·12)变成

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau}=\bar{y},\quad \frac{d\bar{y}}{d\tau}=-ab\bar{x}^4[1+h(\bar{x})]-b\bar{x}\bar{y}(1+g(\bar{x}))+\bar{y}^2f(\bar{x}), \tag{17·13}$$

其中

$$h(\bar{x})=\frac{a}{b}\bar{x}+o(\bar{x}),\ g(\bar{x})=\frac{4a}{b}\bar{x}+o(\bar{x}),$$

$$f(\bar{x})=-\delta+O(\bar{x}).$$

因此, 当 $ab>0$ 时, $(0,\ \pm1,\ 0)$是半鞍结点, 方程(17·8)的轨线在此奇点附近的性态仍如图 17·1 所示, 其中所画的是 $a<0,\ b<0$ 的情况[1].

必要性. 显见(17·9)成立.

当 $m\neq0$ 时如果 $mb>0$, 或 $b=m+a=0,\ m(m\delta+l)>0$, 则由(17·11)知道$(0,\ \pm1,\ 0)$仍是半鞍结点, 但(17·8)的轨线在此奇点附近的性态如图 17·3 所示, 故(17·8)有无界解. 又若 $b=0,\ m+a\neq0$, 则由(17·11)知道$(0,\ \pm1,\ 0)$是结点或鞍点, 从而必有轨

1) 见上页脚注.

线当 $t\to+\infty$ 时由有限平面进入此奇点，即(17·8)有无界解.

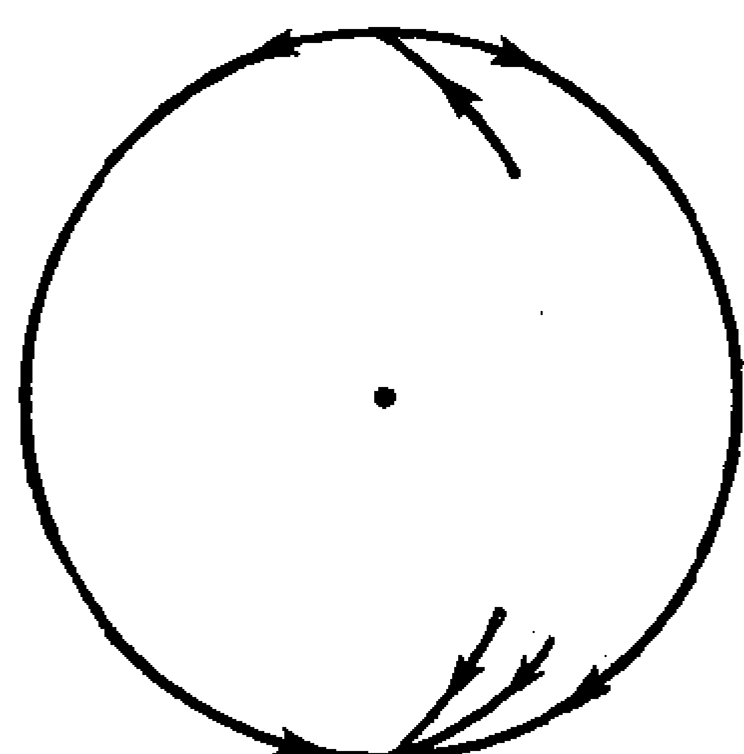


图 17·3

同样，当 $m=0,\ b=l,\ ab<0$ 时(17·8)的轨线在无限远奇点(0, ±1, 0)附近的性态也如图 17·3 那样，故有无界解.

最后，或 $m=b=l=0,\ a\neq0$，则(17·13)变成

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau}=\bar{y},$$

$$\frac{d\bar{y}}{d\tau}=-a^2\bar{x}^5[1+\bar{h}(\bar{x})]-4a\bar{x}^2\bar{y}[1+\bar{g}(\bar{x})]+\bar{y}^2f(\bar{x}),$$

其中
$$\bar{h}(\bar{x})=-\bar{x}^2+o(\bar{x}^2),$$

$$\bar{g}(\bar{x})=-\frac{\delta}{4}\bar{x}+o(\bar{x}),$$

$f(\bar{x})$ 与(17·13)同. 这时(0, ±1, 0)为结点，故(17·8)有无界解. 定理证毕.

下面开始讨论有界二次系统的极限环. 当 $b=m+a=m\delta+l=0,\ m\neq0$ 时即使 $|\delta|<2$，(17·8) 也没有极限环，因为这时方程右方有公因式 $1-mx$，直线 $1-mx=0$ 上全部是奇点. 因此只需讨论(17·8)只有有限个有限远奇点的情况. 显见(17·8)最多有三个有限远奇点，下面按奇点个数的多少分别进行讨论.

I. 三个有限远奇点的情况.

由 $1+ax+by=0$ 解出 y，代入(17·8)的第一个方程，得

$$Dx^2+Bx+1=0,\tag{17·14}$$

其中
$$D=lb-ma,\ B=a+b\delta-m,$$

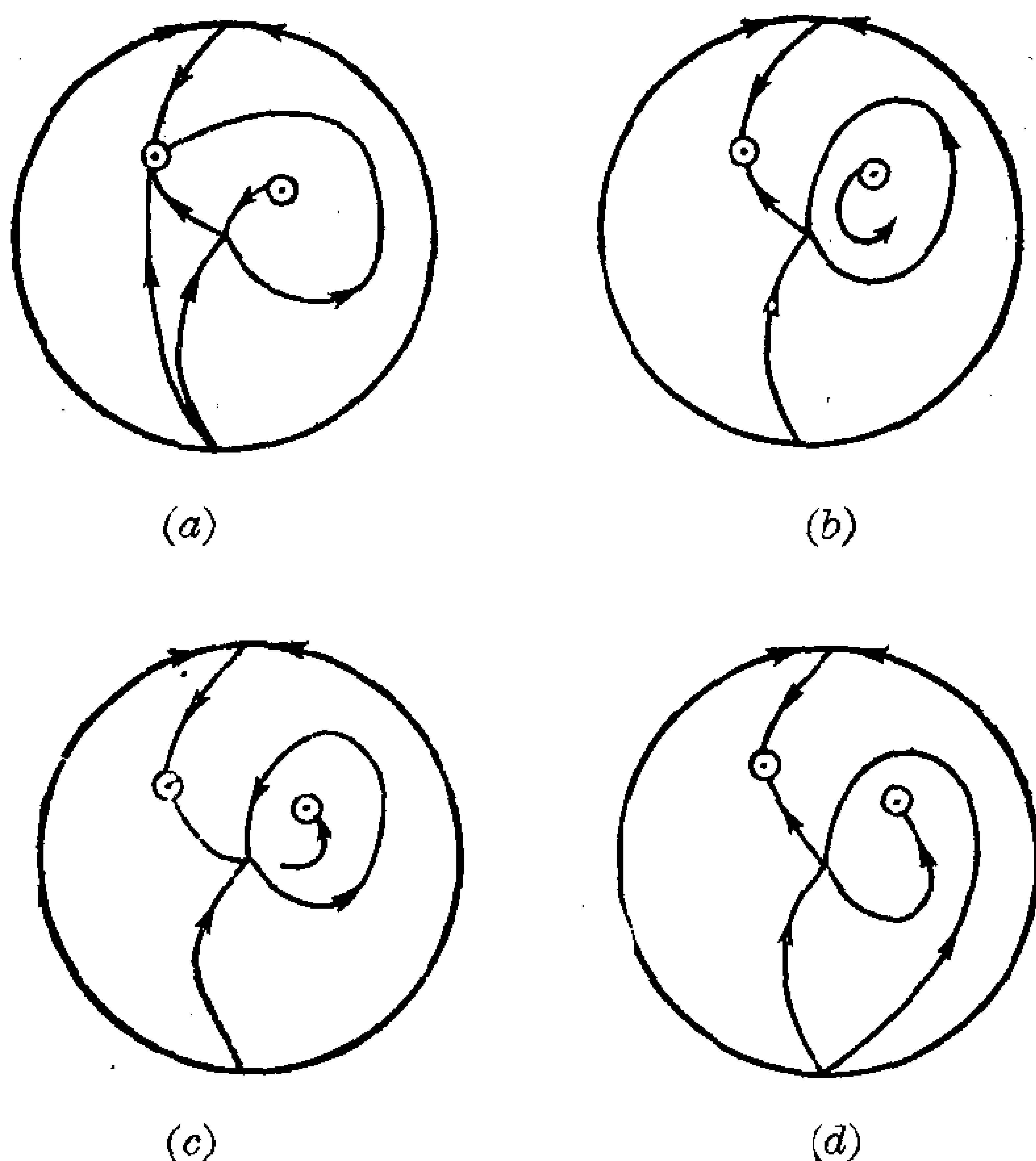
(17·8)存在三个有限远奇点的充要条件是 $B^2>4D$. 当此条件满足时三奇点为(0, 0), $(x_1,\ y_1)$ 与 $(x_2,\ y_2)$，其中

$$x_1=\frac{-B+\sqrt{B^2-4D}}{2D},\quad y_1=-\frac{a}{b}x_1-\frac{1}{b},$$

$$x_2=\frac{-B-\sqrt{B^2-4D}}{2D},\quad y_2=-\frac{a}{b}x_2-\frac{1}{b}.$$

注意，当 $b=0$ 时由定理 17·2 知条件 $B^2>4D$ 不成立，故此时只有唯一的奇点 $(0,\ 0)$.

引理 17·1 当 $(b-l)^2+4ma<0,\ mb<0,\ l+m\delta\neq0$，或 $m=0,\ b=l,\ ab>0$ 时 (17·8) 的分界线结构与图 17·4 或图 17·5 同胚；当 $(b-l)^2+4ma<0,\ mb<0,\ l+m\delta=0$ 时，(17·8)的分界线结构与图 17·4(*a*) 或 17·6 同胚. 图中的 →⊙ 与 ⊙→ 表示指标为 +1 的奇点外围的轨线趋向，至于极限环的有无，尚待以后进一步分析，才能确定.



(*a*) (*b*) (*c*) (*d*)

图 17·4

【证】 不妨设 $b>0$，否则可将 $x,\ y$ 变号. 于是当 $m\neq0$ 时有 $m<0,\ a>0$；当 $m=0$ 时有 $b=l>0,\ a>0$.

由(17·9)可得$(b+l)^2<4D$，故

$$x_1x_2=\frac{1}{D}>0.$$

当$B>0$时有$x_2<x_1<0$. 把原点移到(x_1, y_1)去，并仍用x, y表示(17·8)新的坐标:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{b}[B-a+(lb+D)x_1]x+(mx_1-1)y+lx^2+mxy,$$
$$(17\cdot15)$$
$$\frac{dy}{dt}=ax_1x+bx_1y+ax^2+bxy.$$

容易计算一次近似方程的两特征根之积为

$$\lambda_1\lambda_2=2Dx_1\left(x_1+\frac{B}{2D}\right)<0,$$

故新的原点，即原来的奇点(x_1, y_1)是鞍点，而另两奇点$O_1(-x_1, -y_1)$及$O_2(x_2-x_1, y_2-y_1)$的指标都是$+1$. 同理，当$B<0$时$x_1>x_2>0$，如前可证(x_2, y_2)是鞍点，而另两奇点是指标$+1$的奇点.

先考虑$(b-l)^2+4ma<0$, $mb<0$, $l+m\delta\neq0$的情况. 如果$B>0$，作

$$V_1=y-\frac{y_1}{x_1}x,\quad V_2=y+\frac{a}{b}x, \tag{17·16}$$

沿着(17·15)的轨线求导数，得

$$\left.\frac{dV_1}{dt}\right|_{V_1=0}=A_1x+A_2x^2,\qquad \left.\frac{dV_2}{dt}\right|_{V_2=0}=B_1x+B_2x^2,$$

其中
$$A_1=-1-\frac{B-a}{b}\frac{y_1}{x_1}-\frac{lb+D}{b}y_1-\frac{y_1^2}{x_1^2}(mx_1-1),$$

$$A_2=a+\frac{by_1}{x_1}-\frac{ly_1}{x_1}-\frac{my_1^2}{x_1^2},$$

$$B_1=\frac{aB}{b^2}+\frac{a(lb+D)}{b^2}x_1-\frac{a^2m}{b^2}x_1,$$

$$B_2=\frac{al}{b}-\frac{ma^2}{b^2}.$$

注意到
$$-y_1+\delta x_1+lx_1^2+mx_1y_1=0,$$
$$1+ax_1+by_1=0,$$

不难把 A_1, A_2, B_1, B_2 化简为

$$A_1=-\frac{1}{x_1}[my_1^2+(l-b)x_1y_1-ax_1^2],$$

$$A_2=-\frac{1}{x_1^2}[my_1^2+(l-b)x_1y_1-ax_1^2],$$

$$B_1=\frac{aD}{b^2}(x_1-x_2),\qquad B_2=\frac{aD}{b^2}.$$

所以

$$\left.\frac{dV_1}{dt}\right|_{V_1=0}=-\frac{1}{x_1^2}[my_1^2+(l-b)x_1y_1-ax_1^2]x(x+x_1),\tag{17·17}$$

$$\left.\frac{dV_2}{dt}\right|_{V_2=0}=\frac{aD}{b^2}x(x+x_1-x_2).\tag{17·18}$$

又
$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=0}=m\left(x_1-\frac{1}{m}\right)y,\quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{y=0}=ax(x+x_1).\tag{17·19}$$

注意到 $(l-b)^2+4ma<0$, $m<0$; $my_1^2+(l-b)x_1y_1-ax_1^2<0$, O_2 总落在区域 $V_1>0$ 上，故可设 $y_1<0$. 当 $l+m\delta\neq0$ 时，

$$x_1-\frac{1}{m}\neq0.$$

因此当
$$x_1-\frac{1}{m}>0$$

时，(17·15) 从而 (17·8) 的分界线结构与图 17·4 同胚；当

$$x_1-\frac{1}{m}<0$$

时，(17·8) 的分界线结构与图 17·5 同胚.

如果 $B<0$, 把原点平移到 (x_2, y_2) 上去，并仍用 x, y 表示

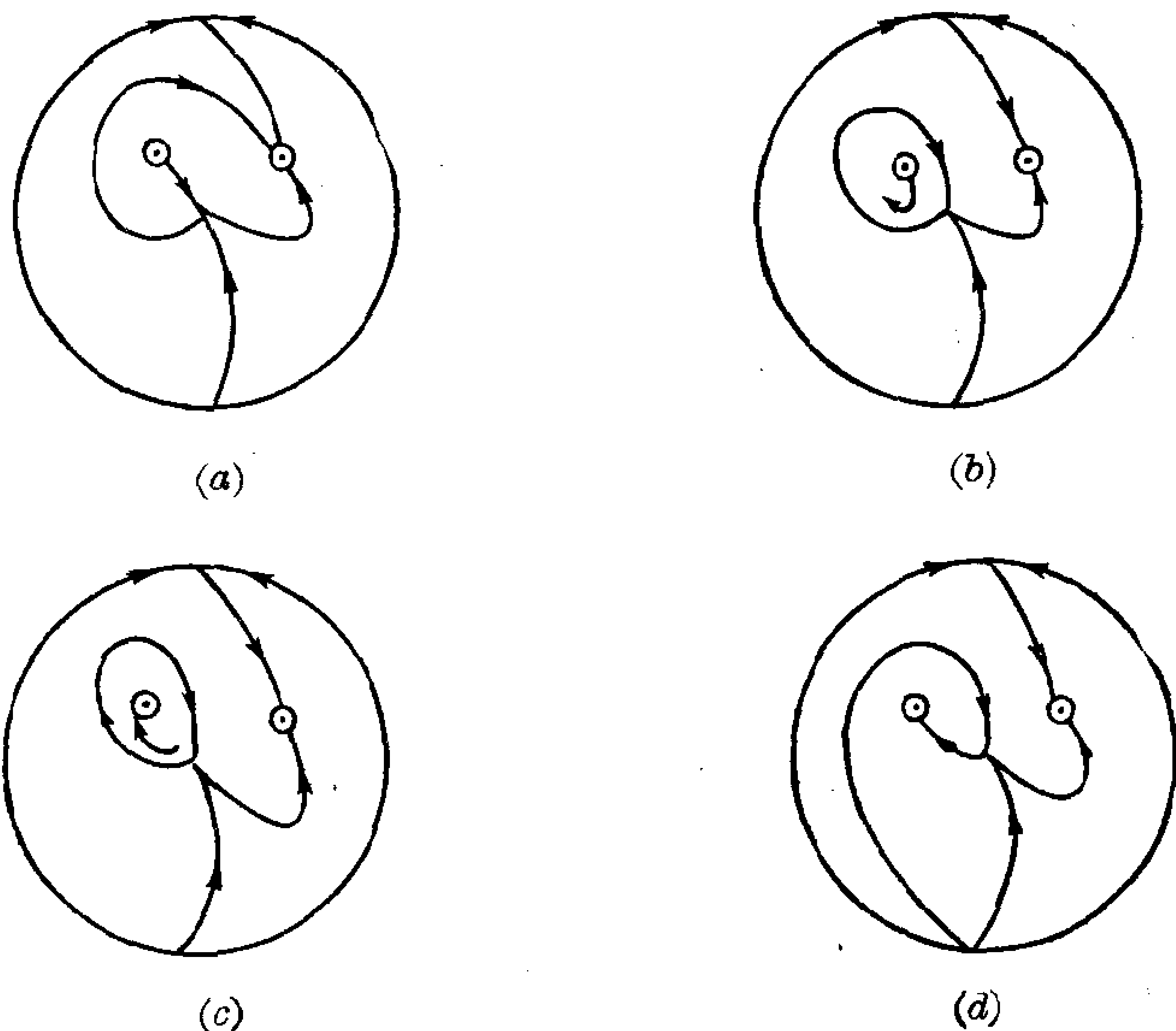


图 17·5

(17·8)的经过平移变换以后的因变量，便得

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{b}[B-a+(lb+D)x_2]x+(mx_2-1)y+lx^2+mxy,$$

$$\frac{dy}{dt}=ax_2x+bx_2y+ax^2+bxy. \tag{17·20}$$

作变换

$$u_1=y-\frac{y_2}{x_2}x,\qquad u_2=y+\frac{a}{b}x,$$

沿着(17·20)的轨线求导数，可得

$$\left.\frac{du_1}{dt}\right|_{u_1=0}=-\frac{1}{x_2^2}[my_2^2+(l-b)x_2y_2-ay_2^2]x(x+x_2),$$

$$\left.\frac{du_2}{dt}\right|_{u_2=0}=\frac{aD}{b^2}x[x-x_1+x_2].$$

奇点$(x_1-x_2,\ y_1-y_2)$总落在区域$u_1>0$中．又

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=0}=(mx_2-1)y,\quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{y=0}=ax(x+x_2),$$

由于 $mx_2-1<0$，故(17·20)从而(17·8)的分界线结构与图 17·4

或7·5同胚．($B<0$ 的情况也可借 x, y 改号化为 $B>0$ 的情况.)

其次，考虑 $m=0$, $b=l$, $ab>0$ 的情况．这时有 $D=b^2>0$. 若 $B=a+b\delta>0$, 则(17·17)，(17·18)与(17·19)可分别化为

$$\left.\frac{dV_1}{dt}\right|_{V_1=0}=ax(x+x_1),\quad \left.\frac{dV_2}{dt}\right|_{V_2=0}=ax(x+x_1-x_2),$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=0}=-y,\quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{y=0}=ax(x+x_1),$$

因此(17·8)的分界线结构与图17·4同胚.

同理，$B<0$ 时(17·8)的分界线结构也与图17·4同胚.

最后考虑 $(b-l)^2+4ma<0$, $mb<0$, $l+m\delta=0$ 的情况．在 $b>0$ 的假定之下有 $m<0$, $D>0$. 注意到 $D=-m(a+b\delta)$，故 $a+b\delta>0$, 从而 $B=a+b\delta-m>0$.

如果 $a+b\delta+m>0$, 则

$$x_1=\frac{m}{D},\quad x_2=\frac{1}{m},\quad x=\frac{1}{m}-\frac{m}{D}$$

是(17·15)的积分直线，但此时(17·15)从而(17·8)的分界线结构仍与图17·4同胚.

如果 $a+b\delta+m<0$, 则

$$x_1=\frac{1}{m},\quad x_2=\frac{m}{D},$$

这时 $x=0$ 是(17·15)的积分直线，故(17·8)的分界线结构与图17·6同胚．引理证毕.

现在讨论具有三个有限远奇点的有界二次系统的极限环问题.

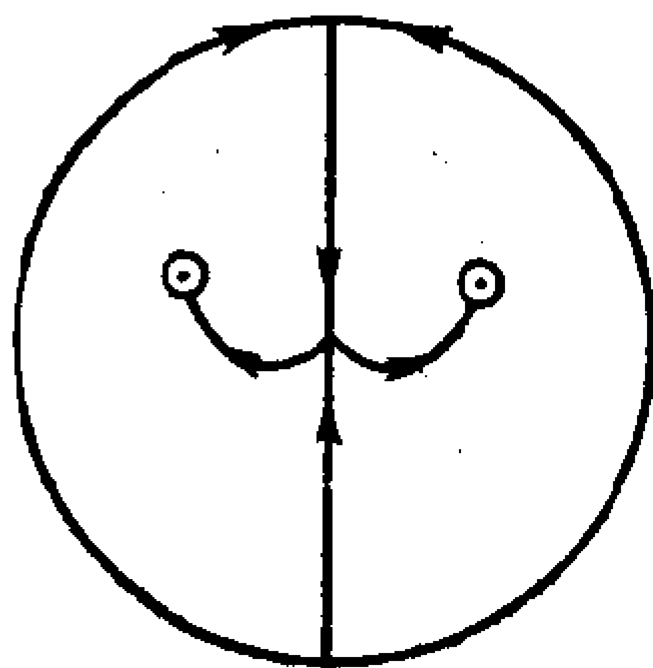


图 17·6

当 $l+m\delta=0$ 时由引理17·1知道，(17·8)的分界线结构与图17·6或17·4同胚．它有一条积分直线

$$x=\frac{1}{m},$$

所以由定理15·4的推论知道(17·8)至多有一个极限环．又这时

原点(0, 0)肯定是指标 +1, 但另两奇点 $O_1\left(\frac{m}{D}, -\frac{am+D}{bD}\right)$ 与 $O_2\left(\frac{1}{m}, \frac{-a-m}{mb}\right)$ 的指标则尚待确定. 已知(17·8)在(0, 0)的特征方程为 $\lambda^2-\delta\lambda+1=0$, 因此有

1) 当 $|\delta|\geqslant 2$ 时 O_1 是结点, 它的外围不存在极限环.

2) 当 $-2<\delta<0$ 时, O_1 是稳定焦点, 它的外围若有极限环, 必为偶数个, 故 O_1 外围不存在极限环.

3) 当 $\delta=0$ 时, O_1 为细焦点, 故(17·8)不存在极限环(定理15·4).

4) 当 $0<\delta\ll 1$ 时, O_1 是不稳定焦点, 外围有唯一的极限环, 而 O_2 外围则没有环. 但保证 O_1 外围存在极限环的、δ 的准确变动范围却可能小于(0, 2), 即使一切保证系统为有界以及 $l+m\delta=0$ 这些条件都保持不变(见后面例 1).

要研究 $l+m\delta=0$ 时另两奇点 (x_i, y_i) 的性质, 可以把原点移到 (x_i, y_i) 去, 则得方程

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{b}[B-a+(lb+D)x_i]x+(mx_i-1)y+lx^2+mxy,\\ \dfrac{dy}{dt}=ax_ix+bx_iy+ax^2+bxy.\end{cases}\tag{17·21}$$

首先, 以 $O_2\left(\frac{1}{m}, \frac{-a-m}{mb}\right)$ 代 (x_i, y_i), 得到

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{m(a+b\delta)(a+b\delta+m)}{bD}x+lx^2+mxy,\\ \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{a(a+b\delta)}{D}x-\dfrac{b(a+b\delta)}{D}y+ax^2+bxy,\end{cases}$$

由此可得特征方程的两根为(注意 $D=lb-ma=-m(a+b\delta)$):

$$\lambda_1=-\frac{a+b\delta+m}{b},\quad \lambda_2=\frac{b}{m}.$$

再以 $O_1\left(\frac{m}{D}, -\frac{am+D}{bD}\right)$ 代 (x_i, y_i), 得到

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\delta(a+b\delta+m)}{a+b\delta}x-\dfrac{m+a+b\delta}{a+b\delta}y+lx^2+mxy,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{a}{a+b\delta}x-\dfrac{b}{a+b\delta}y+ax^2+bxy.\end{cases}$$

由此可得特征方程为

$$\lambda^2-\frac{\delta(a+b\delta+m)-b}{a+b\delta}\lambda-\frac{(a+b\delta)(a+b\delta+m)}{(a+b\delta)^2}=0. \tag{17·22}$$

根据前面的假设 $b>0$, 故由定理 17·2 的条件 1) 知有 $m<0$, $a>0$; 但 $a+b\delta+m$ 的符号则还不能确定. 如果 $a+b\delta+m>0$, 则由 (17·21) 知在 $O_2\left(\frac{1}{m}, \frac{-a-m}{mb}\right)$ 的两特征根为负, 即它是稳定结点. 另一方面, 由 (17·22) 看出在 $O_1\left(\frac{m}{D}, -\frac{am+D}{D}\right)$ 的两特征根异号, 故 O_1 为鞍点. 反之, 若 $a+b\delta+m<0$, 则 O_2 为鞍点. 又由 $(b-l)^2+4ma<0$ 可推出 $(b+l)^2<4(bl-ma)=-4m(a+b\delta)$, 故 $a+b\delta>0$, 于是由 (17·22) 看出 O_1 有指标 $+1$. 总之, 就横坐标来说, 鞍点必定介于两指标 $+1$ 的奇点之间, 但在上述条件下 O_1 可能为焦点或结点. 当 O_1 为焦点时可以如前一样讨论极限环的存在性, 如果存在, 则一定唯一, 且不能与 O 外围同时存在.

例 1 研究方程

$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+\delta x^2-xy, \qquad \frac{dy}{dt}=x(1+6x+2y), \tag{17·23}$$

这里 $0\leqslant\delta\leqslant2$, $l=\delta$, $m=-1$, $a=6$, $b=2$, $B=7+2\delta$, $D=10$. 故有

$$l+m\delta=0,\ (b-l)^2+4ma<0,\ mb<0,\ B^2>4D.$$

方程 (17·23) 恒有三个有限远奇点. 当 $\delta=0$ 时它们是 $(0, 0)$, $\left(-\frac{1}{6}, 0\right)$, $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$; 当 $\delta=2$ 时它们是 $(0, 0)$, $\left(-\frac{1}{10}, -\frac{1}{5}\right)$, $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$. 当 δ 从 0 变为正时, O 由稳定变为不稳定, 外围出现唯

一的稳定极限环. 当 δ 增大到 $\delta_1 \leqslant 2$ 时, O 外围有分界线环, 它是由从鞍点 $\left(-\frac{1}{10},\ -\frac{1}{5}\right)$ 出发, 向左上方前进, 最后进入 $\left(-1,\ \frac{5}{2}\right)$ 的分界线, 以及由 $\left(-\frac{1}{10},\ -\frac{1}{5}\right)$ 出发, 向右下方前进, 最后也进入 $\left(-1,\ \frac{5}{2}\right)$ 的分界线 l_2 所围成的, 如图 17·7. 当 $\delta > 2$ 时 O 成为不稳定结点, 外围不再存在极限环. 注意, 在本例中 $x=-1$ 恒为积分直线, $(0,0)$ 与 $\left(-1,\ \frac{5}{2}\right)$ 不动, 但鞍点则随 δ 而移动. 又 δ_1 是否等于 2, 还不能确定. (这个例子原稿有错误, 现根据韩茂安同志的意见改正.)

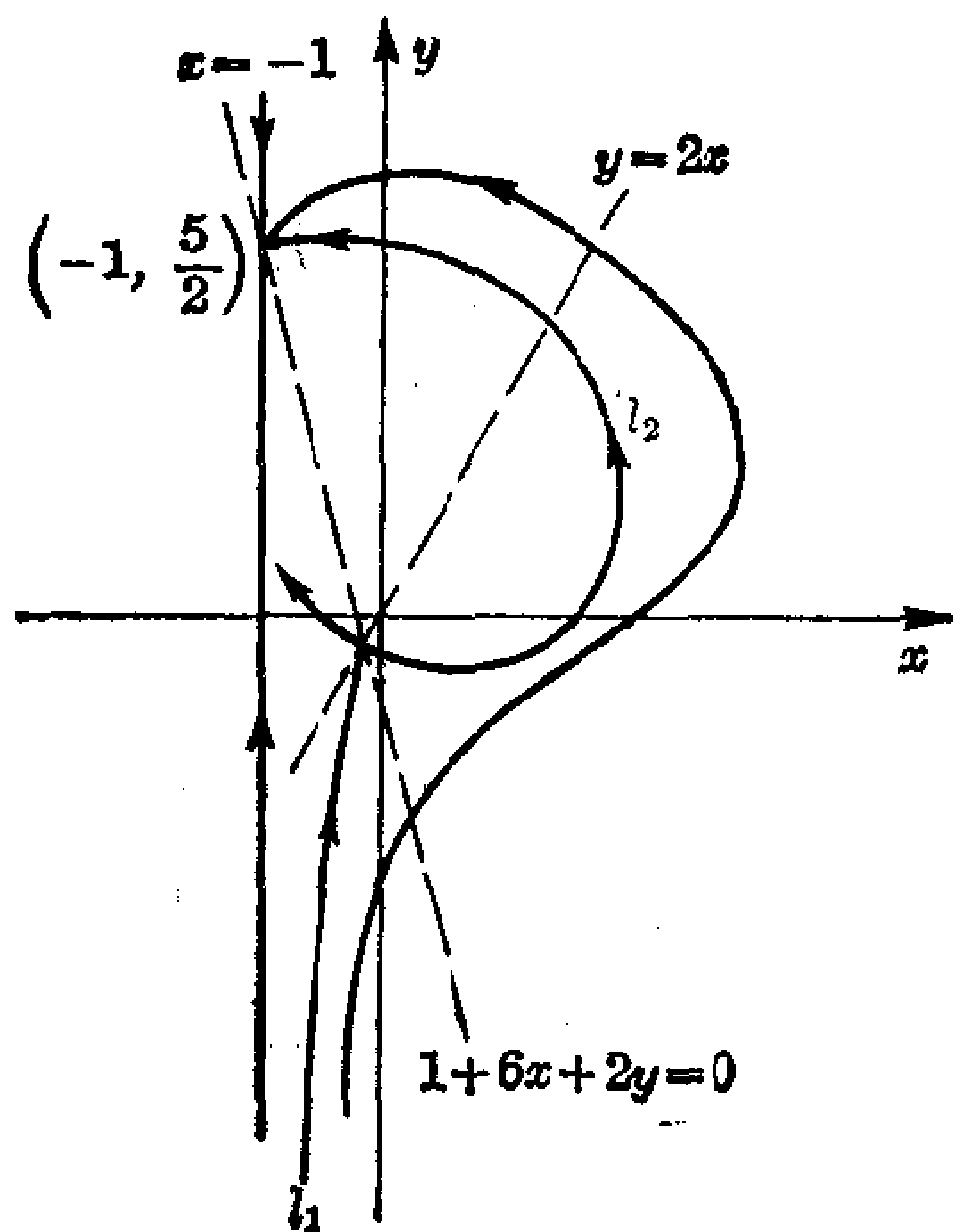


图 17·7

当 $l+m\delta \neq 0$ 时也可从 (17·15) 出发对极限环问题作与前类似的研究. 但是由于现在方程不一定存在积分直线, 因此即使能证明在某些情况下存在极限环, 也不能立刻就肯定其唯一性, 详情从略.

II. 有两个有限远奇点的情况.

由 (17·14) 知方程 (17·8) 有两个有限远奇点的充要条件是 $B^2=4D$. 这时 $O(0,\ 0)$ 为指标 $+1$ 的初等奇点, 而 $O^*(x_0,\ y_0)$ 为高阶奇点, 其中

$$x_0=-\frac{2}{B},\quad y_0=\frac{2a-B}{bB}.$$

令 $\bar{x}=x-x_0$, $\bar{y}=y-y_0$, 则 (17·8) 化为

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{dt}=-\dfrac{a}{bB}(a+b\delta+m)\bar{x}-\dfrac{1}{B}(a+b\delta+m)\bar{y}+l\bar{x}^2+m\bar{x}\bar{y}, \\ \dfrac{d\bar{y}}{dt}=-\dfrac{2a}{B}\bar{x}-\dfrac{2b}{B}\bar{y}+a\bar{x}^2+b\bar{x}\bar{y}. \end{cases} \tag{17·24}$$

记
$$\sigma=-\frac{1}{bB}[a(a+b\delta+m)+2b^2],$$
则我们有下面的引理.

引理 17·2 如果 $B^2=4D$, 又 $(b-l)^2+4ma<0$, $mb<0$, 或 $m=0$, $b=l$, $ab>0$, 那末(17·8)的分界线结构

1) 当 $a(a+b\delta+m)+2b^2=0$ 时, 与图 17·12 同胚;

2) 当 $B[a(a+b\delta+m)+2b^2]<0$ 时与图 17·8 同胚;

3) 当 $B[a(a+b\delta+m)+2b^2]>0$, $a(a+b\delta+m)<0$ 时与图 17·9 同胚;

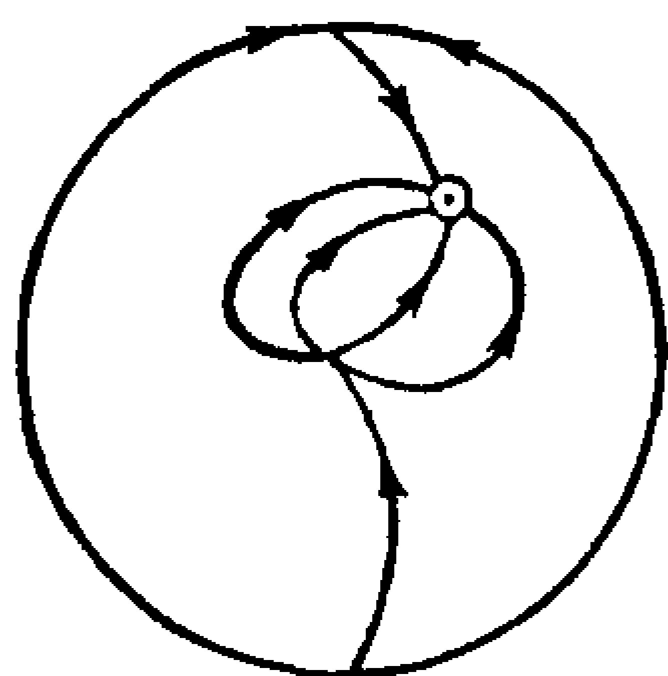


图 17·8

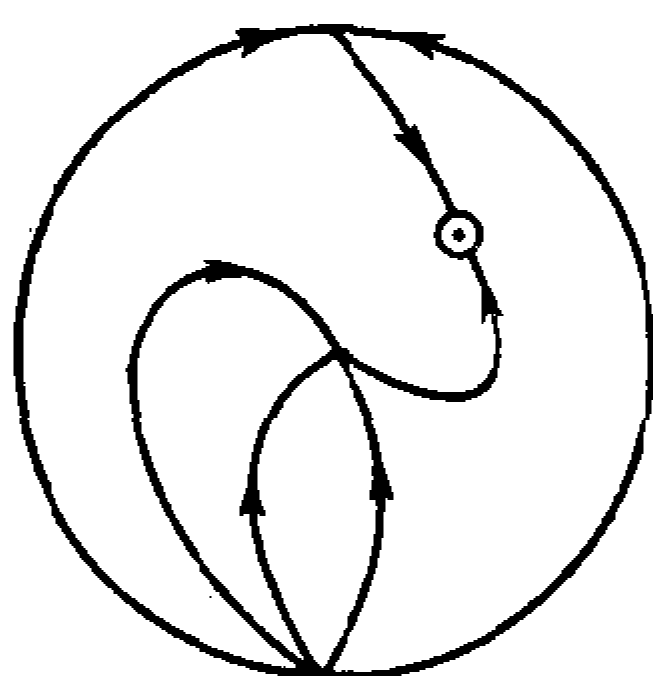


图 17·9

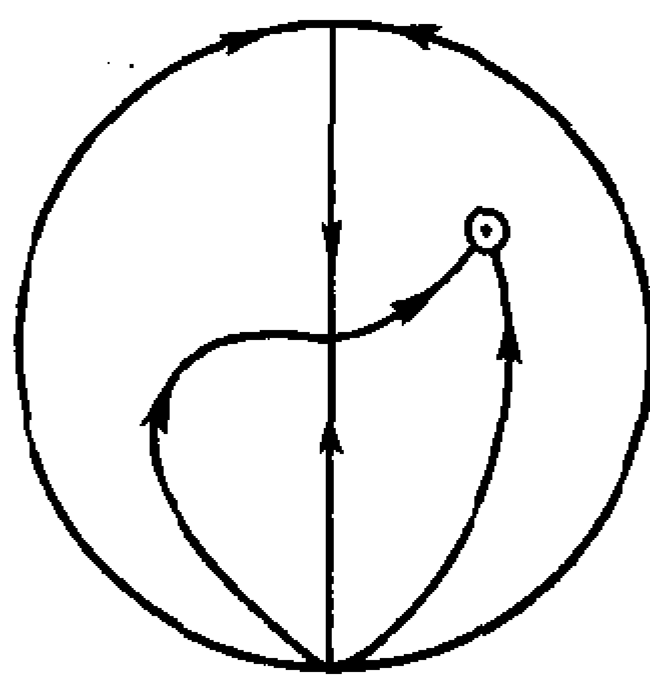
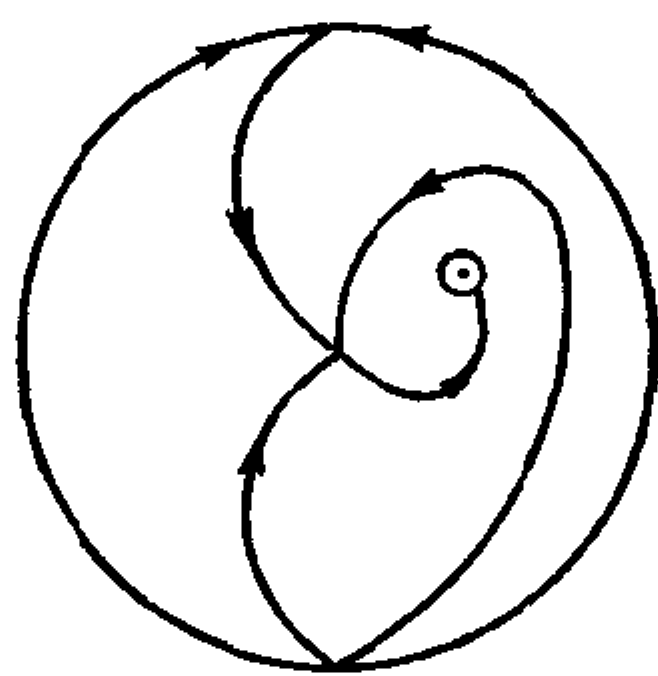
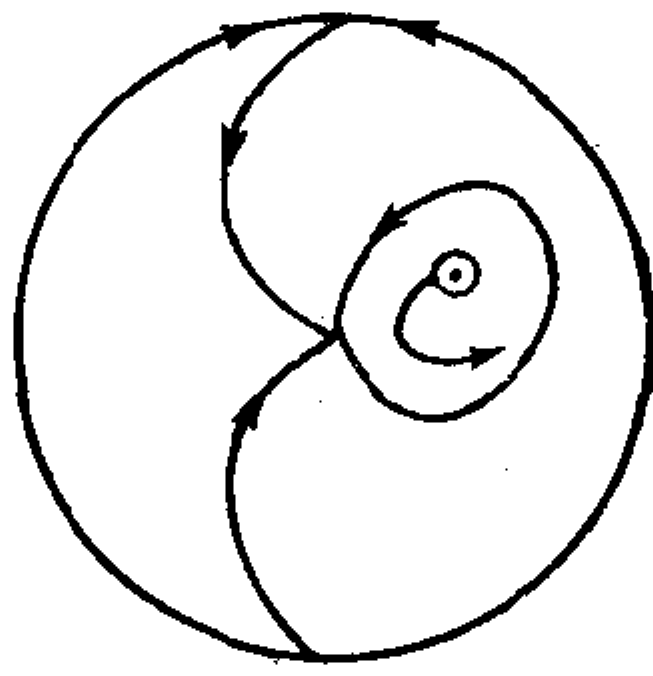


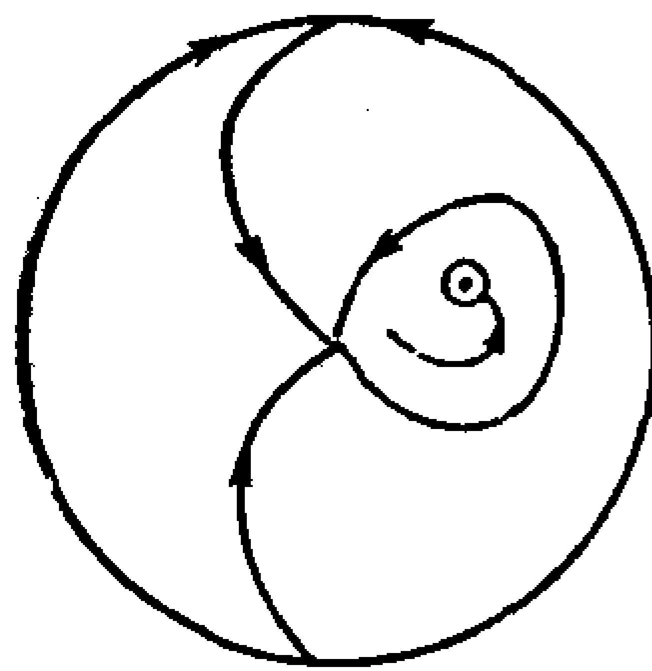
图 17·10



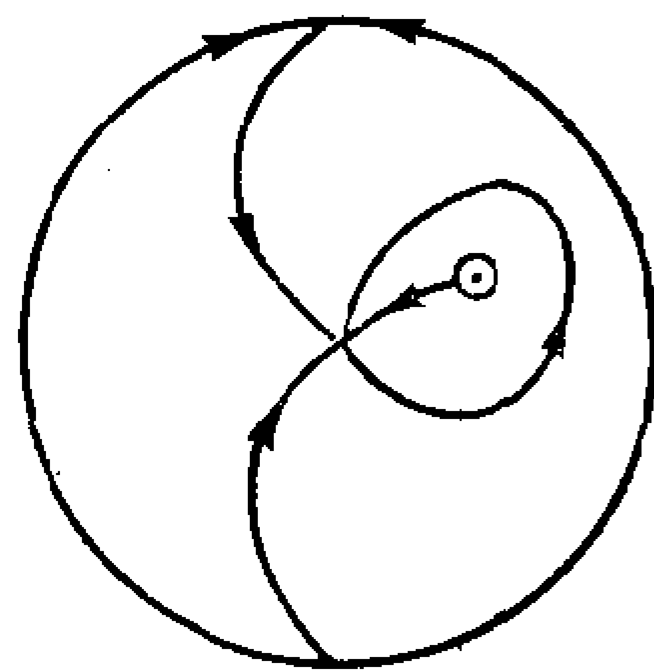
(a)



(b)



(c)



(d)

图 17·11

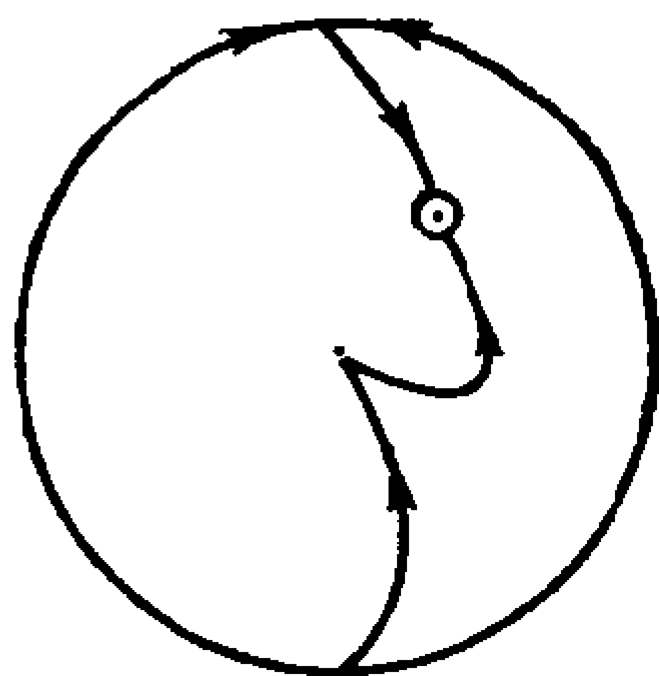


图 17·12

4) 当 $a(a+b\delta+m)>0$ 时与图 17·11 同胚;

5) 当 $a+b\delta+m=0$ 时与图 17·10 或 17·13 同胚.

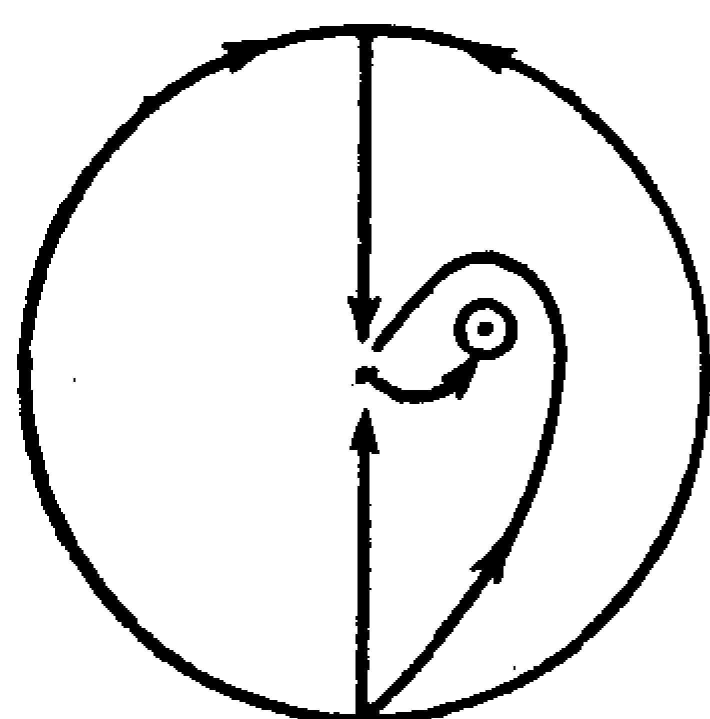
【证】 先考虑 $\sigma=0$ 的情况. 这时 $a(a+b\delta+m)=-2b^2$, 方程(17·24)可写成

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=\frac{2b}{B}\bar{x}+\frac{2b^2}{Ba}\bar{y}+l\bar{x}^2+m\bar{x}\bar{y},$$

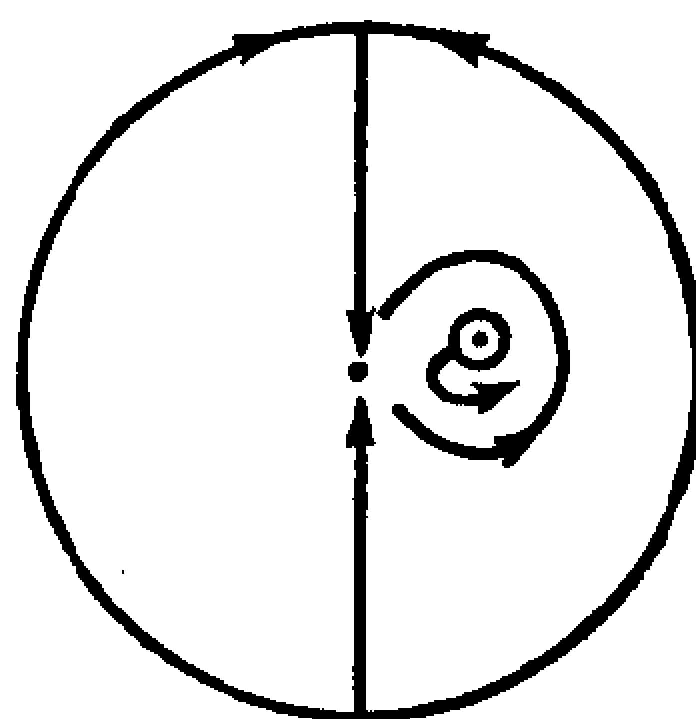
$$\frac{d\bar{y}}{dt}=-\frac{2a}{B}\bar{x}-\frac{2b}{B}\bar{y}+a\bar{x}^2+b\bar{x}\bar{y}.$$

令
$$\bar{x}=u,\ \bar{y}=\frac{v}{\frac{2b^2}{Ba}+mu}-\frac{lu^2+\frac{2b}{B}u}{\frac{2b^2}{Ba}+mu},$$

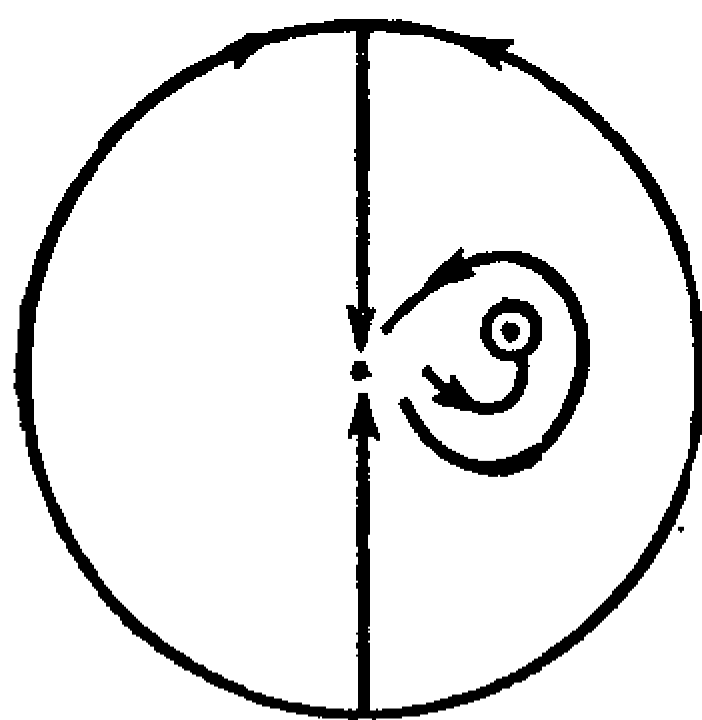
可得



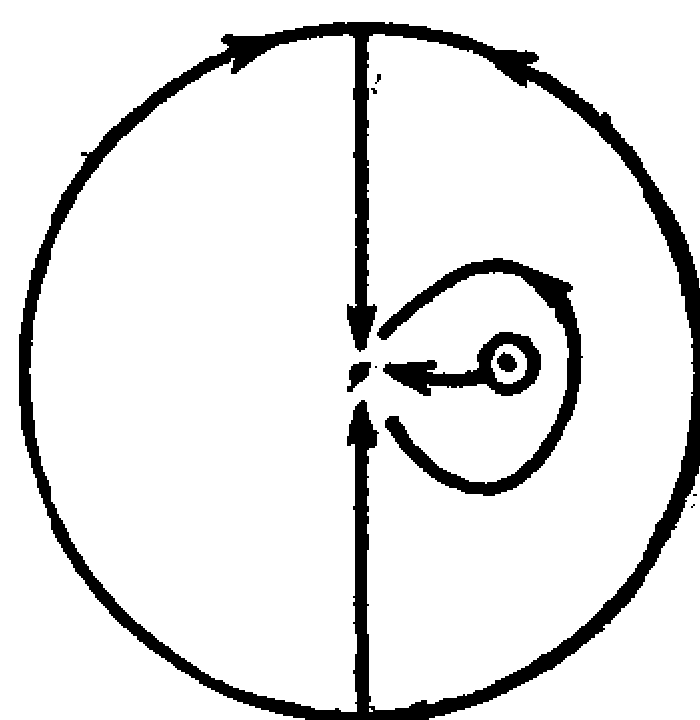
(a)



(b)



(c)



(d)

图 17·13

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=v,\\ \frac{dv}{dt}&=\frac{2D}{B}u^2\left[1-\frac{B}{2}u+o(u)\right]\\ &\quad+\frac{b(l+b)+D}{b}uv\left[1-\frac{BamD}{2b(D+b^2+lb)}u+o(u)\right]\\ &\quad+\frac{maB}{2b^2}v^2\left[1-\frac{maB}{2b^2}u+o(u)\right],\end{aligned}\right\}\tag{17·25}$$

由此可知, O^* 是高阶退化奇点, 故(17·25), 从而(17·8)的分界线结构与图 17·12 同胚.

当 $m=0$, $l=b$, $ab>0$ 时 $B=a+b\delta$, $D=b^2$, $(a+b\delta)^2=4b^2$. 再由条件 $\sigma=0$ 可得 $a=b$, $\delta=-3$, $B=-2a$. 而(17·25)可写成

$$\frac{du}{dt}=v,\quad \frac{dv}{dt}=\frac{-b^2}{a}u^2-b^2u^3+3buv,$$

O^* 仍是高阶退化奇点,故(17·8)的分界线结构与图 17·12 同胚.

其次设 $\sigma\neq 0$. 对方程(17·24)施行变换

$$x^*=\bar{x}+\frac{b}{a}\bar{y},\quad y^*=\frac{2a}{B}\bar{x}-\frac{a}{bB}(a+b\delta+m)\bar{y},$$

便得

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx^*}{dt}&=\sigma x^*-\frac{a}{2bB\sigma^2}(a+b\delta+m)\left[2\sigma(b+l)+B\right]x^{*2}\\ &\quad+\frac{bD}{a^2\sigma^2}y^{*2}+\frac{1}{2ab\sigma^2}[a(a+b\delta+m)B\\ &\quad-2b\sigma(b^2+ma)]x^*y^*,\\ \frac{dy^*}{dt}&=\frac{a^3}{B^3b^2\sigma^2}(a+b\delta+m)\left[(a+b\delta+m)(B\sigma+2l)\right.\\ &\quad\left.+4mb\right]x^{*2}+\frac{2bD}{Ba\sigma^2}y^{*2}+\frac{a}{B^2b\sigma^2}\left[(a+b\delta+m)(bB\sigma\right.\\ &\quad\left.+2D+2bl)+4mb^2\right]x^*y^*.\end{aligned}\right\}\tag{17·26}$$

再施行变换

$$x^*=v,\ y^*=u,\ \frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{\sigma},$$

则(17·26)化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{d\tau}=&\frac{2bD}{Ba\sigma^3}u^2+\frac{a}{bB^2\sigma^3}[(a+b\delta+m)(bB\sigma+2D+2bl)\\&+4mb^2]uv+\frac{a^3}{B^3b^2\sigma^3}(a+b\delta+m)[(a+b\delta+m)\\&\times(\sigma B+2l)+4mb]v^2=P_2(u,\ v),\\\frac{dv}{d\tau}=&v+\frac{bD}{a^2\sigma^3}u^2+\frac{1}{2ab\sigma^3}[a(a+b\delta+m)B\\&-2b\sigma(b^2+ma)]uv-\frac{a}{2bB\sigma^3}(a+b\delta+m)\\&\times[2\sigma(b+l)+B]v^2=v+Q_2(u,\ v).\end{aligned}\right\}\tag{17·27}$$

由 $v+Q_2(u,\ v)=0$ 可解出

$$v=\varphi(u)=-\frac{bD}{a^2\sigma^3}u^2+o(u^2),$$

代入(17·27)的第一个方程,得

$$\psi(u)\equiv P_2(u,\ \varphi(u))=\Lambda_u u^2+o(u^2),\tag{17·28}$$

其中
$$\Lambda_u=\frac{2bD}{Ba\sigma^3},$$

故 O^* 是半鞍结点.

当 $m=0$ 时上述论断仍然成立.

不妨设 $b>0$, 否则在(17·8)中把 x, y 改号即可。由 $B^2=4D$ 可得

$$mx_1-1=-\frac{1}{B}(a+b\delta+m).\tag{17·29}$$

注意到在 $B^2>4D$ 的条件下, 当 $B>0$ 时 $x_2<x_1<0$; 而当 $B<0$ 时 $0<x_2<x_1$. 故由 $B^2>4D$ 变到 $B^2=4D$ 时如果 $B>0(<0)$, 则高次奇点是由鞍点和它左(右)方指标为 $+1$ 的初等奇点复合而成的.

现在考虑 $B[a(a+b\delta+m)+2b^2]<0$ 的情况．如果 $a(a+b\delta+m)+2b^2<0$, 则 $B>0$, $a(a+b\delta+m)<0$, 故必有 $m<0$; 否则当 $m=0$ 时 $aB<0$, 但又有 $ab>0$, 这是不可能的．于是 $a>0$ 而 $a+b\delta+m<0$. 由(17·29)知 O^* 是由图 17·5 中的鞍点和它左方指标为 $+1$ 的初等奇点复合而成的．又由(17·28)知道 O^* 附近的双曲域包含负 u 轴 (这时 $A_u>0$). 回到 $\bar{x}O^*\bar{y}$ 平面，知 O^* 是由图 17·5(a) 中的鞍点和它左方指标为 $+1$ 的初等奇点复合而成的．仿此可证若 $a(a+b\delta+m)+2b^2>0$, 则 O^* 是由图 17·4(a)中的鞍点和它右方指标为 $+1$ 的初等奇点复合而成的．在两种情况下，(17·8)的分界线结构都同胚于图 17·8.

其次，考虑 $B[a(a+b\delta+m)+2b^2]>0$, $a(a+b\delta+m)<0$ 的情况．如果这时 $a(a+b\delta+m)+2b^2>0$, 则 $B>0$, 于是 $m<0$. O^* 是由图 17·5 中的鞍点和它左方指标为 $+1$ 的初等奇点复合而成的．但由于 $A_u<0$, 所以 O^* 附近的双曲域包含正 u 轴．这样，在 $\bar{x}O^*\bar{y}$ 平面上，O^* 是由图 17·5(d)中的鞍点和它左方指标为 $+1$ 的初等奇点复合而成的．仿此可证若 $a(a+b\delta+m)+2b^2<0$, 则 O^* 是由图 17·4(d) 中的鞍点和它右方指标为 $+1$ 的初等奇点复合而成的．在两种情况下，(17·8)的分界线结构都同胚于图 17·9.

第三，考虑 $a(a+b\delta+m)>0$ 的情况．这时 $a(a+b\delta+m)+2b^2>0$, $m\leqslant 0$, $B=a+b\delta+m-2m>0$, 由(17·29)知道 O^* 是由图 17·4 中的鞍点和它左方指标为 $+1$ 的初等奇点复合而成的，所以 (17·8)的分界线结构与图 17·11 同胚．

最后，若 $a+b\delta+m=0$, 则 $m<0$, 否则必有 $B=0$, 这是不可能的．于是 $B>0$,

$$x=\frac{1}{m}$$

是积分直线．如果 $a+b\delta+m$ 是由小于零变为零，则 O^* 是由图 17·6 中的鞍点和它左方指标为 $+1$ 的初等奇点复合而成的，所以

(17·8)的分界线结构与图 17·10 同胚. 如果 $a+b\delta+m$ 是由大于零变为零, 则 O^* 是由图 17·4 中的鞍点和它左方指标为 +1 的初等奇点复合而成的, 故 (17·8) 的分界线与图 17·13 同胚. 引理证毕.

现在转而讨论极限环问题. 首先我们看到, 当 $|\delta|\geqslant 2$ 时, (17·8)唯一的指标 +1 的初等奇点是结点, 所以(17·8)不存在极限环, 故可设 $|\delta|<2$. 在此条件下, 如果 $a(a+b\delta+m)+2b^2\neq 0$, 那末 $B>0$, 否则, 作

$$V=\bar{y}-\frac{y_0}{x_0}\bar{x},$$

其中

$$x_0=-\frac{2}{B},\quad y_0=\frac{2a-B}{bB}.$$

沿着(17·24)的轨线求导数, 得

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{V=0}=\frac{B}{8b^2}[(4-\delta^2)b^2+(a+m)^2]\bar{x}(\bar{x}+x_0),$$

$$\left.\frac{d\bar{x}}{dt}\right|_{\bar{x}=0}=-\frac{1}{B}(a+b\delta+m)\bar{y},\quad \left.\frac{d\bar{y}}{dt}\right|_{\bar{y}=0}=a\bar{x}(\bar{x}+x_0),$$

当 $B<0$ 时, $x_0>0$. 于是 (17·24) 的部分分界线结构如图 17·14 所示(此图对应于 $a>0$ 的情况), 这是不可能的. 因为图中阴影扇形上无奇点, 从半鞍结点 (0, 0) 出发的轨线当 $t\to+\infty$ 时又不能跑出该扇形.

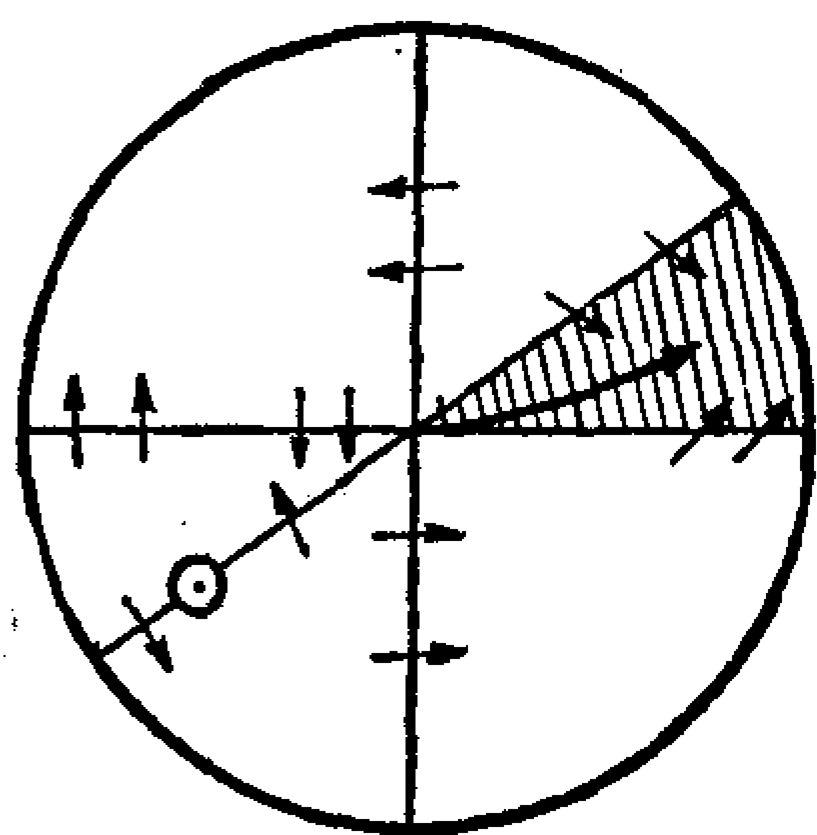


图 17·14

这样, 在 $|\delta|<2$ 的条件下, 引理 17·2 的条件 2) 与 3) 实际上可以分别写成

2′) $a(a+b\delta+m)+2b^2<0,\quad B>0;$

3′) $a(a+b\delta+m)+2b^2>0,\ B>0,\ a(a+b\delta+m)<0.$

现在不难看出, 在 2′), 3′) 以及引理 17·2 1), 5) 的条件下有 $m\neq 0$. 因此在讨论极限环的存在性与个数时, 在上述情况下都可以假定 $m\neq 0$. 实际上, 对方程(17·8), 如果 $m=0$, 则极限环的唯

一性早在[226]中就得到证明，这在§15中已经提到过.

由于可设 $b>0$，故 $m<0$，为了方便起见还可设 $m=-1$. 于是(17·8)可以写成

$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+lx^2-xy,\qquad \frac{dy}{dt}=x(1+ax+by). \quad (17\cdot30)$$

定理 17·2 中的有界性条件(1)以及(17·8)有两个有限远奇点的条件 $B^2=4D$ 可以分别写成

$$(b-l)^2<4a,\quad b>0, \qquad (17\cdot31)$$

$$(a+b\delta+1)^2=4(lb+a), \qquad (17\cdot32)$$

而引理 17·2 中的条件 1), 2), 3), 5) 可以分别写成

$$a(a+b\delta-1)+2b^2=0, \qquad (17\cdot33)$$

$$a(a+b\delta-1)+2b^2<0,\ a+b\delta+1>0, \qquad (17\cdot34)$$

$$a(a+b\delta-1)+2b^2>0,\ a(a+b\delta-1)<0,\ B>0, \qquad (17\cdot35)$$

$$a+b\delta-1=0. \qquad (17\cdot36)$$

定理 17·3 满足条件(17·31)及(17·32)的系统(17·30)，当 $0<\delta<2$ 且(17·33)，(17·34)，(17·36)之一成立时恰有一个极限环，而且这个环是稳定的.

【证】 令 $x=x$，$\xi=lx^2+\delta x-(1+x)y$，则系统(17·30)化成

$$\frac{dx}{dt}=\xi,$$

$$\frac{d\xi}{dt}=-x(1+ax)(1+x)-bx(lx^2+\delta x)$$

$$+\left[\delta+(2l+b)x-\frac{x(lx+\delta)}{1+x}\right]\xi+\frac{\xi^2}{1+x},$$

再作变换

$$x=x,\ u=\frac{\xi}{1+x},$$

可得

$$\frac{dx}{dt}=u(1+x),$$

$$\frac{du}{dt}=-x(1+ax)-\frac{bx^2(lx+\delta)}{1+x}$$
$$+\left[\delta+(2l+b)x-\frac{x(lx+\delta)}{1+x}\right]u. \qquad (17\cdot37)$$

最后，令

$$x=x,\ y=-u+\int_0^x\frac{\delta+(2l+b)s+(l+b)s^2}{(1+s)^2}\,ds,$$
$$\frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{1+x},$$

即得 Liénard 型方程：

$$\frac{dx}{d\tau}=-y-F(x),\quad \frac{dy}{d\tau}=g(x), \qquad (17\cdot38)$$

其中
$$g(x)=\frac{x}{(1+x)^2}\left(1+\frac{a+b\delta+1}{2}x\right)^2,$$
$$F(x)=-\int_0^x\frac{\delta+(2l+b)s+(l+b)s^2}{(1+s)^2}\,ds,$$

显见 $xg(x)>0$ 当 $x\neq0$，又若假定 $f(x)=F'(x)$，则 $f(0)=-\delta<0$. 这时

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{1}{g^2(x)}\frac{1+\frac{a+b\delta+1}{2}x}{(1+x)^4}W(x),$$

其中

$$W(x)=\frac{1}{2}(l+b)(a+b\delta+1)x^3+[l(a+b\delta+1)$$
$$+(l+b)(a+b\delta)]x^2+\frac{3}{2}\delta(a+b\delta+1)x+\delta. \qquad (17\cdot39)$$

由(17·31)与(17·32)可得

$$a>0,\quad (a+b\delta-1)^2=4b(l-\delta),$$

因此
$$l>\delta>0. \qquad (17\cdot40)$$

由于 $\delta>0$，故(17·30)至少有一个极限环．易证直线 $x=1$ 是无切直线，故极限环必在 $x>-1$ 的区域中．

现在假设(17·33)成立，则(17·39)中的 $W(x)$ 呈如下形式：

$$W(x)=\left(1+\frac{a+b\delta+1}{2}x\right)Z(x),$$

其中
$$Z(x)=(l+b)x^2+\frac{2[(2l+b)(a+b\delta)-b]}{a+b\delta+1}x$$
$$+2\frac{[(2l+b)(a+b\delta)-b]}{(a+b\delta+1)^2}.$$

容易计算 $Z=Z(x)$ 的极小值点为

$$x_0=-\frac{(2l+b)(a+b\delta)-b}{a+b\delta+1},$$

而它的极小值是

$$Z(x_0)=\frac{[(2l+b)(a+b\delta)-b][-(2l+b)(a+b\delta-1)+2b]}{(l+b)(a+b\delta+1)^2}.$$

因为
$$a+b\delta-1=-\frac{2b^2}{a}<0,$$

故 $-(2l+b)(a+b\delta-1)+2b>0$. 又因

$$\frac{4(l+b)}{(a+b\delta+1)^2}-\frac{2(2l+b)}{a+b\delta+1}+\delta=0,$$

或 $2(2l+b)(a+b\delta+1)-4(l+b)=\delta(a+b\delta+1)^2$, 由此推得

$$(2l+b)(a+b\delta)-b=\frac{1}{2}\delta(a+b\delta+1)^2>0.$$

从而
$$Z(x)\geqslant Z(x_0)>0,\quad 当\ x>-1\ 时,$$

于是
$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{1}{g^2(x)}\frac{\left(1+\dfrac{a+b\delta+1}{2}x\right)^2}{(x+1)^4}Z(x)>0,$$
$$当\ x>-1\ 时.$$

根据§6定理6·4知道，系统(17·30)恰有一个极限环，而且是稳定环.

其次，如果(17·34)成立，则 $a+b\delta-1<0$, 从而

$$-\frac{2}{a+b\delta+1}<-1,$$

因为

$$[\delta+(2l+b)x+(l+b)x^2]_{x=-\frac{2}{a+b\delta+1}}$$

$$=-\frac{(a+b\delta-1)}{b(a+b\delta+1)}[a(a+b\delta-1)+2b^2]<0^{1)},$$

故 $$4(l+b)-2(2l+b)(a+b\delta+1)+\delta(a+b\delta+1)^2<0,$$

或 $$4(l+b)-2(2l+b)(a+b\delta+1)+4\delta(lb+a)<0.$$

这样就有

$$b(a+b\delta-1)>-2a(l-\delta). \tag{17·41}$$

由(17·39)有

$$W'(x)=\frac{3}{2}(l+b)(a+b\delta+1)x^2+2[l(a+b\delta+1)$$

$$+(l+b)(a+b\delta)]x+\frac{3}{2}\delta(a+b\delta+1),$$

从而方程 $W'(x)=0$ 的根是

$$x_1=\frac{-2[l(a+b\delta+1)+(l+b)(a+b\delta)]-\sqrt{\Delta}}{3(l+b)(a+b\delta+1)},$$

$$x_2=\frac{-2[l(a+b\delta+1)+(l+b)(a+b\delta)]+\sqrt{\Delta}}{3(l+b)(a+b\delta+1)},$$

其中 $$\Delta=4[l(a+b\delta+1)+(l+b)(a+b\delta)]^2$$

$$-9\delta(l+b)(a+b\delta+1)^2.$$

先假设 $\Delta>0$. 于是 $x_1<x_2<0$, 且 $W(x)$ 在 x_1 与 x_2 分别取得极大值 $W(x_1)$ 及极小值 $W(x_2)$; 此外有 $W(x_2)<W(x_1)$.

$$W(x_2)=\frac{1}{3}[l(a+b\delta+1)+(l+b)(a+b\delta)]x_2^2$$

$$+\delta(a+b\delta+1)x_2+\delta.$$

考虑 $$\psi(x)=\frac{1}{3}[l(a+b\delta+1)+(l+b)(a+b\delta)]x^2$$

$$+\delta(a+b\delta+1)x+\delta,$$

$$\psi'(x)=\frac{2}{3}[l(a+b\delta+1)+(l+b)(a+b\delta)]x$$

$$+\delta(a+b\delta+1).$$

1) 在条件(17·35)之下此不等式不成立。

方程 $\psi'(x)=0$ 的根为

$$x_0=-\frac{3\delta(a+b\delta+1)}{2[l(a+b\delta+1)+(l+b)(a+b\delta)]},$$

而 $\psi(x)$ 在 $x=x_0$ 取得极小值:

$$\begin{aligned}\psi(x_0)&=\frac{1}{2}\ \delta(a+b\delta+1)x_0+\delta\\&=\frac{\delta[l(a+b\delta+1)+(l+b)(a+b\delta)-3\delta(lb+a)]}{l(a+b\delta+1)+(l+b)(a+b\delta)}.\end{aligned}$$

由于 $a(l-\delta)>0$, 故有 $-\delta(lb+a)>-l(a+b\delta)$, 从而

$$\begin{aligned}&l(a+b\delta+1)+(l+b)(a+b\delta)-3\delta(lb+a)\\&\quad>l+(a+b\delta)(2l+b-3l)=b(a+b\delta)-l(a+b\delta-1)\\&\quad>0,\end{aligned}$$

所以 $$W(x_2)=\psi(x_2)\geqslant\psi(x_2)>0.$$

此外, $$W(-1)=\frac{3}{2}(l-\delta)(a+b\delta)+\frac{1}{2}(l-\delta)+\frac{b}{2}(a+b\delta-1).$$

根据(17·41)有

$$\begin{aligned}W(-1)&>\frac{3}{2}(l-\delta)(a+b\delta)+\frac{1}{2}(l-\delta)-a(l-\delta)\\&=\frac{1}{2}(l-\delta)(a+3b\delta+1)>0.\end{aligned}$$

现在如果 $\varDelta<0$, 则 $W(x)$ 是 x 的单调增函数(当 $x>-1$), 且 $W(-1)>0$. 因此, 不论在哪一种情况下都有

$$W(x)>0\quad 当\quad x>-1.$$

于是 $$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]>0\quad 当\quad x>-1.$$

根据§6定理6·4知道, 系统(17·30)恰有一个极限环, 而且是稳定环.

最后, 如果(17·36)成立, 则 $l=\delta>0$, $a+b\delta=1$, $a+b\delta+1=2$. 这时

$$xg(x)>0,\ 当\ x\neq 0;$$

$$f(0)=-\delta<0$$

而(17·39)变成

$$\begin{aligned}W(x)&=(b+\delta)x^3+(3\delta+b)x^2+3\delta x+\delta\\&=(x+1)[(b+\delta)x^2+2\delta x+\delta].\end{aligned}$$

由于

$$\Delta=4\delta^2-4\delta(b+\delta)=-4b\delta<0,$$

故 $W(x)>0$ 当 $x>-1$. 于是如前可得极限环为唯一的结论，且此环为稳定的. 定理证毕.

注意：本定理要求条件(17·32)成立，故对固定的 a, b, l 只能有一个 δ 的值. 所以定理的结论并不能保证方程(17·30)对 $0<\delta<2$ 中的一切 δ 都存在极限环.

如前所述，当 $|\delta|\geqslant 2$ 时，(17·8)已不存在极限环，因此只需在 $|\delta|<2$ 的条件下来讨论极限环的不存在性.

定理 17·4 满足条件(17·31)及(17·32)的系统(17·30)当 $\delta\leqslant 0$, 且(17·33)，(17·34)，(17·36)之一成立时不存在极限环.

【证】 这里只证(17·34)成立的情况，其余两情况与此类似. 先设 $\delta=0$, 这时

$$\bar{v}_3=\frac{\pi}{4}[m(l+n)-a(b+2l)]=-\frac{\pi}{4}[l+a(b+2l)]<0,$$

即(17·30)的初等奇点是稳定的一阶细焦点. 因此如果存在极限环的话，必为偶数个；而且这些环应位于区域 $x>-1$ 中. 但现在(17·39)中的 $W(x)$ 成为

$$W(x)=\frac{1}{2}(l+b)(a+1)x^2\left[x+\frac{2[l(a+1)+a(l+b)]}{(l+b)(a+1)}\right],$$

而(17·41)成为 $b(a-1)>-2al$, 从而

$$\begin{aligned}&\frac{2[l(a+1)+a(l+b)]}{(l+b)(a+1)}-1\\&\quad=\frac{1}{(l+b)(a+1)}[l(a+1)+2al+b(a-1)]\end{aligned}$$

$$>\frac{l(a+1)}{(l+b)(a+1)}=\frac{l}{l+b}>0.$$

因此 $$W(x)>\frac{1}{2}(l+b)(a+1)x^2(x+1)>0,\quad x>-1,$$

即系统(17·30)至多只有一个极限环. 这一矛盾说明(17·30)无极限环.

其次考虑 $-2<\delta<0$ 的情况. 这时(17·30)的初等奇点(0, 0)为稳定粗焦点. 同前, 若存在极限环, 必为偶数个, 且它们应位于区域 $x>-1$ 中. 下面分 $l+b\leqslant 0$ 与 $l+b>0$ 两种情况来讨论.

(一) $l+b\leqslant 0$ 的情况. 记 $-y-F(x)\equiv P(x,\ y)$, $g(x)\equiv Q(x,\ y)$, 其中 $F(x)$ 与 $g(x)$ 的意义如(17·38)所示. 今设(17·30), 从而(17·38)存在极限环, 并设 Γ 是其中的任一个, 那末

$$D=\oint_\Gamma\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)d\tau=\oint_\Gamma\frac{(l+b)x^2+(2l+b)x+\delta}{(1+x)^2}d\tau$$

$$=\oint_\Gamma\frac{V(x)}{(1+x)^2}d\tau,$$

其中 $$V(x)=(l+b)x^2+(2l+b)x+\delta.$$

如果 $l+b=0$, 则由(17·40)知 $V(x)=lx+\delta=l(x+1)-(l-\delta)<0$ 当 $x>-1$ 时. 如果 $l+b<0$, 则容易计算 $V(x)$ 的极大值点为

$$x_0=-\frac{2l+b}{2(l+b)}=-1+\frac{b}{2(l+b)}<-1.$$

由于 $a+b\delta-1<0$, $a+b\delta+1>0$, 所以

$$\frac{-2}{a+b\delta+1}<-1.$$

此外, $V(-1)=-(l-\delta)<0$. 这说明 $V(x)<0$ 当 $x<-1$ 时, 从而 $D<0$ 当 $x>-1$ 时. 即系统(17·30)至多只有一个极限环, 这和存在偶数个环的说法矛盾.

(二) $l+b>0$ 的情况.

先设 $(2l+b)(a+b\delta+1)-(l+b)\leqslant 0$, 又设 Γ 是 (17·30) 的任一极限环, Γ^* 是系统(17·38)的对应于 Γ 的极限环, 则

$$\begin{aligned}D&=\oint_{\Gamma^*}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)d\tau\\&=\oint_{\Gamma^*}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)d\tau-\frac{l+b}{a+b\delta+1}\oint_{\Gamma^*}g(x)d\tau\\&=\oint_{\Gamma^*}\frac{u(x)}{(x+1)^2}d\tau,\end{aligned}$$

其中

$$u(x)=-\frac{l+b}{4}(a+b\delta+1)x^3+\left(2l+b-\frac{l+b}{a+b\delta+1}\right)x+\delta.$$

这时

$$u'(x)=-\frac{3}{4}(l+b)(a+b\delta+1)x^2+2l+b-\frac{l+b}{a+b\delta+1}<0,$$

而

$$\begin{aligned}u(-1)&=\frac{l-\delta}{a+b\delta+1}[-(a+b\delta+1)+b(l+b)]\\&<\frac{l-\delta}{a+b\delta+1}\left[-(a+b\delta+1)-\frac{1}{2}a(a+b\delta-1)+lb\right]\\&=-\frac{1}{4}(l-\delta)(a-b\delta+3)<0.\end{aligned}$$

因此 $D<0$ 当 $x>-1$. 这说明方程(17·30)至多只有一个极限环，而这也就说明(17·30)实际上不存在极限环.

其次，如果 $(2l+b)(a+b\delta+1)-(l+b)>0$，则 $2l+b>0$，而

$$\begin{aligned}D&=\oint_{\Gamma^*}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)d\tau\\&=\oint_{\Gamma^*}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)d\tau-(2l+b)\oint_{\Gamma^*}g(x)d\tau\\&=\oint_{\Gamma^*}\frac{K(x)}{(x+1)^2}d\tau,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}K(x)=&-(2l+b)(lb+a)x^3+[(l+b)\\&-(2l+b)(a+b\delta+1)]x^2+\delta.\end{aligned}$$

$$x_1=0\quad 与\quad x_2=\frac{2[(2l+b)(a+b\delta+1)-(l+b)]}{-3(2l+b)(lb+a)}$$

分别为 $K=K(x)$ 的极大值点与极小值点，并且 $K(x_2)<K(x_1)$

$=\delta<0$. 容易计算

$$K(-1)=(l-\delta)[b(2l+b)-1].$$

由于

$$0<\frac{1-b\delta}{2}(a+b\delta+1)-b\delta=1-2b\delta-\frac{1}{2}(a+b\delta-1)(b\delta-1)$$

$$=1-2b\delta-\frac{1}{2}(a+b\delta-1)^2+\frac{1}{2}a(a+b\delta-1)$$

$$=1-2b\delta-2b(l-\delta)+\frac{1}{2}a(a+b\delta-1)$$

$$<1-2b\delta-2bl+2b\delta-b^2=1-b(b+2l),$$

故 $K(-1)<0$, 从而 $D<0$ 当 $x>-1$, 如前可知(17·30)不存在极限环, 定理证毕.

III. 有一个有限远奇点的情况.

当 $b=0$ 时系统(17·8)有一个有限远奇点的充要条件是 $m+a=0$, $l+m\delta\neq0$. 如果 $b\neq0$, 则由(17·14)知道(17·8)有一个有限远奇点的充要条件是 $B^2<4D$ 或 $B=D=0$. 考虑到定理 17·2 的有界性条件, 便得

引理 17·3 满足下列条件之一的方程(17·8)的分界线结构是具有一个无限远鞍点和一个有限远焦点或结点的有界系统:

(1) $b=m+a=0$, $l^2+4ma<0$, $m(l+m\delta)<0$;

(2) $m=0$, $b=l$, $ab>0$, $(a+b\delta)^2<4b^2$;

(3) $(b-l)^2+4ma<0$, $mb<0$, $B^2<4D$.

其中 B, D 的意义如(17·14)所述.

对于引理 17·3 中的情况(1)有下面的结果:

定理 17·5 在引理 17·3 的条件(1)之下[1], 系统(17·8)当

$$0<\delta<-\frac{l}{m}$$

时恰有一个极限环, 且为稳定环; 而当

1) 不妨设 $m>0$, $l<0$, 从而当 $\delta=0$ 时 $\bar{v}_3=3ml<0$.

$$\delta \leqslant 0 \quad \text{或} \quad \delta \geqslant -\frac{l}{m}$$

时不存在极限环.

证明不难,作为习题.

对引理 17·3 的情况(3)只能得到局部的结果,即当 $0<|\delta|\ll 1$ 而取适当符号时 (0, 0) 附近存在唯一的极限环. 而对情况(2),由 § 15 提到的[226],可知只要 $m=0$, $(a+b\delta)^2<4b^2$ 就可保证奇点的唯一性和极限环存在时的唯一性了.

用 [248] 原来的方程来研究有界二次系统的极限环问题的还有[252]和[253]. 在[248]中已证明: 凡可能具有极限环的有界二次系统都可写成

$$\frac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y+y^2, \qquad \frac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y-xy+cy^2, \tag{17·42}$$

其中诸系数满足下列条件之一:

(i) $|c|<2$, $a_{11}<0$;

(ii) $|c|<2$, $a_{11}=a_{12}+a_{21}=0$, $a_{12}\neq 0$, $ca_{21}+a_{22}<0$.

[252]得到若干保证(17·42)最多存在一个极限环的充分条件, 但当(17·42)被化为(17·8)的形式时, 其结果便和本节前面已介绍的[250]中的结果的一部分相重复.

[253]是杨信安在[250]以前的工作,其中(也用[248]的记号)证明: 具两个有限远奇点(其一为退化高阶奇点, 满足上述条件(i) 以及 $a_{21}<0$, $a_{11}a_{22}=a_{12}a_{21}$, $a_{11}+a_{22}=0$) 的有界二次系统当 $ca_{11}+a_{21}>0$ 时有且仅有一个极限环, 而当 $ca_{11}+a_{21}\leqslant 0$ 时不存在极限环.

习 题

1. 补证定理 17·4 中余下的两种情况.

2. 给出定理 17·5 的详细证明.

3. 证明 $$\frac{dx}{dt}=-x-y-xy,\quad \frac{dy}{dt}=x+xy$$
有无界解[249].

4. 证明 $$\frac{dx}{dt}=-y+xy,\quad \frac{dy}{dt}=x-y+x^2+2xy$$
有无界解[249].

5. 证明 $$\frac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y,\quad \frac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y+b_3y^2$$
除了 $a_{22}<0$, $a_{21}\neq 0$ 的情况外, 沿着任一轨线若 t 可延拓到 $+\infty$, 则此轨线必为有界[249].

6. 试用 (17·32) 推出 $(a+b\delta-1)^2=4b(l-\delta)$, 再用这两等式证明 (17·40)后面第四行的等式:
$$[\delta+(2l+b)x+(l+b)x^2]_{x=\frac{-2}{a+b\delta+1}}$$
$$=\frac{-(a+b\delta-1)}{b(a+b\delta+1)}[a(a+b\delta+1)+2b^2].$$

7. 试将本节关于有界二次系统的各种情况分别化为[248]的各种情况.

8. 试用 Баутин 方法证明: 对有界系统(17·8), 在原点外围有可能出现两个极限环, 但(17·8)不可能以(0, 0)为三阶细焦点.

§18. 补　遗

本节的目的主要是简单介绍最近在新到的期刊或预印本中见到的一些有关极限环理论的成果；同时也介绍其他一些有关极限环的研究方向，在时间上来说不一定最新，但其内容不能包含在前面十七节的标题之内的.

I. 平面多项式系统

在[255]中作者们研究了方程

$$\frac{dx}{dt}=-y+lx^2+mxy,\quad \frac{dy}{dt}=x(1+ax+by),\tag{1}$$

假设 $a\neq0,\ ml-a(b+2l)=0,\ m\neq5a,$

$$\frac{ml}{a^2}(ma^2-ml^2+2al^2)\neq0,$$

则(0, 0)不是一阶或三阶细焦点，也不是中心，而是真正的二阶细焦点，且当 m 变动时它有可能改变稳定性而产生极限环. 他们证明：当

$$\frac{a}{m}<0\qquad 或\qquad \frac{a}{m}>\frac{1}{5}$$

时(1)在全平面没有极限环，当

$$0<\frac{1}{5}-\frac{a}{m}\ll1$$

而
$$1-15\left(\frac{l}{m}\right)^2\neq0$$

时 O 外围至少有一个极限环，但无围绕其他奇点的极限环. 但保证极限环存在的，$\frac{a}{m}$ 的准确变动范围是否为 $0<\frac{a}{m}<\frac{1}{5}$，则不得而知.

在 [256] 中指出 [231] 并未能完全解决 II 类方程的极限环的

集中分布问题，同时也给出一些其他的充分条件，从而扩大了[27]对§14 方程 (14·5) 所得保证极限环集中分布的 δ 的变动范围[1]，但仍未能完全解决问题.

[257]，[293]，[294]都研究了有抛物线解的二次系统是否有可能具有极限环的问题，结论是肯定的. 由此可见，情况与具双曲线解的二次系统不一样[122].

[259]证明：当参数 λ 变动时方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(2\lambda x+1)(ax+by+c)+\alpha(\lambda x^2+y^2+x+1)}{2y(ax+by+c)+\beta(\lambda x^2+y^2+x+1)} \tag{2}$$

可以有双曲线，抛物线，实椭圆，点椭圆或虚椭圆等各种形式的二次代数曲线解；但如果(2)存在极限环的话，则必为唯一，从而推广了[17]中的结果.

[260]研究非线性振荡方程

$$\ddot{x}+(\alpha+\gamma x^2)\dot{x}+\beta x+\delta x^3=0 \tag{3}$$

的相图与分支曲线. 特别，他们应用分支理论指出这个方程在相平面上可以出现极限环的 分布.

[261]继[180]与[260]之后继续研究三次系统

$$\frac{dx}{dt}=y, \quad \frac{dy}{dt}=Q_3(x, y) \tag{4}$$

的闭轨线的一般性质，指出其中有许多性质是二次系统的闭轨线所不具备的，并严格证明系统(4)存在 型的极限环分布. 他同时又研究具有九个奇点的三次系统

$$\frac{dx}{dt}=y-\varepsilon y^3, \quad \frac{dy}{dt}=Q_3(x, y), \tag{5}$$

证明它存在 型的极限环分布，并给出具体的数字例子. 又给出一般的 Liénard 方程组

1) 见§14(一)段，情况2最后的脚注.

$$\frac{dx}{dt}=y-F(x),\qquad \frac{dy}{dt}=-g(x) \tag{6}$$

存在同时包围三个奇点在其内部的极限环的充分条件.

[262]则得到使

$$yy'=-g(x)-f(x)y \tag{7}$$

(其中 f, g 为有理函数) 有一系闭轨线包含三个奇点的充分条件,并证明此时位于闭轨线内部的鞍点的两特征根的绝对值应该相等.

[263]首先研究了含两个参数 μ, λ 的 Hamilton 系统的扰动系统

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y}-\mu xp(x,\ y),\quad \frac{dy}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}-\mu y(q(x,\ y)-\lambda) \tag{8}$$

当 $0<\|\mu\|\ll 1$ 时极限环的产生情况,然后讨论三次系统

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=y(ax^2+by^2+c),\\&\frac{dy}{dt}=-x(x^2+ay^2-d)-\mu y\left(lx^2+\frac{m}{3}y^2-\lambda\right)\end{aligned} \tag{9}$$

的极限环随 λ, μ 而变化的情况, 所得的结果较[260]及[264]中的结果为佳,且方程也更为广泛.

应该指出,对于三次系统的分枝问题的研究, 比[260, 264]等更早一些已有[265]对

$$\dot{x}=y-(ax^3+bx^2+cx),\ \dot{y}=\sigma-\lambda x-y \tag{10}$$

的有趣的研究工作,其中也指出 ⊙⊙ 型极限环分布的存在性,并作出(λ, σ)参数平面中的分枝曲线.

[266]研究了方程:

$$\frac{dx}{dt}=y,\qquad \frac{dy}{dt}=-y\sum_{i+j=0}^{2m}a_{ij}x^iy^j-\sum_{i=1}^{2m+1}a_ix^i, \tag{11}$$

给出保证存在极限环的十分简洁的充分条件,并指出[267]中的定理 2 的证明有错误. 注意,方程(11)较[268]中所研究的方程

$$\dot{x}=y,\ \ \dot{y}=-yf_{2n}(y)-xg_{2n}(x)$$

更为广泛.

[269]将二次系统的极限环的若干一般性质推广到与具实系数但有复的未知量 x, y 的二次系统

$$\frac{dx}{dt}=P(x,\ y),\qquad \frac{dy}{dt}=Q(x,\ y) \tag{12}$$

等价的、四维空间中的二次系统:

$$\frac{dx_1}{dt}=P_r(x,\ y),\quad \frac{dx_2}{dt}=P_j(x,\ y),$$

$$\frac{dy_1}{dt}=Q_r(x,\ y),\quad \frac{dy_2}{dt}=Q_j(x,\ y) \tag{13}$$

去, 这里 $x=x_1+ix_2$, $y=y_1+iy_2$, P_r, P_j 与 Q_r, Q_j 分别表示 $P(x,\ y)$与 $Q(x,\ y)$的实部与虚部.

[270]用不变量理论对齐二次微分系统进行分类, 纠正了[166]中的错误图形,并指出他们的分类法是不独立的.

[271]得到使 n 次多项式系统

$$\frac{dx}{dt}=\lambda x-y+P(x,\ y),\ \ \frac{dy}{dt}=x+\lambda y+Q(x,\ y) \tag{14}$$

至少存在 k 个包含(0, 0)的极限环的充分条件,推广了[19, 20]的结果.

[272]证明: 若平面多项式系统的每一奇点(包括赤道上的奇点在内)都是初等奇点, 又它在 Poincaré 半球面上的骨架图(由一些鞍点和分界线所构成, 其中每一分界线的 ω 与 α 极限集都是鞍点, 且图中每一鞍点至少有一条进入它的分界线和一条离开它的分界线)是简单图(设在鞍点 P_i 的两特征根为 $\mu_i<0<\lambda_i$, 如果对图中所有鞍点 P_1, …, P_k 而作的数

$$\rho=\prod_{i=1}^{k}\frac{|\mu_i|}{\lambda_i}\neq 1,$$

则称此图是简单的),则此多项式系统只能有有限个闭轨.

在上述论文的基础之上, [273]进一步证明: 在由一切二次系

统向量场 X 所成的向量空间 $\mathscr{X}_2$ 上存在一非明显的函数 R: $\mathscr{X}_2 \to R$, 使若 $X\in\mathscr{X}_2$ 满足 $R(X)\neq 0$, 则 X 只有有限个闭轨. 应指出,此文中有几个引理早已在[14]中就被得到了.

[274]证明:在二次系统向量场全体所成的向量空间 $\mathscr{X}_2$ 中存在一余维为一的解析子流形 S, 使 S 中每一向量场 X 都有一分界线环包围一极限环. 但作者认为这种构图迄今未被人们所发现过是不对的,因为在 § 14 中我们已多次看到它出现的可能性了.

[275]研究了第一个方程含有两个二次项的 II 类方程

$$\frac{dx}{dt}=-y+lx^2+mxy,\quad \frac{dy}{dt}=x-x^2 \tag{15}$$

的相图的各种可能. 拓扑结构以及它的分枝曲线. 注意, 不同于 § 13 的方程(13·3), (15)有可能存在极限环或分界线环.

此外,研究二次系统的文章还有[126, 214, 295, 296, 297].

II. 极限环和微分方程的典型积分与 Darboux 积分

在苏联从五十年代中期开始, Н. Ф. Отроков, К. С. Сибирский 和 М. В. Долов 等利用方程

$$\frac{dx}{dt}=P(x,\ y),\qquad \frac{dy}{dt}=Q(x,\ y) \tag{16}$$

(P, Q 为解析函数)所对应的一阶偏微分方程

$$P\frac{\partial f}{\partial x}+Q\frac{\partial f}{\partial y}=0 \tag{17}$$

在(16)的闭轨线 l 的邻域中满足初值条件

$$[f(x,\ y)]_s=c \tag{18}$$

(其中 s 是 l 在其上一点$(x_0,\ y_0)$的无切直线段 $x=x_0+ac$, $y=y_0+bc$, $|c|\leqslant c_0$) 的解 $f_0(x,\ y)$ 经过一切解析延拓后所得到的 (一般来说是多值的)解析函数 $f(x,\ y)$ 为工具来研究多重极限环的分解, Darloux 积分的存在等等问题,得到如下一些有意义的结果.

设 $f_0(x,\ y)$沿 l 的邻域向一定方向延拓一周后所得的函数为 $f_1(x,\ y)$, 由于在无切直线段 s 上有

$$[f_1(x, y)]_s \equiv \omega(c) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k c^k \tag{19}$$

(这里 $\omega(c)$ 就是 Poincaré 的后继函数)，故由解的唯一性知有

$$f_1(x, y) = \omega(f_0(x, y)), \tag{20}$$

且熟知的是

$$\gamma_1 = \exp h = \exp\oint_l (P'_x + Q'_y)\,dt = \exp\int_0^T (P'_x + Q'_y)\,dt^{1)}, \tag{21}$$

称(17)的满足条件 (18) 的解析解 $f(x, y)$ 为方程(16)关于闭轨线 l 的法积分. 熟知的是：存在 l 的邻域 $S(\varepsilon, l)$. 使在其中或是

$$\omega(f_0) - f_0 = 0 \tag{22}$$

有唯一的解，这时 l 是(16)的极限环；或是上式左边恒等于零，这时 l 的邻域中充满着闭轨线.

[277, 276]证明：l 是(16)的 n 重极限环2)，当且仅当(16)存在如上定义的首次积分 $f(x, y) = c$，其中 $f(x, y)$ 在 l 上是单值的，且有阶数 n. 这里 $f(x, y)$ 在 l 上有阶数 n 是指 f 以及它的直到 $n-1$ 阶的一切偏导数都对 t 有周期 T，而至少有一个 n 阶偏导数对 t 不是周期的. 由此易见这时 (16) 的任一积分因子 $\mu(x, y)$ 在 l 上为单值 $n-1$ 阶解析函数. 此外，他还用法积分为工具在一定的条件下解决了借助于摄动方程

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) + p(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) + q(x, y) \tag{23}$$

将原方程(16)的多重环分解为单重环的问题. 例如[276]中证明：

若 l 为(16)的 n 重极限环，取

$$p(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \alpha_k(x, y), \quad q(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \beta_k(x, y),$$

$\alpha_k(x, y)$, $\beta_k(x, y)$ 为解析函数，λ_k 为独立小参数，那末不论 p, q

1) 这里设 l 的方程为 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$，对 t 有周期 T.

2) 即在(19)中有 $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = \gamma_3 = \cdots = \gamma_{n-1} = 0$, $\gamma_n \neq 0$.

的取法如何，l 最多可以分解为(23)的 n 个单重环. [277]又进一步证明可取 p, q 为有理函数，使上述结论保持不变.

[278]首先证明方程(17)存在实的解析积分，其第一和第二分支满足最简单的关系：

$$F_1(x, y) = F_0(x, y)\exp h,' \tag{24}$$

称这种积分为典型积分. 然后证明：

对于方程(16)的单重极限环 l，必定存在邻域 $S(l, \varepsilon)$，使在其中方程

$$\alpha Q - \beta P = P'_x + Q'_y \tag{25}$$

与

$$\alpha'_x + \beta'_y = 0 \tag{26}$$

存在唯一的单值解析解 $\alpha(x, y)$ 与 $\beta(x, y)$. 但若对于闭轨 l 有 $h=0$, 则这种 α, β 存在当且仅当属于 $S(l, \varepsilon)$ 的方程(16)的所有轨线都是闭的.

由此可见 α, β 的存在是极限环为单重的特征. 又由 (26) 式以及

$$h = \oint_l \alpha\, dy - \beta\, dx$$

可知 α, β 在 l 所围的区域内部必有奇点.

对于满足方程(25)但不满足(26)的 α, β, [278]中证明：

若在单连通域 G 内存在(25)的单值连续可微解 α, β，使函数 $\alpha'_x+\beta'_y$ 在 G 内保持常号，则方程(16)在 G 中没有单重极限环，没有使 $P'_x+Q'_y=0$ 的奇点，也没有中心点. 又若 G 是双连通域，则 G 中如果存在方程(16)的闭轨的话，它只可能是一些单重极限环(如果其内部也含于 G 中)，或唯一的多重环(如果它包含 G 的内境界线在其内部).

读者易见以上加于 α, β 的条件(25)与(26)和 §1 定理 1·13 加于函数 $M(x, y)$, $N(x, y)$的条件有些类似. 可惜[278]的内容过去不很被国内同志们所注意，而[278]的作者对我国关于二次微

分系统的工作可能也所知甚少，彼此不能起到相互促进的作用.

[279]研究极限环与典型积分之间的关系，证明：

如果曲线 l 是方程(16)的 n 重($n\geqslant 2$. 有限)极限环，则不存在与 l 相应的典型积分 $F(x, y)\neq$ 常数；如果 l 是(16)的单重极限环，则存在与 l 相应的典型积分(多值)；而当且仅当 l 的某一邻域 $S(l, \varepsilon)$ 被(16)的闭轨线所充满时方程才存在单值典型积分.

此外[279]还讨论了由两个极限环所围成的区域中的两个典型积分之间的关系.

[280] 讨论过鞍点的分界线环 l_1 的邻域中是否存在典型积分的问题，得到若干与[279]中类似的结果. 在这里以

$$h_1=\int_{-\infty}^{\infty}[P'_x(\varphi_1(t),\ \psi_1(t))+Q'_y(\varphi_1(t),\ \psi_1(t))]dt$$

代替(21)中的 h，其中 $x=\varphi_1(t)$，$y=\psi_1(t)$ 是 l_1 的方程.

[281]研究以(0, 0)为中心的多项式系统

$$\frac{dx}{dt}=y+p(x,\ y),\qquad \frac{dy}{dt}=-x+q(x,\ y),\tag{27}$$

假设它存在 Darboux 积分：

$$\prod_{j=1}^{k}\Phi_j^{\beta_j}=c\tag{28}$$

(其中 Φ_j 为复系数多项式，β_j 为复数，且当 $j\neq l$ 时 Φ_j 与 Φ_l 无公因式). 作者证明：若此时(27)还存在极限环 l，则 l 必为实代数曲线的闭分支，此环是结构稳定的，又确定 l 的不可约多项式必含于(28)中. 若 l 为单重极限环，则在 l 的邻域中存在典型积分 $F(x, y, l)$，它在原点的邻域中为解析，且 $F(0, 0, l)\neq 0$.

[282] 研究当方程(16)的单重极限环 l 内部包含唯一的粗焦点时 l 所对应的典型积分的表达式，又证明：若这时方程有 Darboux 积分(28)，又有极限环，则过粗焦点只有两条代数曲线解，它们是复共轭的.

[283]证明：若方程(16)有极限环 l，其内部包含唯一的奇点是

结点O，它的两特征根之比不是整数，则(16)不存在Darboux积分．此外，他还举例说明[286]中的猜测"有Darboux积分(28)，其中一切$\Phi_j(x_1, y_1)\neq 0$的多项式系统的全体所成之集在有中心型初等奇点(x_1, y_1)的多项式系统所成的空间中稠密"是错误的．

[284]证明：对于有细焦点的多项式系统(16)，不可能存在Darboux积分，且方程有不多于两条不同的不可约代数曲线解通过此细焦点，它们是复的．

[285]研究具有形如

$$G=\prod_{j=1}^{k}\Phi_j^{\beta_j}\exp\prod_{s=1}^{m}W_s^{n_s}=C \tag{29}$$

(其中β_j, n_s一般为复数，Φ_j, W_s一般为复系数多项式，且

$$U=\prod_{s=1}^{m}W_s^{n_s}$$

与

$$\Gamma=\prod_{j=1}^{k}\Phi_j^{\beta_j}$$

之间不是函数相关，诸Φ_j之间无公因式，诸W_s之间无公因式)的Darboux积分的多项式系统(16)的，与前面各文中类似的问题．

П. С. Атаманов与В. П. Захаров曾在1976年证明，方程(16)的单值积分因子$M(x, y)$在极限环l附近是无界的．[287]进一步研究$M(x, y)$的增长阶与l的重次之间的关系．

由于近年来对于多项式系统，特别是二次系统的极限环的理论研究已渐趋深入，我们认为以上这些工作是值得注意的．

III．极限环的方程

对于人为地造出来的方程组，如

$$\frac{dx}{dt}=-y+x(x^2+y^2-1),\quad \frac{dy}{dt}=x+y(x^2+y^2-1), \tag{30}$$

我们不但能写出其极限环的方程$x^2+y^2=1$，而且还能写出其首次积分：

$$\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2}e^{-2\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}}=C, \tag{31}$$

以及解的表达式. 类似的例子还可以造出很多. 但是对于§11中研究过的二次系统

$$\frac{dx}{dt}=-y(\alpha x+\beta y+\gamma)-(x^2+y^2-1),$$
$$\frac{dy}{dt}=x(\alpha x+\beta y+\gamma),\tag{32}$$

我们就只能写出它的极限环(当 $\gamma^2>\alpha^2+\beta^2$)的方程 $x^2+y^2=1$, 和(32)的首次积分, 但不能写出解的表达式. 至于其他如在§12中研究过的I类方程, 虽然我们已用定性方法证明其极限环如果存在的话, 必为唯一, 但却连极限环的方程也写不出来.

当动力系统的极限环的方程能够写出来时, 我们不但可以确定它的准确或近似位置, 而且还可以研究当极限环因微分方程中的参数变动而消失时, 它是否跑到二维复空间中去. [269]中举例说明, 这种情况恰如实系数代数方程的一对实根(因系数的变动)趋于重合而消失时, 我们就得到一对共轭复根一样, 在实平面上的极限环因缩向内部的奇点或与其他极限环重合而消失时, 我们常常可以在二维复空间所对应的四维实空间中的其他二维平面或二维积分流形上重新找到它. 因此, 研究极限环的方程看来是一个重要而有兴趣的问题.

关于这个问题, 即使对于人所熟知的 van der Pol 方程的极限环, 过去人们也只限于用各种近似方法找出当参数 μ 很小时其极限环的近似表达式的前面一二项而已. [55]首先注意到, 如果在

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-x+\mu(1-x^2)y\quad(\mu\neq 0)\tag{33}$$

中改写 μ 为 μ^2, 再作代换 $x'=\mu x$, $y'=\mu y$, 而得(仍记 x', y' 为 x, y)

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-x-x^2y+\mu^2y,\tag{34}$$

则此方程对于参数 μ^2 已构成旋转向量场. 对于方程(34)来说, 当 μ^2 从零变为正值时, 极限环是由原点改变稳定性产生的, 而不是

象(33)那样是由半径等于2的圆产生的.

由于在旋转向量场的完全族中，闭轨线随参数的变动而单调地扩大或缩小，对应于不同参数的方程

$$\frac{dx}{dt}=P(x,\ y,\ \mu),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,\ y,\ \mu) \tag{35}$$

的闭轨线互不相交，因此，在闭轨线运动而遮盖的，内外境界都含奇点的区域 G 中，可以定义一个函数 $\mu(x,\ y)$，它在点 $(x,\ y)$ 的值就是有极限环通过此点的方程(35)所对应的 μ 值，而 $\mu(x,\ y)=\mu(x_0,\ y_0)=\mu_0$ 显然就是 $(35)_{\mu_0}$ 的一切闭轨线的方程，其中有一条是通过点 $(x_0,\ y_0)$ 的. [55]证明：当(35)中的 P, Q 对 x, y, μ 为连续可微时，此函数 $\mu(x,\ y)$ 在 G 中亦为连续可微，且满足一阶拟线性偏微分方程

$$Q(x,\ y,\ \mu(x,\ y))\frac{\partial\mu}{\partial y}+P(x,\ y,\ \mu(x,\ y))\frac{\partial\mu}{\partial x}=0. \tag{36}$$

最后在极坐标下求

$$\mu^2=\sum_{k=1}^{\infty}\Omega_k(\varphi)\rho^{2k}$$

(其中 $\Omega_k(\varphi)$ 为 φ 的 2π 周期函数)形式的，方程(34)的极限环的方程，再回到方程(33)，得到(33)的唯一极限环的幂级数形状的方程为(当 $|\mu|\ll 1$ 时为收敛)

$$1-\frac{1}{4}\rho^2+\frac{\mu}{64}(2\sin 2\varphi+\sin 4\varphi)\rho^4$$
$$+\frac{\mu^2}{1024}\left(3\cos 6\varphi+5\cos 4\varphi+5\cos 2\varphi-\frac{61}{26624}\right)\rho^6+\cdots=0. \tag{37}$$

[288]在 P, Q 对 x, y, μ 为实解析的条件下重新获得方程(36)，并证明这时 $\mu(x,\ y)$ 在 G 中也是实解析的. 此外，他还对方程(34)所对应的偏微分方程直接求极限环的形如

$$\mu^2=F(x,\ y)=\frac{1}{4}(x^2+y^2)+F_3+F_4+\cdots$$

的 x, y 的幂级数解，得到

$$F=\frac{1}{4}(x^2+y^2)-\frac{1}{8}x^3y-\frac{1}{6144}y^6-\frac{1}{2048}x^2y^4+\frac{143}{2048}x^4y^2-\frac{17}{6144}x^6+\frac{1}{4608}x^3y^5-\frac{385}{1152}x^5y^3+\text{高次项}. \tag{38}$$

回到方程(33)，可得其唯一极限环的方程为

$$0=1-\frac{1}{4}(x^2+y^2)+\frac{1}{8}\mu x^3y+\frac{\mu^2}{6144}(y^6+3x^2y^4-429x^4y^2+17x^6)+\frac{\mu^3}{6144}\left(\frac{6160}{3}x^5y^3-\frac{4}{3}x^3y^5\right)+\cdots. \tag{39}$$

[289]与[288]独立，对与(33)等价的 Rayleigh 方程

$$\frac{dy}{dt}=x,\quad \frac{dx}{dt}=-y+\mu^2\left(x-\frac{x^3}{3}\right). \tag{40}$$

作变换 $x'=\mu x$, $y'=\mu y$，得到（仍记 x', y' 为 x, y）

$$\frac{dy}{dt}=x,\quad \frac{dx}{dt}=-y-\frac{x^3}{3}+\mu^2x. \tag{41}$$

然后设(41)的极限环的方程为 $\mu^2=F(x, y)$. 由 [55] 知 $F(x, y)$ 应满足偏微分方程

$$x\frac{\partial F}{\partial y}+\left(-y+xF-\frac{x^3}{3}\right)\frac{\partial F}{\partial x}=0, \tag{42}$$

假设 $F(x, y)$ 可展开为幂级数:

$$F(x, y)=a_1x+b_1y+a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+\cdots.$$

以之代入(42)，[289]证明展开式中的一切系数都可唯一确定. 并算出直到 x, y 的八次方项的系数，得到方程

$$\begin{aligned}\mu^2&=\left\{\frac{x^2+y^2}{4}+\frac{1}{18432}(29x^6-9x^4y^2-153x^2y^4-51y^6)+\cdots\right\}\\&\quad+x^3y\left\{\frac{1}{24}+\left(\frac{-46}{18432}x^2y^2-\frac{34}{18432}y^4\right)+\cdots\right\}\\&=S_1(x)+x^3yS_2(x).\end{aligned} \tag{43}$$

由于无法得到一般项的系数表达式，他用电子计算机算出直到 20

次齐次式的各项系数的近似值，看出 $S_1(x)$ 与 $S_2(x)$ 似乎分别有优级数 $\operatorname{sh}(x^2+y^2)$ 与 $\operatorname{ch}(x^2+y^2)$. 即(43)似有可能在全平面收敛.

[289]还发现(37)式左边第四项计算有错误，正确的结果应是

$$\frac{\mu^2}{1024}\left(\frac{7}{2}+\cos 2\varphi-5\cos 4\varphi-\frac{7}{3}\cos 6\varphi\right)\rho^6.$$

如果把(37)回到直角坐标，则正确的结果应是：

$$0=1-\frac{x^2+y^2}{4}+\frac{\mu}{8}x^3y+\frac{\mu^2}{6144}[y^6+3x^2y^4-429x^4y^2+17x^6]$$
$$+\frac{\mu^3}{6144}\left[-34x^7y+\frac{770}{3}x^5y^3-\frac{4}{3}x^3y^5\right]+\cdots$$

由此可见(39)式中的八次方项也有计算错误.

最后，值得指出的是，在[290]第十四章中所用以求极限环的方程的 Г. В. Каменков 方法，在平面旋转向量场族的情况远不如以上所介绍的待定系数法来得简便. 此外，由本书 § 12 关于 I 类方程的定理可知，[290]第十四章 § 5 关于方程

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-x+\mu[ax+2by+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2]$$

在 $b=0$ 时存在极限环的结论是错误的.

参 考 文 献

1. H. Poincaré, Jour. Math. Pures et Appl. (3), **7**(1881), 375—422; **8** (1882), 251—296; (4), **1** (1885), 167—244; **2**(1886), 151—217.
2. I. Bendixson, Acta Math., **24** (1901), 1—88,或数学进展, 3 卷 1 期(1957).
3. D. Hilbert, Archiv der Math. u. Phys. (3), **1**(1901), 44—63, 213—237.
4. H. Dulac, Bull. Soc. Math. de France, **51**(1923), 45—188.
5. H. Dulac, Bull. Sci. Math. (2), **32** (1908), 230—252.
6. M. Frommer, Math. Ann., **109** (1934), 395—424.
7. B. van der Pol, Phil. Mag., vol. 2, Nov. (1926).
8. A. A. Андронов, Comp. Rend. **189** (1929), 559—561.
9. A. Liénard, Rev. Gén. d'Elect., **23** (1928), 901—902.
10. E. Cartan, H. Cartan. Annales des P. T. T., **14**(1925), 1196—1207.
11. 叶彦谦,科学纪录,新辑1(1957), 359—361.
12. 叶彦谦,科学纪录,新辑 2(1958), 276—279.
13. 叶彦谦,南京大学学报(1958), 第 1 期, 7—17.
14. 董金柱,数学学报 **8**(1958), 258—268; 又 **9**(1959), 156—169; 又 **12**(1962), 251—257.
15. 叶彦谦等,数学学报 **12**(1962), 1—15.
16. 叶彦谦,数学学报 **12**(1962), 60—67.
17. 秦元勋,数学学报 **8**(1958), 23—35.
18. 黄启宇等,数学学报 **10**(1960), 223—237.
19. 陈兰荪,王明淑,数学学报 **22** (1979), 751—758.
20. 史松龄,中国科学(1979), No. 11, 1051—1056.
21. Н. Н. Баутин, Мат. сбор. **30** (1952), 181—195.
22. 叶彦谦,数学进展 **5** (1962), 118—136.
23. В. Ф. Ткачев и Вл. Ф. Ткачев, Мат. сбор. **54**(1960), 811—822.
24. Ю. С. Богданов, ДАН СССР, **120** (1958), 939—940.
25. 陈广卿,数学学报 **20**(1977), No. 4, 281—284.
26. 陈翔炎,南京大学学报(1978), No. 3, 9—11.
27. 杨宗培,数学的实践与认识 No. 3(1981), 25—32.
28. Н. П. Еругин, ПММ, **14**, в. 5(1950).
29. Н. Н. Красовский, ПММ, **17**(1953), 651—672.
30. Н. Н. Красовский, ПММ, **18**(1954), 149—154.
31. 叶彦谦,马知恩,数学学报 **20**(1977), 6—10.
32. 余澍祥,数学学报 **23** (1980), 712—719.
33. R. J. Sacker and G. R. Sell, J. Diff. Equs., **11**: 3(1972), 449—463.

34. 董镇喜,环域定理在二维流形上的推广(待发表).
35. 田景黄,南京大学学报(1982), No. 3, 607—616.
36. 田景黄,高隆昌,四川大学学报(1982), No. 2, 10—16.
37. 叶彦谦,中国科学 **12**(1963), 621—631.
38. 王现,南京大学学报 (1983), No. 1.
39. S. P. Diliberto, Contributions to the theory of nonlinear oscillations, I (1950), 1—38.
40. В. Ф. Ткачев, Мат. сбор. **56** (1962), 281—300.
41. M. Urabe, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser., A. **18**(1954), 37—53.
42. П. Н. Папуш, Успехи Мат. Наук, **7**(1952), в. 4, 165—168.
43. Л. С. Понтрягин, 常微分方程(金福临,李训经译,上海科技出版社, 1962).
44. В. И. Зубов, ПММ. **25**(1961), 303—313.
45. 秦元勋,数学学报 **4** (1954), 445—464.
46. G. F. D. Duff, Annals of Math., **17** (1953), 15—31.
47. G. Seifert, Contributions to the theory of nonlinear oscillations, **IV** (1958), 125—140.
48. 陈翔炎,南京大学学报(1963), No. 1.
49. 陈翔炎,南京大学学报(1963), No. 2.
50. 陈翔炎,南京大学学报(1975), No. 1.
51. 马知恩,汪儿年,鞍点分界线环的稳定性及产生极限环的条件, 数学年刊, 第4卷第1期(1983).
52. А. А. Андронов и Е. А. Леонтович, Мат. сбор. **48** (1959), 335—376.
53. M. Urabe and S. Katsuma, J. Sci. Hiroshima Univ., **17**(1954), 365—370.
54. Л. А. Черкас, Диф. Урав. **4** (1968), 1012—1017.
55. 孙顺华,数学学报 **14**(1964), 50—57.
56. F. Takens, J. Diff. Equations,**14**(1973), 476—493.
57. 陈翔炎,数学学报13卷4期(1963).
58. Л. С. Понтрягин, Фур. Экс. Теор. Физ. **4** (1934), 883—889.
59. А. А. Андронов и Е. А. Леонтович, Мат. сбор., **40**(1956), 179—224.
60. И. Г. Малкин, 非线性振动理论中的若干问题. (1956).
61. 黄克成,数学学报 **23**(1980), 483—490.
62. А. Ф. Филиппов, Мат. сбор. т. **30**(72), (1952), 171—180.
63. R. P. de Figueiredo, Contr. th. non-linear oscil., **V**(1960), 269—284.
64. N. Levinson and O. K. Smith,Duke Math. J. **9** (1942), 382—403.
65. А. В. Драгилев, ПММ. **16**(1952), 84—88.
66. 伍卓群,东北人民大学学报(1956), No. 2, 33—46.
67. 秦元勋,微分方程所定义的积分曲线(科学出版社,1959).
68. S. Lefschetz, 微分方程几何理论(中译本).
69. S. Lefschetz, Contr. th. nonlinear oscil. v. 2(1952), 61—74.

70. 董金柱,清华大学学报 **3**, No.1(1957), 1—11.
71. 秦元勋,曾宪武,科学通报 **25**(1980), 273—276.
72. 张棣,陈治融,湛垦华,无浓度扩散时 Prigogine 的三分子模型的行为 (待发表).
73. G. Sansone and R. Conti, Abh. Math. Sem. Uni. Hamb. Bd., **20**(1954), 185—195.
74. 余澍祥,数学学报 **14**(1964), 461—470.
75. 周毓荣,应用数学学报 **3**(1980), 50—56.
76. 廖晓昕,梁肇军,华中师院学报(1977), No. 2, 52—64.
77. 张棣,陈治融,均相三分子反应另一模型(待发表).
78. 李继彬,东北师大学报 No. 2(1981).
79. 曾宪武,二拍振荡方程 $\ddot{x}+\rho(e^x-2)\dot{x}+x=0$ 的定性分析,应用数学学报 **6**(1983), No. 1, 13—17.
80. 黄启昌,史希福, $\dot{x}=h(y)-F(x)$, $\dot{y}=-g(x)$ 存在极限环的充分条件(待发表).
81. 黄启昌,陈秀东,数学研究与评论 **1**(1982), 119—126.
82. 史希福,关于 Liénard 方程存在极限环的条件(待发表).
83. 陈秀东,黄启昌,东北师大学报(1982), No. 1, 1—9.
84. 陈秀东,Liénard 方程极限环存在性的判别准则(待发表).
85. Dean A. Neumann and L. D. Sabbagh, J. Math. Anal. Appl. **62** (1978), 148—156.
86. 叶彦谦,南京大学学报 **3**(1957), 49—60.
87. 吴葵光,$\dot{x}=P(y)$, $\dot{y}=Q(x, y)$ 的极限环的存在性(待发表).
88. 林立聪,$\dot{x}=\varphi(y)-F(x)$, $\dot{y}=Q(x, y)$ 存在极限环的判别准则(待发表).
89. 杨宗培,Liénard 方程周期解的存在性定理(待发表).
90. R. M. Cooper, J. Math. Anal. Appl. **34**(1971), 412—417.
91. E. Д. Жительзейф, Диф. урав., **6**(1970), №. 6.
92. 余澍祥,数学进展 **8**(1965), No. 2, 187—194.
93. 陈广卿,内蒙师院学报(1977), No. 1, 32—41.
94. 周毓荣,数学年刊 **3**(1982), 89—102.
95. 王现,一类 Liénard 方程的极限环,数学年刊(1983, No. 6).
96. 井竹君,陈兰荪,应用数学学报(1980).
97. 陈兰荪,井竹君,免疫反应中微分方程极限环的存在性(待发表).
98. 井竹君,陈兰荪,科学通报(1982).
99. 王现,南京大学学报(1983), No. 1.
100. R. Conti, Boll. Un. Mat. Ital., (3), **7**(1952), 111—118.
101. Z. Opial, Ann. Pol. Math. **5**(1958), 67—75.
102. R. Reissig, Math. Nachr. **15**(1956), 191—196.
103. 黄启昌, $\ddot{x}+\varphi(\dot{x})+\psi(\dot{x})\eta(x)=0$ 的极限环. 科学通报 (1982), No. 7, 393—395.
104. A. A. Андронов, A. A. Витт, C. Э. Хайкин, Теория Калебания.

105. 张棣,西北大学学报(1957).
106. G. Sansone, Ann. Mat. pure ed appl. (4), **28** (1949), 153—181.
107. H. Serbin, Quart. Appl. Math. **8**(1950), 296—303.
108. G. F. D. Duff, N. Levinson, Quart. Appl. Math. **10**(1952), 86—88.
109. 张芷芬,北京大学学报(1959), No.4, 327—336.
110. G. Sansone, R. Conti, Annali di Mat. **38**(1955), 205—212.
111. 张芷芬,ДАН СССР, **119**(1958), 659—662.
112. Л. А. Черкас, Л. И. Жилевич, Диф. урав. **6**, №. 7(1970), 1170—1178.
113. Л. И. Жилевич, Диф. урав. **6**(1970), 1888—1891.
114. J. L. Massera, Boll. Un. Mat. Ital. (3), **9**(1954), 367—369.
115. G. Sansone, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, **10** (1950—1951), 155—171.
116. R. Conti, Boll. Un. Mat. Ital. (3), **7**(1952), 111—118.
117. De Castro, Boll. Un. Mat. Ital., **9**(1954), 369—372.
118. Г. С. Рычков, Диф. урав. **6**, №. **12**(1970), 2193—2199.
119. 曾宪武,数学学报 **21**, No.3(1978), 263—269.
120. 曾宪武, Liénard 方程的极限环的唯一性. 中国科学 **25**(1982), No.6, 583—592.
121. Н. В. Медведев, Изв. вузов. Мат. **2**(1965).
122. Л. А. Черкас, Диф. урав. **13** (1977), № 5, 779—802.
123. 王明淑, II 类方程的极限环的唯一性,南京大学学报(1980).
124. 陈广卿, II 类方程的极限环的唯一性,数学学报 **25**(1982), 711—723.
125. G. Sansone, 实变量微分方程论. v. 2(1949).
126. J. P. François, C. C. Pugh, Deformations de Cycles Limite, IHES Report, Nov. 1982.
127. М. И. Войлоков, Мат. сбор. **44**(1958), 235—244.
128. Г. С. Рычков, Сиб. Мат. Жур. **7**(1966), 1425—1431.
129. Г. С. Рычков, Диф. урав. **11**(1975).
130. 黄克成,华东水利学院学报(1979), No.1, 116—123.
131. 张芷芬,中国科学(1980), No.10, 941—948.
132. 张芷芬, 何启敏, Liénard 方程至多存在 n 个极限环的充分条件, 数学学报 **25**(1982), 585—594.
133. 陈秀东, Liénard 方程至少存在 n 个极限环的充分条件和构造方法, 科学通报 **6**(1982), 381—2.
134. 黄启昌,杨思讱, 具变阻尼的 Liénard 方程存在多个极限环的条件, 东北师大学报 **1**(1981), 11—19.
135. 丁苏红, Liénard 方程在有限区间上极限环的存在唯 n 性定理, 中国科学 **25**(1982), No. 9, 792—800.
136. H. J. Eckweiler, Stud. Nonlinear Vibr. Th., (1946).

137. J. J. Stoker, 力学与电学中的非线性振动(1950).

138. H. S. Hochstadt, B. H. Stephen, Arch. Rat. Mech. Anal. **23**(1967), No. 5.

139. R. N. D'Heedene, J. Diff. Equs. **5**(1969), No. 3.

140. W. Magnus, F. Oberhettger, Formulas & Theorems for the Special Functions of Math. Physics (1949).

141. A. Lins, W. de Melo, C. C. Pugh, Geometry & Topolopy, Lect. Notes in Math. v. **597** (1977), 335—357.

142. А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин, ДАН, СССР **14**(1937), №. 5, 247—250.

143. H. F. DeBaggis, Contr. th. nonlinear oscil. **II** (1952), 37—59.

144. M. M. Peixoto, Ann. of Math. **69**(1959), 199—222.

145. M. M. Peixoto, Topology (1962), 101—120.

146. H. Dulac, Bull. de la Soc. Math. de France, **51** (1923), 45—188.

147. Г. Дюлак, О предельных циклах (俄译本), (1980).

148. 丁同仁,多重极限环的分解,北京大学微分方程论文集(1963), 183—188.

149. C. Gutierrez, J. Diff. Equs. **29**(1978), 388—395.

150. 罗定军,南京大学学报(1982), No. 1.

151. E. A. V. Gonzeles, Trans. Amer. Math. Soc. **143**(1969).

152. G. T. dos Santos, Geometry & Topolopy, Lect. Notes in Math. 597(1977), 605—640.

153. S. Smale, Bull. Amer. Math. Soc. **73**(1967), 747—817.

154. D. V. Anosov, Trudy Mat. Inst. Steklov, **90**(1967).

155. L. Markus, Lect. Diff. Dyns. (1980).

156. Z. Nitecki, Differentiable Dynamics (1971).

157. Jack K. Hale 与周修义,分枝理论, Grundl. Math. Wiss. **251**(1982).

158. P. Holmes, J. Diff. Equs. **37**(1980), No.3.

159. Н. А. Лукашевич, Диф. урав. **1**(1965), №.1, 82—95.

160. А. Н. Берлинский, Изв. вузов. Мат. (1960), №. 5, 27—32.

161. В. Т. Борухов, Диф. урав. **8**(1972), №. 9, 1682—1683.

162. М. В. Долов, Диф. урав. **8**(1972), №. 9, 1691—1692.

163. Н. А. Сахарьиков, ПММ. **14**(1950), 651—658.

164. Л. С. Лягина, УМН. **6**(1951), №. 2.

165. L. Markus, Contr. Th. Nonli. Oscil., **5** (1960), 185—214.

166. Н. И. Вулпе, К. С. Сибирский, Диф. урав. **13**(1977), 803—814.

167. А. Н. Берлинский, Диф. урав. **2**(1966), 363—360.

168. И. С. Куклес, М. Хасанова, Изв. вузов. Мат. (1964), 88—97.

169. А. Н. Берлинский, Изв. вузов. Мат. (1960), №. 2, 3—18.

170. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер, Качественная теория динамических систем второго порядка (1966).

171. G. T. Santos, Lec. Notes in Math., **597**(1977), 605—640.

172. 蔡燧林,浙江大学学报 1979, No. 4, 105—113.

173. 史松龄,没有极限环的通有二次向量场的拓扑分类，全国第三次微分方程会议交流资料.

174. 梁肇军,一类二次系统奇异环的不存在性及相图(未发表).

175. 蔡燧林,浙江大学学报 1979, No. 4, 114—122.

176. 田景黄, C. Chicone, 初论多项式微分系统的一般性质, Amer. Math. Monthly **89**(1982), 167—178.

177. Л. А. Черкас, Диф. урав. **17**(1981), №. 11, 2002—2016.

178. А. П. Воробьев, ДАН БССР, **4**(1960), №. 9.

179. 余澍祥,数学学报 **20**(1977), 193—205.

180. 李继彬,安徽大学学报(1980), No.1, 27—31.

181. 史松龄，只有两个互不包含的极限环的二次系统举例，数学学报 **25**(1982), No. 6, 657—9.

182. 秦元勋,蔡燧林,史松龄,中国科学(1981), 927—938.

183. 李承治,关于平面二次系统的两个问题,中国科学(1982), No. 12.

184. 周孔容,有对称中心的 II 类方程存在极限环的 (1, 1) 分布的条件(尚未发表).

185. Л. И. Жилевич, Диф. урав. **7**(1971), 1525—1527.

186. 黄启宇等,数学学报 **10**(1960), 223—237.

187. 程中瑗等,四川大学学报 **2**(1960).

188. 徐世龙,关于代数极限环的注记,四川师院学报.

189. А. И. Яблонский, Диф. урав. **2**(1966), 335—344; 又 **6**(1970), 1752—1760.

190. В. Ф. Филиппцов, Диф. урав. **6**(1970), №. 10, 1770—1779; 又 **8**(1972), 1709—1711; 又 **9**(1973), 1281—1288.

191. 叶彦谦,王明淑,二次微分系统细焦点的一个重要性质,数学年刊 4 卷 1 期(1983).

192. Л. А. Черкас, Диф. урав. **9**(1973), №. 8, 1432—1437.

193. 梁肇军,华中师院学报(1982), No. 1, 46—52.

194. 汪儿年,研究生毕业论文(1965)(未发表).

195. 邓耀华,罗定军,数学学报 **14**(1964), 119—127.

196. 叶彦谦,陈兰荪,数学学报 **18**(1975), 219—222.

197. 杨信安,叶彦谦,福州大学学报(1978), No.2, 122—127.

198. Л. В. Шахова, Труды пятой международной конференций по нелинейным колебаниям, Т. 2, Киев (1969), 541—551.

199. И. Г. Розет, Диф. урав. **7**(1971), №. 11, 2007—2012.

200. И. С. Куклес, А. В. Шахова, Науки Тр. Сам. Ун-та, **6**(1967), 23—28.

201. Л. Г. Макар-Лиманов, Мат. сб. **73**(1967), 3—7.

202. И. С. Куклес, И. Г. Розет, Из. вузов. Мат. (1970), №.5, 53—56.

203. Л. А. Черкас, Диф. урав. **6**(1970), №. 5, 779—783.

204. 马知恩,西安交大学报(1965), No. 1, 1—10.

205. 叶彦谦,南京大学学报(1963), No. 2, 1—18

206. 曹振中,南京大学学报(1981), No. 4, 433—446.
207. 董雨滋,具两个细焦点的二次系统的轨线的全局结构(尚未发表).
208. 罗定军,南京大学学报(1963), No. 1.
209. 孙开浚,研究生毕业论文(未发表).
210. 曹贤通,关于非粗焦点的 II 类方程的定性研究(尚未发表).
211. 任永泰,索光俭,东北师大学报 (1981), No.4, 1—8.
212. 王明淑,李开泰,南京大学学报(1964), No, 2.
213. 陈广卿, 二次系统中的第 II 类方程之极限环(III), 数学学报 **25**(1982), No. 6, 711—723.
214. C. C. Chicone, J. Diff. Equs. **33**(1979), 159—166.
215. 王明淑,南大学报(1981), No. 1, 13—18.
216. 梁肇军,关于方程 $(\mathrm{II})_{l=0}$ 的极限环的相对位置(将在数学年刊发表).
217. 梁肇军,同前题目(尚未发表).
218. Л. И. Жилевич, Диф. урав. **7**(1971), №. 8, 1525—1527.
219. 居乃旦,数学学报 **15**(1965), No. 3, 405—418.
220. Л. И. Жилевич, Диф. урав. **7**(1971), №. 5.
221. Л. А. Черкас, Л. И. Жилевич, Диф. урав. **8**(1972), №. 7, 1207—1213.
222. Л. А. Черкас, Л. И. Жилевич, Диф. урав. **10**(1974), 947—949.
223. 陈广卿,内蒙师院学报,(1980), No.1, 8—16.
224. 陈兰荪,数学进展 **9**(1966), 387—400.
225. Л. А. Черкас, Л. И. Жилевич, Диф. урав. **6**(1970), №. 7.
226. 陈兰荪,数学学报 **20**(1977) 11—13.
227. 邹应,武汉大学学报(1977), No.4.
228. 刘钧,武汉钢铁学院学报(1979). No. 4, 10—15.
229. 任永泰,东北师范大学学报.
230. 李孝贵,数学学报 **19**(1976), 107—118.
231. 刘南根,湖南大学学报(1981), No.1, 77—81.
232. И. С. Куклес, И. Г. Розет, Диф. урав. **7**(1971), №. 10, 1813—1818.
233. И. Г. Розет, Диф. урав. **8**(1972), №. 10, 1791—1798.
234. 王辉丰,海南师院学报(1982).
235. 索光俭,杜兴福,系统

$$\dot{x}=xy,\ \dot{y}=\sum_{0\leqslant i+j\leqslant 2}a_{ij}x^iy^j$$

的二次代数奇异环与极限环存在的分歧值函数(尚未发表).
236. 索光俭,方程组

$$\dot{x}=a+\sum_{i+j=2}a_{ij}x^iy^j,\ \dot{y}=b+\sum_{i+j=2}b_{ij}x^iy^j$$

的极限环的分歧值与代数奇异环(待发表).
237. 蔡燧林,数学年刊 **2**(1981), 475—477.
238. 王明淑,林应举,具三阶细焦点的二次系统的无环性,数学年刊 **3**(1982).

239. 索光俭，

$$\dot{x}=a+\sum_{i+j=2}a_{ij}x^iy^j,\ \dot{y}=b+\sum_{i+j=2}b_{ij}x^iy^j$$

至多存在两个极限环，科学通报 **26**(1981), No. 24, 1479—1480.

240. Л. А. Черкас, Диф. урав. **4**(1968), №. 12, 2281—2285.

241. Л. А. Черкас, Диф. урав. **3**(1967), №. 7.

242. 周孔容，四川大学学报(1980), No. 2, 23—37.

243. 陈兰荪，数学学报 **24**(1981), No. 4.

244. 陈兰荪，数学学报 **25**(1982), 475—483.

245. 徐人成，研究生毕业论文(1981).

246. 戴国仁，II 类方程的极限环的不存在性(未发表).

247. R. J. Dickson, L. M. Perko (1968), AD718996.

248. R. J. Dickson, L. M. Perko, J. Diff. Equs. **7**(1970), 251—273.

249. А. А. Леваков, Э. С. Шпигельман. Диф. урав. **8**(1972), 1969—1976.

250. 杨信安，关于有界二次系统的极限环(英文)，数学年刊 4 卷 2 期(1983).

251. 陈广卿，具有二次代数曲线解的二次系统的极限环(I)(尚未发表).

252. 陈广卿，某些有界二次系统的极限环的个数(尚未发表).

253. 杨信安，数学学报 **25**(1982), No. 3, 297—301.

254. 张芷芬，数学学报 **24**(1981), No. 5, 710—716.

255. 蔡燧林，汪中位，具二阶细焦点的二次系统 $III_{n=0}$ 的极限环(待发表).

256. 叶伯英，二次系统 II 类方程极限环的分布(待发表).

257. 陈叔平，以抛物线为特殊积分的二次系统的极限环(待发表).

258. Л. А. Черкас, ДАН БССР, **7**(1963).

259. 王东达，方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(2\lambda x+1)(ax+by+c)+\alpha(\lambda x^2+y^2+x+1)}{2y(ax+by+c)+\beta(\lambda x^2+y^2+x+1)}$$

至多存在一个极限环(待发表).

260. P. Holmes, D. Rand, Int. J. Nonlinear Mech. **15**(1980), No. 6, 449—458.

261. 李继彬，内含多个奇点的极限环的存在性以及某些三次微分系统的极限环分布(待发表).

262. Л. А. Черкас, Диф. урав. **17**(1981), №.9, 1709—1712.

263. 李继彬，一类 Hamilton 扰动系统的分枝与全局相图(待发表).

264. J. Carr, Applications of Center Manifold Theory. (1980), Springer-Verlag.

265. А. Н. Баутин, ПММ. **39**(1975), 633—641.

266. 黄克成，

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=-y\sum_{i+j=0}^{2m}a_{ij}x^iy^j-\sum_{i=1}^{2m+1}a_ix^i$$

的极限环的存在性(待发表).

267. Е. Д. Жительзейф, ПММ. **36**(1972), 1114—1117.

268. Е. Д. Жительзейф, Диф. урав. **13**(1977), №.4, 753—755.

269. 叶彦谦 数学年刊 **3**(1982), No. 4, 457—470.

270. Tsutomu Date, J. Diff. Equs. **32** (1979), 311—334.
271. 史松龄, J. Diff. Equs. **41** (1981), No. 3, 301—312.
272. J. Sotomayor, Curvas definidas per equações diferenciais no plano, IMPA: 13°--Coléquio Brasileiro de Matemática (1981).
273. J. Sotomayor, R. Paterlini, Quadratic vector felds with finitely many pericdic orbits(预印本).
274. R. Bamón, A class of planar quadratic vector fields with a limit cycle surrounded by a saddle loop. (预印本).
275. 梁肇军, 二次系统

$$\frac{dx}{dt}=-y+lx^2+mxy,\qquad \frac{dy}{dt}=x-x^2$$

的全局相图与分枝曲线(待发表).
276. Н. Ф. Отроков, Мат. сбор. **41** (1957), № 4, 418—430.
277. Н. Ф. Отроков, Диф. урав. **3** (1967), № 2, 193—205.
278. М. В. Долов, Диф. урав. **4** (1968), № 5, 812—820.
279. М. В. Долов, Диф. урав. **5** (1969), № 11, 2026—2033.
280. М. В. Долов, Диф. урав. **6** (1970), 1378—1383.
281. М. В. Долов, Диф. урав. **11** (1975), № 11, 1935—1941.
282. М. В. Долов, Диф. урав. **12** (1976), № 11, 1946—1953.
283. М. В. Долов, Диф. урав. **13** (1977), № 3, 406—415.
284. М. В. Долов, Диф. урав. **14** (1978), № 7, 1173—1178.
285. М. В. Долов, Диф. урав. **14** (1978), № 10, 1765—1774.
286. К. С. Сибирский, Диф. урав. **8** (1972), № 12.
287. М. В. Долов, Диф. урав. **17** (1981), № 8, 1490—1492.
288. Л. А. Черкас, Диф. урав. **18** (1982), № 5, 839—845.
289. 叶惟寅, van der Pol 方程的极限环的方程(毕业论文, 1982).
290. Н. П. Еругин, Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений (1979), минск, "наука и механика".
291. 马知恩, 西安交大学报 1978, No. 4.
292. Г. С. Рычков, Диф. урав. **8** (1972), № 12, 2257—2259.
293. 陈广卿, 具抛物线解的二次系统的极限环(待发表).
294. 索光俭, 具抛物线解的二次系统的极限环(待发表).
295. C. C. Chicone, D. S. Shafer, Proc. Amer. Math. Soc. **85** (1982), No. 1, 125—134.
296. C. C. Chicone, D. S. Shafer, Separatrices and limit cycles of quadratic systems, and Dulac theorem (Preprint).
297. 梁肇军, 方程$(II)_{\delta=m=0}$ 的全局拓扑结构和分歧曲线(待发表).

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝极限环论
作者＝叶彦谦等著
页数＝４４１
ＳＳ号＝１００６９６６７
出版日期＝

目录
正文